Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Aktuarvereinigung

Band: - (2005)

Heft: -: 100 Jahre SAV = 100 ans ASA = 100 years SAA : Aktuare in Helvetiens Landen : 8 x 4 Porträts : Jubiläumsheft 2005

Artikel: Die Vielseitigen

Autor: Ineichen, R.

Kapitel: Niklaus I Bernoulli (1687-1759)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967322

«... his attitude is pragmatic, like that of a modern statistician.»

Niklaus I Bernoulli (1687–1759)

Jahrelang mehr Knabengeburten als Mädchengeburten?

«... seine Einstellung ist pragmatisch, wie die eines modernen Statistikers.» Mit diesen Worten charakterisiert A. Hald [1] die Einstellung von Niklaus I Bernoulli bei dessen Untersuchung einer Behauptung, die der englische Mathematiker und Arzt John Arbuthnot (1667–1753) 1710 in der Royal Society in London vorgetragen hatte: In den Registern der getauften Neugeborenen in London seien für die 82 Jahre 1629–1710 Jahr für Jahr mehr männliche als weibliche Geburten verzeichnet. Dabei sei aber die Wahrscheinlichkeit, – er spricht vom *Lot* (also vom «Los») eines Wettenden oder von der *Value of his Expectation* – dass dies 82-mal hintereinander infolge *Chance* (Zufall) geschehe, äusserst klein, nämlich $(1/2)^{82}$. Und daraus folge nun, *that it is Art not Chance, that governs*. Und so trägt denn seine zugehörige Publikation in den *Philosophical Transactions* (1710) auch den Titel *An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observed in the Births of both Sexes*.

Schon 1712 verfasste der holländische Mathematiker W.J.'s Gravesande (1688–1742) eine Verbesserung der Argumentation von Arbuthnot: Er geht wie Arbuthnot immer noch von p=1/2 für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt aus, arbeitet nun aber mit fiktiven Zahlen in einem Modell. Auch für 's Gravesande handelte es sich gleichzeitig um eine *Démonstration du soin que Dieu prend de diriger ce qui se passe dans le monde*.

In ganz anderer Art wendet sich nun Niklaus Bernoulli dem Problem von Arbuthnot zu. Er will dabei, wie er ausdrücklich feststellt, nicht etwa gegen die Vorsehung – *la Providencve de Dieu* – kämpfen; die theologische Seite der ganzen Angelegenheit scheint ihn jedoch nicht sonderlich zu interessieren. Bemerkenswert ist nun sein pragmatisches, modernes Vorgehen: Er bestimmt erstens aus den Zahlen von Arbuthnot einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, benützt also dafür nicht einfach den Wert ½; zweitens arbeitet er ein Modell aus, und drittens beschafft er sich auch noch das notwendige Werkzeug für die Arbeit mit der Binomialverteilung, nämlich eine Verschärfung gewisser Ungleichungen, die er bei Jakob Bernoulli gefunden hat. Aus den Daten von Arbuthnot berechnet er nun zunächst für jedes Jahr die relative Häufigkeit der Knabengeburten und bestimmt

DISSERTATIO INAUGURALIS
MATHEMATICO-JURIDICA

DE

USU ARTIS CONJECTANDI IN JURE,

Quam

DIVINA JUVANTE GRATIA

Auctoritate & Jussu

Magnifici & Amplissimi JCtorum Ordinis in Academia Patria

pro

GRADU DOCTORATUS

In Utroque Jure legitime consequendo

Ad Diem Junii A. C. MDCCIX.

L. H. Q. S.

Publice defendet

M. NICOLAUS BERNOULLI,

Basiliensis.

)o(

BASILEÆ,

Typis JOHANNIS CONRADI à MECHEL.

Niklaus I Bernoulli
1687–1759
Titelblatt seiner Dissertation
«De Usu Artis Conjectandi
in Jure» von 1709

damit für eine fiktive Anzahl von total 14 000 Geburten pro Jahr für jedes der 82 Jahre die zugehörige fiktive Anzahl von Knabengeburten. Er erhält so auch eine fiktive Minimalzahl (7037), eine fiktive Maximalzahl (7507) und schliesslich die entsprechende mittlere Anzahl (7237) von Knabengeburten pro Jahr. Damit gewinnt er einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt: 7237/14 000 = 0,5169. Seine weiteren Rechnungen aufgrund der Binomialverteilung und der erwähnten Verschärfungen führen ihn dann zu folgendem Ergebnis:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl X der Knabengeburten eines Jahres zwischen 7237 – 200 und 7237 + 200 liegt, ist bestimmt durch

$$P(7037 \leq X \leq 7437) > 303/304 = 0{,}9967.$$

Auf die vier Werte, die in seinem Modell ausserhalb dieses Intervalls liegen, geht er allerdings trotz dieser grossen Wahrscheinlichkeit nicht ein. Er berechnet weiter $(303/304)^{100} = 0{,}7193$. Diese Wahrscheinlichkeit scheint ihm so gross zu sein, dass er feststellt: *Non est miraculum* ... – «Es ist kein Wunder, dass die Zahl der Knabengeburten während 82 Jahren diese Grenzen nicht überschreitet.» Die Überlegungen von Niklaus, die wir hier zusammenfassend dargestellt haben, kann man seinem Briefwechsel mit W.J. 's Gravesande aus dem Jahre 1712 entnehmen. In den Briefen an P.R. de Montmort (1678–1719) arbeitet Niklaus Bernoulli mit einem leicht veränderten Modell: *[...] en prenant un milieu, la raison des mâles aux femelles est fort près de 18/17.* Auch aus diesem Modell werden ähnliche Folgerungen gezogen; einige davon gehen über jene hinaus, die aus dem ersten Modell gezogen worden sind [1];[2].

Wie A. Hald ausführlich darlegt, sind beide Modelle vom heutigen Standpunkt aus nicht mehr befriedigend. Es ist jedoch das Prinzipielle am Vorgehen von Niklaus, das dem heutigen Statistiker trotzdem gefällt: die Modellbildung, die Bestimmung eines Schätzwertes für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, also für den Parameter p der Binomialverteilung, weiter die Schaffung eines geeigneten Werkzeugs – Hald nennt es das «Theorem von Niklaus Bernoulli» – für die Arbeit mit der Binomialverteilung [1];[2].

Die Mutmassungskunst bei Rechtsfragen

Den hier skizzierten Überlegungen von Niklaus ist eine andere Arbeit vorausgegangen, nämlich seine Doktorarbeit von 1709, *De Usu Artis Conjectandi in Jure* – «Über den Gebrauch der Mutmassungskunst in Fragen des Rechts» [3]. K. Kohli hat zu dieser Dissertation von Niklaus Bernoulli einen vorzüglichen und sehr hilfreichen Kommentar geschrieben [4]. «Der geistige Vater dieses Werkes», schreibt K. Kohli, «ist eindeutig Jakob [Bernoulli]. Ganze Abschnitte sowohl aus dem Tagebuch als auch aus der *Ars Conjectandi* hat Niklaus wörtlich übernommen. An anderen Stellen werden Fragestellungen und blosse Andeutungen Jakobs aufgegriffen und weiterverarbeitet. Die [...] Arbeit enthält glänzende Untersuchungen und zeugt oft von klaren Vorstellungen über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Fragen des Alltags, sie ist aber noch nicht das reife Werk, das wir dem Niklaus zutrauen würden, den wir aus seinen Briefen an Montmort und de Moivre aus dem zweiten Jahrzehnt des 18. Jahrhunderts kennen.» – Wir wollen nun auf zwei für uns hier besonders wichtige Themen dieser Arbeit kurz eingehen: Lebenserwartung, Kauf von Leibrenten.

Lebenserwartung

Niklaus geht von der 1662 publizierten Absterbeordnung von John Graunt (London, 1620–1674) aus, wonach von 100 Neugeborenen nach 6 Jahren noch 64 leben, nach 16 Jahren noch 40, nach 26 Jahren noch 25, nach jeweils weiteren zehn Jahren noch 16, 10, 6, 3, 1, 0. Niklaus bestimmt nun die mittlere künftige Lebenserwartung eines Neugeborenen: Die Anzahl dieser Jahre beträgt

$$(36 \cdot 3 + 24 \cdot 11 + 15 \cdot 21 + 9 \cdot 31 + 6 \cdot 41 + 4 \cdot 51 + 3 \cdot 61 + 2 \cdot 71 + 1 \cdot 81) : 100 = 18\ 11/50.$$

Der Term $36 \cdot 3$ ergibt sich aus den 36 Todesfällen von Kindern in den ersten sechs Jahren, wobei angenommen wird, dass diese im Mittel 3 Jahre gelebt haben; bei den 24 Todesfällen in den nächsten zehn Jahren wird ein mittleres Alter von $6 + 5 = 11$ Jahren angenommen usw.

Für einen z.B. 46 Jahre alten Menschen findet man dann analog eine mittlere künftige Lebenserwartung von 15 Jahren, da $(4 \cdot 5 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 35) : 10 = 15$.

Dabei entsteht z.B. der Term $3 \cdot 15$ durch die drei Todesfälle zwischen 56 und 66, jeder im Mittel 10+5 Jahre nach dem 46. Altersjahr usw.

Niklaus spricht in diesem Zusammenhang noch nicht von «mittlerer Lebenserwartung», sondern einfach von *expectatio,* also von «Erwartung» (daneben z.B. auch vom «mittleren Alter» oder vom «wahrscheinlichsten Alter»). Für die Berechnung dieser *expectatio* formuliert er in Anlehnung an die Abhandlung *De Ratiociniis in Ludo Aleae* von Christiaan Huygens (1657) die Regel: «Man multipliziere die möglichen Ergebnisse mit den Anzahlen der Fälle in denen sie auftreten und teile die Summe aller dieser Produkte durch die Gesamtzahl der Fälle.»

Niklaus fragt nun weiter nach der mittleren Lebenserwartung desjenigen von zwei, drei oder mehreren Menschen, der am längsten lebt. Seine bemerkenswerten und wohl völlig neuen Untersuchungen, bei welchen er auch die Integralrechnung einsetzt, können nicht in Kürze wiedergegeben werden. Sie führen ihn zu folgendem Resultat: Ist ein Zeitraum von a Jahren gegeben, innerhalb welchem b Menschen sterben, und sterben die Einzelnen in jedem Augenblick gleich leicht *(aequali facilitate),* so ist die Lebenserwartung des am längsten Lebenden gegeben durch ab: (b+1). – Das heisst also, wenn es sich nur um eine Person handelt, durch (1/2)a, bei zwei Personen durch (2/3)a, bei drei durch (3/4)a usw.
Mit diesem Ergebnis kann Niklaus nun zum Beispiel die künftige Lebenserwartung des Überlebenden von zwei neugeborenen Kindern bestimmen. Er betrachtet dazu zwei Gesamtheiten von je 100 Neugeborenen und arbeitet wieder mit der oben gegebenen Absterbeordnung von John Graunt. Die künftige Lebenserwartung des Überlebenden beträgt 27 4119/5000 Jahre. Wir illustrieren die etwas langwierige Rechnung, die zu diesem Resultat führt, durch die folgenden Angaben:

$$(36 \cdot 36 \cdot 4 + 2 \cdot 36 \cdot 24 \cdot 11 + 24 \cdot 24 \cdot 12\tfrac{2}{3} + 2 \cdot 60 \cdot 15 \cdot 21 + 15 \cdot 15 \cdot 22\tfrac{2}{3} + \ldots + 1 \cdot 1 \cdot 82\tfrac{2}{3}) : 100^2$$

Die hier auftretenden Produkte zeigen uns die Überlegungen von Niklaus. 36 · 36 · 4: Es sind 36 · 36 Fälle denkbar, wo beide Personen in den ersten sechs Jahren sterben; die länger lebende Person im Mittel also nach (⅔)a Jahren, für a = 6 also im Mittel nach 4 Jahren. – 2 · 36 · 24 · 11: Es sind 2 · 36 · 24 Fälle denkbar, wo eine der beiden Personen in den ersten sechs Jahren, die andere dann zwischen sechs und sechzehn stirbt; die länger lebende Person also im Mittel nach 6 + (1/2)a Jahren, für a=10 also im Mittel nach 11 Jahren. – 24 · 24 · 12 2/3: Es sind 24 · 24 Fälle denkbar, wo beide zwischen sechs und sechzehn sterben, die länger lebende Person also im Mittel nach 6 + (2/3)a Jahren, für a = 10 also im Mittel nach 12 2/3 Jahren. Die anderen Produkte werden analog berechnet. – Die Summe wird dann dividiert durch die Anzahl aller Möglichkeiten, also durch 100 · 100.

Niklaus ist von der linearen Interpolation der Zahlen der Graunt'schen Absterbeordnung nicht befriedigt. Er hat auch nicht gewusst, dass die Tafeln von Graunt mehr auf Überlegungen als auf wirklichen Beobachtungen beruhen. Ein Freund vermittelte ihm wirkliche Beobachtungen an 2000 Personen «aus einer berühmten Schweizer Stadt». Er berechnet damit die Lebenserwartungen für verschiedene Altersklassen, die nun wesentlich von jenen abweichen, die er nach der Tafel von Graunt erhalten hat, und er sucht nach Erklärungen. «Aus den publizierten Zahlen lässt sich aber rückwärts eine Absterbeordnung näherungsweise rekonstruieren. Ergo kommt ihm das Verdienst zu, Angaben für eine erste schweizerische Sterbetafel geliefert zu haben» [5].

Ankauf von Leibrenten

In seinen Untersuchungen über den «Kauf von Hoffnungen» behandelt er speziell auch den Kauf von Leibrenten *(emtio* [emptio] *redituum vitalium),* also die Barwertberechnung bei einer Leibrente. Er kommt zum Schluss: Wenn eine Person innerhalb der nächsten zehn Jahre sicher sterben wird, und zwar in jedem Jahre gleich leicht, so ist der gerechte Preis einer nachschüssigen Leibrente gleich dem arithmetischen Mittel der Zeitrenten für 1, 2, 3, ... ,9, 10 Jahre. (K. Kohli [4] macht hier auf einen Überlegungsfehler von Niklaus aufmerksam: Wenn eine Person in den ersten zehn Jahren stirbt, so muss die 10. Rente nicht mehr bezahlt werden.) Niklaus entwickelt nun zuerst eine Tabelle, welche bei einem Zinsfuss von 5% die Preise für Zeitrenten *(pretia redituum temporalium)* vom 1. bis zum 100. Jahre enthält. Mit Hilfe dieser Tafel der Barwertfaktoren nachschüssiger Renten berechnet er anschliessend den Preis der Leibrenten mit dem jährlichen Ertrag 1 für die verschiedenen Altersklassen. Er gibt ein Beispiel für die Durchführung der Rechnung im Falle eines 16-Jährigen:

$$(15\cdot 4{,}558 + 9\cdot 10{,}519 + 6\cdot 14{,}179 + 4\cdot 16{,}427 + 3\cdot 17{,}806 + 2\cdot 18{,}653 + 1\cdot 19{,}173) : 40 = 10{,}593.$$

Das Produkt $15\cdot 4{,}558$ kommt so zustande: 15 sterben nach Graunt in den nächsten 10 Jahren; 4,558 ist das arithmetische Mittel der Zeitrenten für die ersten 10 Jahre. (Man beachte den oben mitgeteilten Überlegungsfehler.) Analoges gilt für die anderen Produkte. 40 ist die Anzahl Personen, die gemäss der Absterbeordnung von Graunt nach sechzehn Jahren noch leben.

Einige weitere Probleme

Niklaus behandelt in seiner Dissertation noch zahlreiche weitere Probleme, teils kurz, teils recht ausführlich. So z.B. Lebensversicherungen, Versicherungen des Risikos im Seehandel, das Schiffbruchproblem, das wir schon bei Jakob I antreffen, dann Fragen des Erbrechts, Wetten, Lotterien und auch Spiele.

* * * * *

Niklaus I Bernoulli (geb. 10.10.1687 in Basel, gest. 29.11.1759 in Basel) ist der Sohn des Kunstmalers Niklaus Bernoulli, Mitglied des Rates, und somit ein Neffe von Jakob I Bernoulli und von Johann I Bernoulli. Die Mathematik hat er bei seinen berühmten Onkeln gelernt und sich auch stark für deren Themen interessiert. 1705

hat er seinen Onkel Johann in Groningen besucht; mit ihm ist er dann nach Basel zurückgekehrt. 1709 hat er seine juristischen Studien abgeschlossen und mit der oben genannten Arbeit, die als Dissertatio inauguralis mathematico-juridica bezeichnet worden ist, doktoriert. 1713 hat er postum die Ars Conjectandi seines Onkels Jakob herausgegeben. Er hat sich ferner auch mit Problemen der Analysis beschäftigt. – Viele seiner Resultate sind in seiner reichen Korrespondenz verborgen. Ein wichtiger Teil seines Briefwechsels mit P.R. de Montmort befindet sich in dessen Essai d'-Analyse sur les jeux de hazard von 1713. Mit Montmort hat er auch über strategische Spiele korrespondiert, also über Spiele, in welchen nicht nur der Zufall, sondern auch das Verhalten (die Strategie) der Spieler berücksichtigt werden muss: Die blosse Wahrscheinlichkeitsrechnung genügt dann nicht mehr; es braucht besondere spieltheoretische Methoden [6]. Derartige Probleme sind erst 1928, also sehr viel später, durch J. von Neumann wieder aufgegriffen worden.
1716–1719 war Niklaus Professor der Mathematik in Padua; 1722 ist er Professor der Logik in Basel geworden, und 1731 hat er in Basel einen juristischen Lehrstuhl erhalten.

R. Ineichen

Bibliographie

[1] Hald, A, A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750, Wiley, New York 1989

[2] Ineichen, R., Aus der Vorgeschichte der Mathematischen Statistik, Elemente der Mathematik 47, 1992

[3] Bernoulli, N., De Usu Artis Conjectandi in Jure (1709). In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3; bearbeitet von B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel 1975

[4] Kohli, K., Kommentar zur Dissertation von Niklaus Bernoulli: De Usu Artis Conjectandi in Jure. In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3; bearbeitet von B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel 1975

[5] Kupper, J., Versicherungsmathematik und schweizerische Hochschulen, Mitteilungen SAV 1/1998

[6] Henny, J., Niklaus und Johann Bernoullis Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrem Briefwechsel mit Pierre Rémond de Montmort. In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3; bearbeitet von B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel 1975