**Zeitschrift:** Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

**Herausgeber:** Schweizerische Aktuarvereinigung

**Band:** - (2005)

**Heft:** -: 100 Jahre SAV = 100 ans ASA = 100 years SAA : Aktuare in Helvetiens Landen : 8 x 4 Porträts : Jubiläumsheft 2005

**Artikel:** Die Vielseitigen

**Autor:** Ineichen, R.

**Kapitel:** Jakob I Bernoulli (1654-1705)

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-967322

**«... der Verfasser der berühmten *Ars Conjectandi*»**

# Jakob I Bernoulli (1654–1705)

Für Walter Saxer ist der «Verfasser der berühmten Ars Conjectandi» zugleich «der eigentliche Vater der mathematischen Statistik»: Jakob Bernoulli gibt uns nämlich die erste Formulierung und den exakten Beweis des Gesetzes der grossen Zahl und legt damit die «theoretische Basis der mathematischen Statistik» [1], die ja der Versicherungsmathematik keineswegs fremd ist.

## «Ars Conjectandi sive Stochastice»

1657 hat Christiaan Huygens (1629–1695) die kleine, systematische Abhandlung *De Ratiociniis in Ludo Aleae* [2] publiziert. Er zeigt darin, wie die Teilnehmer an Glücksspielen ihre Erwartung (den Erwartungswert; *valor expectationis* bzw. *expectatio)* berechnen können. Diesen Erwartungswert berechnet er z.B. im Satz III seiner Abhandlung so:

«Wenn die Anzahl der Fälle, in welchen mir a zufällt, gleich p und die Anzahl der Fälle, in welchen mir b zufällt, gleich q ist, so wird meine Erwartung unter der Annahme, dass alle Fälle gleich leicht eintreten können, $(pa + qb)/(p + q)$.» – Huygens geht dabei noch nicht von Produkten aus Wahrscheinlichkeit und allfälligem Gewinn oder Verlust aus, sondern vom weitgehend intuitiv erfassten Begriff des rechtmässigen Spiels.

Jakob Bernoulli bringt in seiner «Ars Conjectandi» [3] nun zuerst die Arbeit von Huygens, die er kommentiert und erweitert. Darauf folgt die Kombinatorik, die er dann auf Glücksspiele anwendet. Er arbeitet dabei immer mit der *expectatio,* die er auch etwa durch *sors* (Schicksal, Los) oder *spes* (Hoffnung) umschreibt, aber nicht mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit. Der Spezialfall $a = 1$, $b = 0$ führt dann auf die Erwartung $p/(p + q)$. Das ist bereits der später als «klassische Wahrscheinlichkeit» bezeichnete Quotient aus der Zahl der günstigen dividiert durch die Zahl der gleichmöglichen Fälle.

Erst im Teil IV verbindet er dann die Glücksspielrechnung mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit, der *probabilitas*. Man muss hier beachten, dass *probabilis* bzw. *probabilitas* in der Antike, im Mittelalter und zum Teil bis ins 17. Jahrhundert hinein in der Regel Attribute einer Meinung waren, oft einer Meinung, einer Vermutung, die durch Autoritäten gestützt war. Diese Attribute hatten dann aber nichts mit


Jakob I Bernoulli
1654–1705

Glücksspielen zu tun; sie dienten dazu, die (hohe) Glaubwürdigkeit einer Aussage auszudrücken, die übrigens meistens nicht quantitativ angegeben wurde (R. Ineichen [4]).
«Irgend ein Ding vermuten» heisst nun für Jakob Bernoulli, «soviel als seine Wahrscheinlichkeit messen». Und so nennt er denn seine Lehre eben «Vermutungs- oder Mutmassungskunst», *Ars Conjectandi sive Stochastice* (lat. *coniectare* und griech. stochazesthai bedeuten u.a. «vermuten», «mutmassen»). Schon diese Bezeichnung weist weit über die Glücksspiele hinaus: Vermuten, Mutmassen sind ja in vielerlei Situationen unentbehrlich, keineswegs nur beim Glücksspiel. – Er definiert: «Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen.»
Die zugehörige Masszahl dieser Wahrscheinlichkeit findet Bernoulli wieder nach den Methoden der Glücksspielrechnung: «[Weil] die Beweiskraft, welche irgend ein Beweisgrund hat, von der Menge der Fälle abhängt, in welchen dieser vorhanden oder nicht vorhanden sein kann, [...] kann der Grad der Gewissheit oder die Wahrscheinlichkeit [...] berechnet werden, wie die Hoffnungen der Teilnehmer an einem Glücksspiel gefunden zu werden pflegen.»
So gelangt Jakob Bernoulli schliesslich zur bereits erwähnten «klassischen» Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zu jenem Quotienten, der später zur «Laplaceschen Definition» der Wahrscheinlichkeit geworden ist.

## Das Gesetz der grossen Zahl

Jakob weist dann aber darauf hin, dass es fast nur in Glücksspielen möglich ist, die Zahl der Fälle, die «mit gleicher Leichtigkeit» eintreten, im Voraus – *a priori* – zu bestimmen, dass uns aber oft ein anderer Weg offen steht, nämlich «das Gesuchte aus dem Erfolge, welcher bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, zu ermitteln.» Er stellt weiter fest: «Diese empirische Art, die Zahl der Fälle durch Beobachtung zu bestimmen, ist weder neu noch ungewöhnlich», und «alle Menschen beobachten im täglichen Leben dasselbe Verfahren».
Doch Bernoulli bleibt nicht bei diesen Feststellungen stehen, er will noch etwas in Betracht ziehen, «woran vielleicht niemand bisher auch nur gedacht hat»: Wächst «durch Vermehrung der Beobachtungen auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl der günstigen zu der Zahl der ungünstigen Beobachtungen das wahre Verhältnis erreicht, und zwar in dem Masse, dass diese Wahrscheinlichkeit jeden beliebigen Grad der Gewissheit übertrifft»? Es gelingt ihm, zu beweisen, dass die eben formu-

lierte Frage positiv beantwortet werden kann, und damit gibt er uns den ersten Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung; man nennt ihn heute das **Gesetz der grossen Zahl von Bernoulli,** oder auch das **schwache Gesetz der grossen Zahl.**

Modern kann dieses Gesetz so formuliert werden: Es sei E ein Ereignis, das bei einem Zufallsexperiment die Wahrscheinlichkeit p besitzt ($0<p<1$). X bezeichne die Anzahl des Eintreffens von E bei n unabhängigen Ausführungen dieses Experimentes. Weiter sei eine beliebig kleine positive Zahl $\varepsilon$ gegeben. Dann gilt

$$P(|X/n - p| < \varepsilon) \longrightarrow 1 \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Wenn eine genügend grosse Zahl von Beobachtungen unter den gleichen Voraussetzungen gemacht worden ist, so kann man also aufgrund dieses Satzes die Trefferwahrscheinlichkeit experimentell mit ziemlicher Sicherheit bestimmen: Die relative Häufigkeit ist eine *konsistente* Schätzung von p.

Bernoulli geht in seinem Beweis von einem Zufallsexperiment mit lauter gleichmöglichen Fällen aus und formuliert diesen Satz so: «Es möge sich die Zahl der günstigen Fälle zu der Zahl der ungünstigen Fälle genau oder näherungsweise wie r/s, also zur Zahl aller Fälle wie r/(r+s) = r/t – wenn r+s = t gesetzt wird – verhalten, welches letztere Verhältnis zwischen den Grenzen (r+1)/t und (r–1)/t enthalten ist. Nun können, wie zu beweisen ist, so viele Beobachtungen gemacht werden, dass es beliebig oft (z.B. c-mal) wahrscheinlicher ist, dass das Verhältnis der günstigen zu allen angestellten Beobachtungen innerhalb dieser Grenzen liegt als ausserhalb derselben [...].» – Es ist dieser Satz, den er exakt beweist. Wir würden nun etwa sagen, dass die relative Häufigkeit h «in Wahrscheinlichkeit» gegen p konvergiert; in seiner Terminologie heisst dies, dass wir «moralisch sicher» sein können, dass h nicht stark von p abweicht, wenn n genügend gross ist. – Er zeigt also, dass h bei genügend grossem n in ein kleines Intervall um das gegebene p fällt; er sucht jedoch nicht umgekehrt auch ein Vertrauensintervall für ein unbekanntes p, wenn h gegeben ist (A. Hald [5], I. Schneider [6]).

## «Anwendung der vorhergehenden Lehre auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse»

Dies ist der volle Titel des vierten Teils der *Ars Conjectandi,* und unter diesem Titel finden wir auch das Gesetz der grossen Zahl. Jakob Bernoulli bemerkt dazu in seinem Tagebuch *(Meditationes,* Artikel 151a [7]): «Diese Entdeckung gilt mir mehr, als wenn ich gar die Quadratur des Kreises geliefert hätte; denn wenn diese auch gänzlich gefunden würde, so wäre sie doch wenig nütz.» Sein Stolz war berechtigt: Er wusste um die Wichtigkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in unserem Leben, in welchem es ja so oft ums Vermuten, ums Mutmassen geht. Nun wollte er, wie es der Titel des vierten Teiles zeigt, den Anwendungen nachgehen. Das Gesetz der grossen Zahl hätte ihm dazu die Grundlage geboten. Doch bei seinem Tode (1705) hinterliess er das Werk unvollendet, ohne diese Anwendungen. Und unvollendet ist es schliesslich postum 1713 erschienen. Warum? «Ein schwerwiegender Punkt ist sicher der, dass Jakob von seinen Anwendungsbeispielen nicht befriedigt war. Diese paar Probleme konnten nicht zeigen, welch wirksames Werkzeug des menschlichen Geistes hinter seiner neuen Entdeckung verborgen lag. So suchte er zäh nach durchschlagenden Beispielen. Denken wir nur daran, wie hartnäckig er Leibniz gebeten hat, ihm die Arbeit de Witts über Leibrenten zukommen zu lassen» (K. Kohli [8]).

Zu den wichtigsten Anwendungen, die er im vierten Teil wohl ausführlich behandeln wollte, gehört die Schätzung von Sterbenswahrscheinlichkeiten und Lebenserwartungen. Bereits in den *Meditationes* ([7], Art. 77) schneidet er dieses Problem an. Es geht dabei um einen komplizierten, sehr phantasievollen Ehevertrag, dessen Einzelheiten hier nicht dargelegt werden können. Weil ein allfälliges Erbe von Seiten der Väter der Eheleute bei der Regelung der Verteilung berücksichtigt werden soll, benötigt Jakob Bernoulli für seine Lösung u.a. die Wahrscheinlichkeiten, dass die vor dem Mann sterbende Ehefrau vor den beiden betagten Vätern der Eheleute stirbt, dass sie nach einem der Väter stirbt, dass sie erst stirbt, nachdem beide Väter tot sind. – Wesentlich ist dabei:

(1) Jakob versucht zuerst auf mehrere Arten, das ihm vertraute Glücksspielmodell unter ganz verschiedenen Hypothesen anzuwenden. Zum Beispiel stellt er sich fünf gleichmögliche Fälle von Krankheiten vor, von denen jeder von jeweils zwei solchen Fällen für je einen der beiden Väter tödlich sein soll und nur einer davon für die Frau. Unter dieser Annahme besteht nach Jakob eine Wahrscheinlichkeit von 1/5, dass die Frau als erste stirbt, von $(4 \cdot 1/3 + 1 \cdot 0) : 5 = 4/15$, dass sie als Zweite stirbt, und von 8/15, dass sie als Letzte stirbt ([6] Anm. 19). – Bernoulli schreibt hier noch z.B. 4/15 *certitudinis*, also 4/15 «der Sicherheit», analog (1/5)c., (8/15)c.

(2) Jakob hat einige derartige Modelle unter ganz verschiedenen Hypothesen sehr geschickt durchgerechnet, aber er ist davon nicht befriedigt und stellt fest: Es ist hier eben nicht so wie beim Karten- und beim Würfelspiel, wo wir genau die Anzahl der mit gleicher Leichtigkeit eintretenden Fälle bestimmen, die zu Gewinn oder Verlust führen, und so die Erwartung «genau und wissenschaftlich» berechnen können. «Die sicherste Art, die Wahrscheinlichkeit zu schätzen, ist in jenen Fällen nicht *a priori*, also durch Gründe, sondern *a posteriori*, nämlich aus dem häufig beobachteten Ergebnis in ähnlichen Beispielen».

Die Bestimmung des «Erwartungswertes eines Ehevertrages», von der wir hier einiges mitgeteilt haben, ist nicht das einzige Problem von Jakob Bernoulli, das in die Nähe der Versicherungsmathematik gehört. Er hat sich weiter zum Beispiel mit dem «Schiffbruchproblem» (*Meditationes* [7], Art. 77b) beschäftigt: Da wird einem Kaufmann gemeldet, dass drei Schiffe ausgefahren sind, von denen eines 100 Kisten an Bord hat, von denen vier dem Kaufmann gehören. Die vier Kisten A,B,C,D enthalten Waren im Werte von 1200, 2000, 2400 und 1700 Gulden. Später erfährt er, dass eines von den drei Schiffen in einem Schiff-

bruch untergegangen ist, wobei nur 20 Kisten den Fluten entrissen worden sind. Der Kaufmann will die Hoffnung *(spes)*, die ihm noch geblieben ist, lieber einem anderen verkaufen, als noch länger zwischen Furcht und Hoffnung hin- und hergerissen werden. Die Hoffnung auf Kiste A, also der Erwartungswert, ist offenbar $[2/3 + (1/3) \cdot (1/5)] \cdot 1200 = (11/15) \cdot 1200$ und analog für die anderen drei Kisten. Der Gesamtwert der Hoffnung beträgt somit $(11/15) \cdot 7300$ Gulden. (Diese einfache Lösung findet man erst bei Niklaus I Bernoulli; Jakob hat anscheinend nicht daran gedacht.)
Auch Absterbeordnungen haben ihn interessiert. So erwähnt er 1686 die von J. Graunt (1620–1674) zum Teil beobachteten, zum Teil aber bloss berechneten Daten über das Absterben (1662), auf die wir bei seinem Neffen Niklaus I Bernoulli zurückkommen müssen. – Wie schade, dass ihm die einschlägigen Untersuchungen von J. de Witt oder von J. Hudde nicht zur Verfügung standen – oder gar jene von Caspar Neumann, die die Basis von Halleys Arbeit über die Leibrenten darstellen!

* * * * *

Die Familie Bernoulli gehört zu den wenigen Familien, die über Generationen hinweg bedeutende Persönlichkeiten hervorgebracht haben. Sie stammt aus Holland. In der zweiten Hälfte des 16. Jh. musste sie infolge ihres protestantischen Glaubens fliehen und gelangte schliesslich nach Basel. Niklaus Bernoulli, der Sohn des ersten in Basel ansässig gewordenen Bernoulli, ist der Stammvater des «Mathematikerzweiges» der Bernoulli. Sein Sohn Jakob I Bernoulli (geb. in Basel 1654, gest. in Basel 1705) ist nicht nur der erste Gelehrte in der Familie Bernoulli, sondern wohl auch der erste wirklich berühmte Schweizer Mathematiker. Auf Wunsch seines Vaters widmete er sich dem Studium der Theologie, das er 1676 abschloss. Daneben beschäftigte er sich aber intensiv mit Mathematik und Astronomie. Auf zwei Auslandreisen lernte er führende Mathematiker und Naturforscher kennen und begann autodidaktisch die moderne Mathematik zu studieren. Von 1682 an war er wieder in Basel und widmete sich fortan ganz der Mathematik. Er führte seinen Bruder Johann I Bernoulli in die Mathematik ein; später behandelten die beiden Brüder zahlreiche mathematische Probleme gemeinsam. Sie haben beide vor allem auch dadurch zur Entwicklung der Mathematik beigetragen, dass sie die von Leibniz vertretenen Gedanken zur Infinitesimalrechnung aufnahmen und durch viele bedeutsame Entdeckungen sehr wesentlich bereicherten. Zu Jakob Bernoullis wichtigsten Leistungen gehören weiter die Begründung und Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars Conjectandi), zahlreiche Arbeiten zur Analysis und über spezielle Kurven, dann auch die Begründung der Variationsrechnung. 1687 wurde er Mathematikprofessor an der Universität Basel, und von jenem Jahre an war der mathematische Lehrstuhl in Basel während mehr als hundert Jahren stets von einem Bernoulli besetzt.

*R. Ineichen*

## Bibliographie

[1] Saxer, W., Beziehungen zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematisch-Phys. Semesterberichte V, 1956

[2] Huygens, Chr., De Ratiociniis in Ludo Aleae. In: Frans van Schooten, Exercitationum mathematicarum libri quinque, Liber V. Leiden: Ex Officina Johannis Elsevirii 1657, Deutsche Übersetzung in Bernoulli, J. (1899); lat. Text in Bernoulli, J. (1975)

[3] Bernoulli, J., Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars Conjectandi) 1713, übersetzt von R. Haussner, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 107, 108, Akademische Verlagsanstalt, Leipzig 1899
Bernoulli, J., Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3. Bearbeitet von B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel 1975

[4] Ineichen, R., Zufall und Wahrscheinlichkeit – einst ganz getrennt, jetzt eng verbunden, Elemente der Mathematik 54, 1999

[5] Hald, A., A History of Probability and Statistics – and their Applications before 1750, Wiley, New York 1989

[6] Schneider, I., Die Mathematisierung der Vorhersage künftiger Ereignisse in der Wahrscheinlichkeitstheorie vom 17. bis zum 19. Jahrhundert. Berichte zur Wissenschaftsgeschichte 2, 1979

[7] Bernoulli, J., Meditationes und Kommentare dazu in Bernoulli, J. (1975).

[8] Kohli, K., Zur Publikationsgeschichte der Ars Conjectandi. In: Bernoulli, J. (1975).