Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Aktuarvereinigung

Band: - (2005)

Heft: -: 100 Jahre SAV = 100 ans ASA = 100 years SAA : Aktuare in Helvetiens Landen : 8 x 4 Porträts : Jubiläumsheft 2005

Artikel: Die Vielseitigen

Autor: Ineichen, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967322

1. Die Vielseitigen

1.1 Jakob I Bernoulli (1654–1705)

1.2 Niklaus I Bernoulli (1687–1759)

1.3 Leonhard Euler (1707–1783)

1.4 Johannes Gessner (1709–1790)

«... der Verfasser der berühmten *Ars Conjectandi*»

Jakob I Bernoulli (1654–1705)

Für Walter Saxer ist der «Verfasser der berühmten Ars Conjectandi» zugleich «der eigentliche Vater der mathematischen Statistik»: Jakob Bernoulli gibt uns nämlich die erste Formulierung und den exakten Beweis des Gesetzes der grossen Zahl und legt damit die «theoretische Basis der mathematischen Statistik» [1], die ja der Versicherungsmathematik keineswegs fremd ist.

«Ars Conjectandi sive Stochastice»

1657 hat Christiaan Huygens (1629–1695) die kleine, systematische Abhandlung *De Ratiociniis in Ludo Aleae* [2] publiziert. Er zeigt darin, wie die Teilnehmer an Glücksspielen ihre Erwartung (den Erwartungswert; *valor expectationis* bzw. *expectatio)* berechnen können. Diesen Erwartungswert berechnet er z.B. im Satz III seiner Abhandlung so:

«Wenn die Anzahl der Fälle, in welchen mir a zufällt, gleich p und die Anzahl der Fälle, in welchen mir b zufällt, gleich q ist, so wird meine Erwartung unter der Annahme, dass alle Fälle gleich leicht eintreten können, (pa + qb)/(p + q).» – Huygens geht dabei noch nicht von Produkten aus Wahrscheinlichkeit und allfälligem Gewinn oder Verlust aus, sondern vom weitgehend intuitiv erfassten Begriff des rechtmässigen Spiels.

Jakob Bernoulli bringt in seiner «Ars Conjectandi» [3] nun zuerst die Arbeit von Huygens, die er kommentiert und erweitert. Darauf folgt die Kombinatorik, die er dann auf Glücksspiele anwendet. Er arbeitet dabei immer mit der *expectatio,* die er auch etwa durch *sors* (Schicksal, Los) oder *spes* (Hoffnung) umschreibt, aber nicht mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit. Der Spezialfall a = 1, b = 0 führt dann auf die Erwartung p/(p + q). Das ist bereits der später als «klassische Wahrscheinlichkeit» bezeichnete Quotient aus der Zahl der günstigen dividiert durch die Zahl der gleichmöglichen Fälle.
Erst im Teil IV verbindet er dann die Glücksspielrechnung mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit, der *probabilitas*. Man muss hier beachten, dass *probabilis* bzw. *probabilitas* in der Antike, im Mittelalter und zum Teil bis ins 17. Jahrhundert hinein in der Regel Attribute einer Meinung waren, oft einer Meinung, einer Vermutung, die durch Autoritäten gestützt war. Diese Attribute hatten dann aber nichts mit

Jakob I Bernoulli
1654–1705

Glücksspielen zu tun; sie dienten dazu, die (hohe) Glaubwürdigkeit einer Aussage auszudrücken, die übrigens meistens nicht quantitativ angegeben wurde (R. Ineichen [4]).
«Irgend ein Ding vermuten» heisst nun für Jakob Bernoulli, «soviel als seine Wahrscheinlichkeit messen». Und so nennt er denn seine Lehre eben «Vermutungs- oder Mutmassungskunst», *Ars Conjectandi sive Stochastice* (lat. *coniectare* und griech. stochazesthai bedeuten u.a. «vermuten», «mutmassen»). Schon diese Bezeichnung weist weit über die Glücksspiele hinaus: Vermuten, Mutmassen sind ja in vielerlei Situationen unentbehrlich, keineswegs nur beim Glücksspiel. – Er definiert: «Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen.»
Die zugehörige Masszahl dieser Wahrscheinlichkeit findet Bernoulli wieder nach den Methoden der Glücksspielrechnung: «[Weil] die Beweiskraft, welche irgend ein Beweisgrund hat, von der Menge der Fälle abhängt, in welchen dieser vorhanden oder nicht vorhanden sein kann, [...] kann der Grad der Gewissheit oder die Wahrscheinlichkeit [...] berechnet werden, wie die Hoffnungen der Teilnehmer an einem Glücksspiel gefunden zu werden pflegen.»
So gelangt Jakob Bernoulli schliesslich zur bereits erwähnten «klassischen» Berechnung der Wahrscheinlichkeit, zu jenem Quotienten, der später zur «Laplaceschen Definition» der Wahrscheinlichkeit geworden ist.

Das Gesetz der grossen Zahl

Jakob weist dann aber darauf hin, dass es fast nur in Glücksspielen möglich ist, die Zahl der Fälle, die «mit gleicher Leichtigkeit» eintreten, im Voraus – *a priori* – zu bestimmen, dass uns aber oft ein anderer Weg offen steht, nämlich «das Gesuchte aus dem Erfolge, welcher bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, zu ermitteln.» Er stellt weiter fest: «Diese empirische Art, die Zahl der Fälle durch Beobachtung zu bestimmen, ist weder neu noch ungewöhnlich», und «alle Menschen beobachten im täglichen Leben dasselbe Verfahren».
Doch Bernoulli bleibt nicht bei diesen Feststellungen stehen, er will noch etwas in Betracht ziehen, «woran vielleicht niemand bisher auch nur gedacht hat»: Wächst «durch Vermehrung der Beobachtungen auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl der günstigen zu der Zahl der ungünstigen Beobachtungen das wahre Verhältnis erreicht, und zwar in dem Masse, dass diese Wahrscheinlichkeit jeden beliebigen Grad der Gewissheit übertrifft»? Es gelingt ihm, zu beweisen, dass die eben formu-

lierte Frage positiv beantwortet werden kann, und damit gibt er uns den ersten Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung; man nennt ihn heute das **Gesetz der grossen Zahl von Bernoulli,** oder auch das **schwache Gesetz der grossen Zahl.**

Modern kann dieses Gesetz so formuliert werden: Es sei E ein Ereignis, das bei einem Zufallsexperiment die Wahrscheinlichkeit p besitzt ($0<p<1$). X bezeichne die Anzahl des Eintreffens von E bei n unabhängigen Ausführungen dieses Experimentes. Weiter sei eine beliebig kleine positive Zahl ε gegeben. Dann gilt

$$P(|X/n - p| < \varepsilon) \longrightarrow 1 \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Wenn eine genügend grosse Zahl von Beobachtungen unter den gleichen Voraussetzungen gemacht worden ist, so kann man also aufgrund dieses Satzes die Trefferwahrscheinlichkeit experimentell mit ziemlicher Sicherheit bestimmen: Die relative Häufigkeit ist eine *konsistente* Schätzung von p.

Bernoulli geht in seinem Beweis von einem Zufallsexperiment mit lauter gleichmöglichen Fällen aus und formuliert diesen Satz so: «Es möge sich die Zahl der günstigen Fälle zu der Zahl der ungünstigen Fälle genau oder näherungsweise wie r/s, also zur Zahl aller Fälle wie r/(r+s) = r/t – wenn r+s = t gesetzt wird – verhalten, welches letztere Verhältnis zwischen den Grenzen (r+1)/t und (r–1)/t enthalten ist. Nun können, wie zu beweisen ist, so viele Beobachtungen gemacht werden, dass es beliebig oft (z.B. c-mal) wahrscheinlicher ist, dass das Verhältnis der günstigen zu allen angestellten Beobachtungen innerhalb dieser Grenzen liegt als ausserhalb derselben [...].» – Es ist dieser Satz, den er exakt beweist. Wir würden nun etwa sagen, dass die relative Häufigkeit h «in Wahrscheinlichkeit» gegen p konvergiert; in seiner Terminologie heisst dies, dass wir «moralisch sicher» sein können, dass h nicht stark von p abweicht, wenn n genügend gross ist. – Er zeigt also, dass h bei genügend grossem n in ein kleines Intervall um das gegebene p fällt; er sucht jedoch nicht umgekehrt auch ein Vertrauensintervall für ein unbekanntes p, wenn h gegeben ist (A. Hald [5], I. Schneider [6]).

«Anwendung der vorhergehenden Lehre auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse»

Dies ist der volle Titel des vierten Teils der *Ars Conjectandi,* und unter diesem Titel finden wir auch das Gesetz der grossen Zahl. Jakob Bernoulli bemerkt dazu in seinem Tagebuch *(Meditationes,* Artikel 151a [7]): «Diese Entdeckung gilt mir mehr, als wenn ich gar die Quadratur des Kreises geliefert hätte; denn wenn diese auch gänzlich gefunden würde, so wäre sie doch wenig nütz.» Sein Stolz war berechtigt: Er wusste um die Wichtigkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in unserem Leben, in welchem es ja so oft ums Vermuten, ums Mutmassen geht. Nun wollte er, wie es der Titel des vierten Teiles zeigt, den Anwendungen nachgehen. Das Gesetz der grossen Zahl hätte ihm dazu die Grundlage geboten. Doch bei seinem Tode (1705) hinterliess er das Werk unvollendet, ohne diese Anwendungen. Und unvollendet ist es schliesslich postum 1713 erschienen. Warum? «Ein schwerwiegender Punkt ist sicher der, dass Jakob von seinen Anwendungsbeispielen nicht befriedigt war. Diese paar Probleme konnten nicht zeigen, welch wirksames Werkzeug des menschlichen Geistes hinter seiner neuen Entdeckung verborgen lag. So suchte er zäh nach durchschlagenden Beispielen. Denken wir nur daran, wie hartnäckig er Leibniz gebeten hat, ihm die Arbeit de Witts über Leibrenten zukommen zu lassen» (K. Kohli [8]).

Zu den wichtigsten Anwendungen, die er im vierten Teil wohl ausführlich behandeln wollte, gehört die Schätzung von Sterbenswahrscheinlichkeiten und Lebenserwartungen. Bereits in den *Meditationes* ([7], Art. 77) schneidet er dieses Problem an. Es geht dabei um einen komplizierten, sehr phantasievollen Ehevertrag, dessen Einzelheiten hier nicht dargelegt werden können. Weil ein allfälliges Erbe von Seiten der Väter der Eheleute bei der Regelung der Verteilung berücksichtigt werden soll, benötigt Jakob Bernoulli für seine Lösung u.a. die Wahrscheinlichkeiten, dass die vor dem Mann sterbende Ehefrau vor den beiden betagten Vätern der Eheleute stirbt, dass sie nach einem der Väter stirbt, dass sie erst stirbt, nachdem beide Väter tot sind. – Wesentlich ist dabei:

(1) Jakob versucht zuerst auf mehrere Arten, das ihm vertraute Glücksspielmodell unter ganz verschiedenen Hypothesen anzuwenden. Zum Beispiel stellt er sich fünf gleichmögliche Fälle von Krankheiten vor, von denen jeder von jeweils zwei solchen Fällen für je einen der beiden Väter tödlich sein soll und nur einer davon für die Frau. Unter dieser Annahme besteht nach Jakob eine Wahrscheinlichkeit von 1/5, dass die Frau als erste stirbt, von $(4 \cdot 1/3 + 1 \cdot 0) : 5 = 4/15$, dass sie als Zweite stirbt, und von 8/15, dass sie als Letzte stirbt ([6] Anm. 19). – Bernoulli schreibt hier noch z.B. 4/15 *certitudinis*, also 4/15 «der Sicherheit», analog (1/5)c., (8/15)c.

(2) Jakob hat einige derartige Modelle unter ganz verschiedenen Hypothesen sehr geschickt durchgerechnet, aber er ist davon nicht befriedigt und stellt fest: Es ist hier eben nicht so wie beim Karten- und beim Würfelspiel, wo wir genau die Anzahl der mit gleicher Leichtigkeit eintretenden Fälle bestimmen, die zu Gewinn oder Verlust führen, und so die Erwartung «genau und wissenschaftlich» berechnen können. «Die sicherste Art, die Wahrscheinlichkeit zu schätzen, ist in jenen Fällen nicht *a priori*, also durch Gründe, sondern *a posteriori*, nämlich aus dem häufig beobachteten Ergebnis in ähnlichen Beispielen».

Die Bestimmung des «Erwartungswertes eines Ehevertrages», von der wir hier einiges mitgeteilt haben, ist nicht das einzige Problem von Jakob Bernoulli, das in die Nähe der Versicherungsmathematik gehört. Er hat sich weiter zum Beispiel mit dem «Schiffbruchproblem» (*Meditationes* [7], Art. 77b) beschäftigt: Da wird einem Kaufmann gemeldet, dass drei Schiffe ausgefahren sind, von denen eines 100 Kisten an Bord hat, von denen vier dem Kaufmann gehören. Die vier Kisten A,B,C,D enthalten Waren im Werte von 1200, 2000, 2400 und 1700 Gulden. Später erfährt er, dass eines von den drei Schiffen in einem Schiff-

bruch untergegangen ist, wobei nur 20 Kisten den Fluten entrissen worden sind. Der Kaufmann will die Hoffnung *(spes)*, die ihm noch geblieben ist, lieber einem anderen verkaufen, als noch länger zwischen Furcht und Hoffnung hin- und hergerissen werden. Die Hoffnung auf Kiste A, also der Erwartungswert, ist offenbar [2/3 + (1/3) · (1/5)] · 1200 = (11/15) · 1200 und analog für die anderen drei Kisten. Der Gesamtwert der Hoffnung beträgt somit (11/15)·7300 Gulden. (Diese einfache Lösung findet man erst bei Niklaus I Bernoulli; Jakob hat anscheinend nicht daran gedacht.)
Auch Absterbeordnungen haben ihn interessiert. So erwähnt er 1686 die von J. Graunt (1620–1674) zum Teil beobachteten, zum Teil aber bloss berechneten Daten über das Absterben (1662), auf die wir bei seinem Neffen Niklaus I Bernoulli zurückkommen müssen. – Wie schade, dass ihm die einschlägigen Untersuchungen von J. de Witt oder von J. Hudde nicht zur Verfügung standen – oder gar jene von Caspar Neumann, die die Basis von Halleys Arbeit über die Leibrenten darstellen!

* * * * *

Die Familie Bernoulli gehört zu den wenigen Familien, die über Generationen hinweg bedeutende Persönlichkeiten hervorgebracht haben. Sie stammt aus Holland. In der zweiten Hälfte des 16. Jh. musste sie infolge ihres protestantischen Glaubens fliehen und gelangte schliesslich nach Basel. Niklaus Bernoulli, der Sohn des ersten in Basel ansässig gewordenen Bernoulli, ist der Stammvater des «Mathematikerzweiges» der Bernoulli. Sein Sohn Jakob I Bernoulli (geb. in Basel 1654, gest. in Basel 1705) ist nicht nur der erste Gelehrte in der Familie Bernoulli, sondern wohl auch der erste wirklich berühmte Schweizer Mathematiker. Auf Wunsch seines Vaters widmete er sich dem Studium der Theologie, das er 1676 abschloss. Daneben beschäftigte er sich aber intensiv mit Mathematik und Astronomie. Auf zwei Auslandreisen lernte er führende Mathematiker und Naturforscher kennen und begann autodidaktisch die moderne Mathematik zu studieren. Von 1682 an war er wieder in Basel und widmete sich fortan ganz der Mathematik. Er führte seinen Bruder Johann I Bernoulli in die Mathematik ein; später behandelten die beiden Brüder zahlreiche mathematische Probleme gemeinsam. Sie haben beide vor allem auch dadurch zur Entwicklung der Mathematik beigetragen, dass sie die von Leibniz vertretenen Gedanken zur Infinitesimalrechnung aufnahmen und durch viele bedeutsame Entdeckungen sehr wesentlich bereicherten. Zu Jakob Bernoullis wichtigsten Leistungen gehören weiter die Begründung und Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars Conjectandi), zahlreiche Arbeiten zur Analysis und über spezielle Kurven, dann auch die Begründung der Variationsrechnung. 1687 wurde er Mathematikprofessor an der Universität Basel, und von jenem Jahre an war der mathematische Lehrstuhl in Basel während mehr als hundert Jahren stets von einem Bernoulli besetzt.

R. Ineichen

Bibliographie

[1] SAXER, W., Beziehungen zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematisch-Phys. Semesterberichte V, 1956

[2] HUYGENS, CHR., De Ratiociniis in Ludo Aleae. In: Frans van Schooten, Exercitationum mathematicarum libri quinque, Liber V. Leiden: Ex Officina Johannis Elsevirii 1657, Deutsche Übersetzung in Bernoulli, J. (1899); lat. Text in Bernoulli, J. (1975)

[3] BERNOULLI, J., Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars Conjectandi) 1713, übersetzt von R. Haussner, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 107, 108, Akademische Verlagsanstalt, Leipzig 1899
BERNOULLI, J., Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3. Bearbeitet von B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel 1975

[4] INEICHEN, R., Zufall und Wahrscheinlichkeit – einst ganz getrennt, jetzt eng verbunden, Elemente der Mathematik 54, 1999

[5] HALD, A., A History of Probability and Statistics – and their Applications before 1750, Wiley, New York 1989

[6] SCHNEIDER, I., Die Mathematisierung der Vorhersage künftiger Ereignisse in der Wahrscheinlichkeitstheorie vom 17. bis zum 19. Jahrhundert. Berichte zur Wissenschaftsgeschichte 2, 1979

[7] BERNOULLI, J., Meditationes und Kommentare dazu in Bernoulli, J. (1975).

[8] KOHLI, K., Zur Publikationsgeschichte der Ars Conjectandi. In: Bernoulli, J. (1975).

«... his attitude is pragmatic, like that of a modern statistician.»

Niklaus I Bernoulli (1687–1759)

Jahrelang mehr Knabengeburten als Mädchengeburten?

«... seine Einstellung ist pragmatisch, wie die eines modernen Statistikers.» Mit diesen Worten charakterisiert A. Hald [1] die Einstellung von Niklaus I Bernoulli bei dessen Untersuchung einer Behauptung, die der englische Mathematiker und Arzt John Arbuthnot (1667–1753) 1710 in der Royal Society in London vorgetragen hatte: In den Registern der getauften Neugeborenen in London seien für die 82 Jahre 1629–1710 Jahr für Jahr mehr männliche als weibliche Geburten verzeichnet. Dabei sei aber die Wahrscheinlichkeit, – er spricht vom *Lot* (also vom «Los») eines Wettenden oder von der *Value of his Expectation* – dass dies 82-mal hintereinander infolge *Chance* (Zufall) geschehe, äusserst klein, nämlich $(1/2)^{82}$. Und daraus folge nun, *that it is Art not Chance, that governs*. Und so trägt denn seine zugehörige Publikation in den *Philosophical Transactions* (1710) auch den Titel *An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observed in the Births of both Sexes*.

Schon 1712 verfasste der holländische Mathematiker W.J.'s Gravesande (1688–1742) eine Verbesserung der Argumentation von Arbuthnot: Er geht wie Arbuthnot immer noch von p=1/2 für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt aus, arbeitet nun aber mit fiktiven Zahlen in einem Modell. Auch für 's Gravesande handelte es sich gleichzeitig um eine *Démonstration du soin que Dieu prend de diriger ce qui se passe dans le monde*.

In ganz anderer Art wendet sich nun Niklaus Bernoulli dem Problem von Arbuthnot zu. Er will dabei, wie er ausdrücklich feststellt, nicht etwa gegen die Vorsehung – *la Providencve de Dieu* – kämpfen; die theologische Seite der ganzen Angelegenheit scheint ihn jedoch nicht sonderlich zu interessieren. Bemerkenswert ist nun sein pragmatisches, modernes Vorgehen: Er bestimmt erstens aus den Zahlen von Arbuthnot einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, benützt also dafür nicht einfach den Wert ½; zweitens arbeitet er ein Modell aus, und drittens beschafft er sich auch noch das notwendige Werkzeug für die Arbeit mit der Binomialverteilung, nämlich eine Verschärfung gewisser Ungleichungen, die er bei Jakob Bernoulli gefunden hat. Aus den Daten von Arbuthnot berechnet er nun zunächst für jedes Jahr die relative Häufigkeit der Knabengeburten und bestimmt

DISSERTATIO INAUGURALIS
MATHEMATICO-JURIDICA

DE

USU ARTIS CONJECTANDI IN JURE,

Quam

DIVINA JUVANTE GRATIA

Auctoritate & Juſſu

Magnifici & Ampliſſimi JCtorum Ordinis in Academia Patria

pro

GRADU DOCTORATUS

In Utroque Jure legitime conſequendo

Ad Diem Junii A. C. MDCCIX.

L. H. Q. S.

Publice defendet

M. NICOLAUS BERNOULLI,

Baſilienſis.

)o(

BASILEÆ,

Typis JOHANNIS CONRADI à MECHEL.

Niklaus I Bernoulli
1687–1759
Titelblatt seiner Dissertation
«De Usu Artis Conjectandi
in Jure» von 1709

damit für eine fiktive Anzahl von total 14 000 Geburten pro Jahr für jedes der 82 Jahre die zugehörige fiktive Anzahl von Knabengeburten. Er erhält so auch eine fiktive Minimalzahl (7037), eine fiktive Maximalzahl (7507) und schliesslich die entsprechende mittlere Anzahl (7237) von Knabengeburten pro Jahr. Damit gewinnt er einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt: 7237/14 000 = 0,5169. Seine weiteren Rechnungen aufgrund der Binomialverteilung und der erwähnten Verschärfungen führen ihn dann zu folgendem Ergebnis:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl X der Knabengeburten eines Jahres zwischen 7237 – 200 und 7237 + 200 liegt, ist bestimmt durch

$$P(7037 \leq X \leq 7437) > 303/304 = 0{,}9967.$$

Auf die vier Werte, die in seinem Modell ausserhalb dieses Intervalls liegen, geht er allerdings trotz dieser grossen Wahrscheinlichkeit nicht ein. Er berechnet weiter $(303/304)^{100} = 0{,}7193$. Diese Wahrscheinlichkeit scheint ihm so gross zu sein, dass er feststellt: *Non est miraculum ...* – «Es ist kein Wunder, dass die Zahl der Knabengeburten während 82 Jahren diese Grenzen nicht überschreitet.» Die Überlegungen von Niklaus, die wir hier zusammenfassend dargestellt haben, kann man seinem Briefwechsel mit W.J. 's Gravesande aus dem Jahre 1712 entnehmen. In den Briefen an P.R. de Montmort (1678–1719) arbeitet Niklaus Bernoulli mit einem leicht veränderten Modell: *[...] en prenant un milieu, la raison des mâles aux femelles est fort près de 18/17.* Auch aus diesem Modell werden ähnliche Folgerungen gezogen; einige davon gehen über jene hinaus, die aus dem ersten Modell gezogen worden sind [1];[2].

Wie A. Hald ausführlich darlegt, sind beide Modelle vom heutigen Standpunkt aus nicht mehr befriedigend. Es ist jedoch das Prinzipielle am Vorgehen von Niklaus, das dem heutigen Statistiker trotzdem gefällt: die Modellbildung, die Bestimmung eines Schätzwertes für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, also für den Parameter p der Binomialverteilung, weiter die Schaffung eines geeigneten Werkzeugs – Hald nennt es das «Theorem von Niklaus Bernoulli» – für die Arbeit mit der Binomialverteilung [1];[2].

Die Mutmassungskunst bei Rechtsfragen

Den hier skizzierten Überlegungen von Niklaus ist eine andere Arbeit vorausgegangen, nämlich seine Doktorarbeit von 1709, *De Usu Artis Conjectandi in Jure* – «Über den Gebrauch der Mutmassungskunst in Fragen des Rechts» [3]. K. Kohli hat zu dieser Dissertation von Niklaus Bernoulli einen vorzüglichen und sehr hilfreichen Kommentar geschrieben [4]. «Der geistige Vater dieses Werkes», schreibt K. Kohli, «ist eindeutig Jakob [Bernoulli]. Ganze Abschnitte sowohl aus dem Tagebuch als auch aus der *Ars Conjectandi* hat Niklaus wörtlich übernommen. An anderen Stellen werden Fragestellungen und blosse Andeutungen Jakobs aufgegriffen und weiterverarbeitet. Die [...] Arbeit enthält glänzende Untersuchungen und zeugt oft von klaren Vorstellungen über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Fragen des Alltags, sie ist aber noch nicht das reife Werk, das wir dem Niklaus zutrauen würden, den wir aus seinen Briefen an Montmort und de Moivre aus dem zweiten Jahrzehnt des 18. Jahrhunderts kennen.» – Wir wollen nun auf zwei für uns hier besonders wichtige Themen dieser Arbeit kurz eingehen: Lebenserwartung, Kauf von Leibrenten.

Lebenserwartung

Niklaus geht von der 1662 publizierten Absterbeordnung von John Graunt (London, 1620–1674) aus, wonach von 100 Neugeborenen nach 6 Jahren noch 64 leben, nach 16 Jahren noch 40, nach 26 Jahren noch 25, nach jeweils weiteren zehn Jahren noch 16, 10, 6, 3, 1, 0. Niklaus bestimmt nun die mittlere künftige Lebenserwartung eines Neugeborenen: Die Anzahl dieser Jahre beträgt

$$(36 \cdot 3 + 24 \cdot 11 + 15 \cdot 21 + 9 \cdot 31 + 6 \cdot 41 + 4 \cdot 51 + 3 \cdot 61 + 2 \cdot 71 + 1 \cdot 81) : 100 = 18\ 11/50.$$

Der Term $36 \cdot 3$ ergibt sich aus den 36 Todesfällen von Kindern in den ersten sechs Jahren, wobei angenommen wird, dass diese im Mittel 3 Jahre gelebt haben; bei den 24 Todesfällen in den nächsten zehn Jahren wird ein mittleres Alter von $6 + 5 = 11$ Jahren angenommen usw.

Für einen z.B. 46 Jahre alten Menschen findet man dann analog eine mittlere künftige Lebenserwartung von 15 Jahren, da $(4 \cdot 5 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 35) : 10 = 15$.

Dabei entsteht z.B. der Term $3 \cdot 15$ durch die drei Todesfälle zwischen 56 und 66, jeder im Mittel 10+5 Jahre nach dem 46. Altersjahr usw.

Niklaus spricht in diesem Zusammenhang noch nicht von «mittlerer Lebenserwartung», sondern einfach von *expectatio,* also von «Erwartung» (daneben z.B. auch vom «mittleren Alter» oder vom «wahrscheinlichsten Alter»). Für die Berechnung dieser *expectatio* formuliert er in Anlehnung an die Abhandlung *De Ratiociniis in Ludo Aleae* von Christiaan Huygens (1657) die Regel: «Man multipliziere die möglichen Ergebnisse mit den Anzahlen der Fälle in denen sie auftreten und teile die Summe aller dieser Produkte durch die Gesamtzahl der Fälle.»

Niklaus fragt nun weiter nach der mittleren Lebenserwartung desjenigen von zwei, drei oder mehreren Menschen, der am längsten lebt. Seine bemerkenswerten und wohl völlig neuen Untersuchungen, bei welchen er auch die Integralrechnung einsetzt, können nicht in Kürze wiedergegeben werden. Sie führen ihn zu folgendem Resultat: Ist ein Zeitraum von a Jahren gegeben, innerhalb welchem b Menschen sterben, und sterben die Einzelnen in jedem Augenblick gleich leicht *(aequali facilitate),* so ist die Lebenserwartung des am längsten Lebenden gegeben durch ab: (b+1). – Das heisst also, wenn es sich nur um eine Person handelt, durch (1/2)a, bei zwei Personen durch (2/3)a, bei drei durch (3/4)a usw.
Mit diesem Ergebnis kann Niklaus nun zum Beispiel die künftige Lebenserwartung des Überlebenden von zwei neugeborenen Kindern bestimmen. Er betrachtet dazu zwei Gesamtheiten von je 100 Neugeborenen und arbeitet wieder mit der oben gegebenen Absterbeordnung von John Graunt. Die künftige Lebenserwartung des Überlebenden beträgt 27 4119/5000 Jahre. Wir illustrieren die etwas langwierige Rechnung, die zu diesem Resultat führt, durch die folgenden Angaben:

$$(36\cdot 36\cdot 4 + 2\cdot 36\cdot 24\cdot 11 + 24\cdot 24\cdot 12\tfrac{2}{3} + 2\cdot 60\cdot 15\cdot 21 + 15\cdot 15\cdot 22\tfrac{2}{3} + \ldots +$$
$$1\cdot 1\cdot 82\tfrac{2}{3}) : 100^2$$

Die hier auftretenden Produkte zeigen uns die Überlegungen von Niklaus. 36 · 36 · 4: Es sind 36 · 36 Fälle denkbar, wo beide Personen in den ersten sechs Jahren sterben; die länger lebende Person im Mittel also nach (⅔)a Jahren, für a = 6 also im Mittel nach 4 Jahren. – 2 · 36 · 24 · 11: Es sind 2 · 36 · 24 Fälle denkbar, wo eine der beiden Personen in den ersten sechs Jahren, die andere dann zwischen sechs und sechzehn stirbt; die länger lebende Person also im Mittel nach 6 + (1/2)a Jahren, für a=10 also im Mittel nach 11 Jahren. – 24 · 24 · 12 2/3: Es sind 24 · 24 Fälle denkbar, wo beide zwischen sechs und sechzehn sterben, die länger lebende Person also im Mittel nach 6 + (2/3)a Jahren, für a = 10 also im Mittel nach 12 2/3 Jahren. Die anderen Produkte werden analog berechnet. – Die Summe wird dann dividiert durch die Anzahl aller Möglichkeiten, also durch 100 · 100.

Niklaus ist von der linearen Interpolation der Zahlen der Graunt'schen Absterbeordnung nicht befriedigt. Er hat auch nicht gewusst, dass die Tafeln von Graunt mehr auf Überlegungen als auf wirklichen Beobachtungen beruhen. Ein Freund vermittelte ihm wirkliche Beobachtungen an 2000 Personen «aus einer berühmten Schweizer Stadt». Er berechnet damit die Lebenserwartungen für verschiedene Altersklassen, die nun wesentlich von jenen abweichen, die er nach der Tafel von Graunt erhalten hat, und er sucht nach Erklärungen. «Aus den publizierten Zahlen lässt sich aber rückwärts eine Absterbeordnung näherungsweise rekonstruieren. Ergo kommt ihm das Verdienst zu, Angaben für eine erste schweizerische Sterbetafel geliefert zu haben» [5].

Ankauf von Leibrenten

In seinen Untersuchungen über den «Kauf von Hoffnungen» behandelt er speziell auch den Kauf von Leibrenten *(emtio* [emptio] *redituum vitalium),* also die Barwertberechnung bei einer Leibrente. Er kommt zum Schluss: Wenn eine Person innerhalb der nächsten zehn Jahre sicher sterben wird, und zwar in jedem Jahre gleich leicht, so ist der gerechte Preis einer nachschüssigen Leibrente gleich dem arithmetischen Mittel der Zeitrenten für 1, 2, 3, ... ,9, 10 Jahre. (K. Kohli [4] macht hier auf einen Überlegungsfehler von Niklaus aufmerksam: Wenn eine Person in den ersten zehn Jahren stirbt, so muss die 10. Rente nicht mehr bezahlt werden.) Niklaus entwickelt nun zuerst eine Tabelle, welche bei einem Zinsfuss von 5% die Preise für Zeitrenten *(pretia redituum temporalium)* vom 1. bis zum 100. Jahre enthält. Mit Hilfe dieser Tafel der Barwertfaktoren nachschüssiger Renten berechnet er anschliessend den Preis der Leibrenten mit dem jährlichen Ertrag 1 für die verschiedenen Altersklassen. Er gibt ein Beispiel für die Durchführung der Rechnung im Falle eines 16-Jährigen:

$$(15 \cdot 4{,}558 + 9 \cdot 10{,}519 + 6 \cdot 14{,}179 + 4 \cdot 16{,}427 + 3 \cdot 17{,}806 + 2 \cdot 18{,}653 + 1 \cdot 19{,}173) : 40 = 10{,}593.$$

Das Produkt $15 \cdot 4{,}558$ kommt so zustande: 15 sterben nach Graunt in den nächsten 10 Jahren; 4,558 ist das arithmetische Mittel der Zeitrenten für die ersten 10 Jahre. (Man beachte den oben mitgeteilten Überlegungsfehler.) Analoges gilt für die anderen Produkte. 40 ist die Anzahl Personen, die gemäss der Absterbeordnung von Graunt nach sechzehn Jahren noch leben.

Einige weitere Probleme

Niklaus behandelt in seiner Dissertation noch zahlreiche weitere Probleme, teils kurz, teils recht ausführlich. So z.B. Lebensversicherungen, Versicherungen des Risikos im Seehandel, das Schiffbruchproblem, das wir schon bei Jakob I antreffen, dann Fragen des Erbrechts, Wetten, Lotterien und auch Spiele.

* * * * *

Niklaus I Bernoulli (geb. 10.10.1687 in Basel, gest. 29.11.1759 in Basel) ist der Sohn des Kunstmalers Niklaus Bernoulli, Mitglied des Rates, und somit ein Neffe von Jakob I Bernoulli und von Johann I Bernoulli. Die Mathematik hat er bei seinen berühmten Onkeln gelernt und sich auch stark für deren Themen interessiert. 1705

hat er seinen Onkel Johann in Groningen besucht; mit ihm ist er dann nach Basel zurückgekehrt. 1709 hat er seine juristischen Studien abgeschlossen und mit der oben genannten Arbeit, die als Dissertatio inauguralis mathematico-juridica bezeichnet worden ist, doktoriert. 1713 hat er postum die Ars Conjectandi seines Onkels Jakob herausgegeben. Er hat sich ferner auch mit Problemen der Analysis beschäftigt. – Viele seiner Resultate sind in seiner reichen Korrespondenz verborgen. Ein wichtiger Teil seines Briefwechsels mit P.R. de Montmort befindet sich in dessen Essai d'-Analyse sur les jeux de hazard von 1713. Mit Montmort hat er auch über strategische Spiele korrespondiert, also über Spiele, in welchen nicht nur der Zufall, sondern auch das Verhalten (die Strategie) der Spieler berücksichtigt werden muss: Die blosse Wahrscheinlichkeitsrechnung genügt dann nicht mehr; es braucht besondere spieltheoretische Methoden [6]. Derartige Probleme sind erst 1928, also sehr viel später, durch J. von Neumann wieder aufgegriffen worden.
1716–1719 war Niklaus Professor der Mathematik in Padua; 1722 ist er Professor der Logik in Basel geworden, und 1731 hat er in Basel einen juristischen Lehrstuhl erhalten.

R. Ineichen

Bibliographie

[1] Hald, A, A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750, Wiley, New York 1989

[2] Ineichen, R., Aus der Vorgeschichte der Mathematischen Statistik, Elemente der Mathematik 47, 1992

[3] Bernoulli, N., De Usu Artis Conjectandi in Jure (1709). In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3; bearbeitet von B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel 1975

[4] Kohli, K., Kommentar zur Dissertation von Niklaus Bernoulli: De Usu Artis Conjectandi in Jure. In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3; bearbeitet von B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel 1975

[5] Kupper, J., Versicherungsmathematik und schweizerische Hochschulen, Mitteilungen SAV 1/1998

[6] Henny, J., Niklaus und Johann Bernoullis Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrem Briefwechsel mit Pierre Rémond de Montmort. In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3; bearbeitet von B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel 1975

«Grundlegende Beiträge zur Lebensversicherungsmathematik»

Leonhard Euler (1707–1783)

«Während in vielen Wissenszweigen mit Stolz auf die Beiträge Eulers hingewiesen wird, hat man in Versicherungskreisen manchmal das Gefühl, man schäme sich fast der Tatsache, dass der geniale Basler auch hier grundlegende Beiträge geleistet hat, vor allem was den Aufbau der Theorie der Lebensversicherungsmathematik anbelangt» [1]. – Zu diesen theoretischen Grundlagen der Lebensversicherung zählt man in der Regel vier Arbeiten von Euler. L.G. Du Pasquier hat sie im siebten Band der *Opera omnia* 1923 zusammen mit Eulers Beiträgen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, zur Fehlertheorie und zur mathematischen Statistik bearbeitet, einlässlich kommentiert und herausgegeben [2]. Er hat von ihnen auch ausführliche, wiederum kommentierte Inhaltsangaben publiziert [3]; [4]; kürzere Übersichten sind u.a. 1957 von T. Sofonea [5] und 1984 von H. Loeffel [6] gegeben worden. Im Folgenden soll versucht werden, die vier Arbeiten Eulers zu skizzieren.

«Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain»

Euler zieht es vor, diese beiden Probleme in der allgemeinsten Form zu behandeln, ohne sofort auf konkrete Geburts- oder Todesregister Bezug zu nehmen. Für die Behandlung der Sterblichkeit geht er von N Neugeborenen aus; mit (1)N, (2)N, ..., (n)N bezeichnet er die Anzahl der Überlebenden am Ende des ersten, zweiten, ..., n-ten Jahres, also unsere Folge der l_x, $x = 0, 1, 2, \ldots, \omega$. Somit stellen die Symbole (1), (2), ..., (n) die Wahrscheinlichkeit der Neugeborenen dar, nach 1, 2, ..., n Jahren am Leben zu sein, was wir heute mit $p_0, {}_2p_0, {}_3p_0, \ldots, {}_np_0$ bezeichnen; die Gesamtheit der so dargestellten Zahlen bildet nach Euler die «Sterblichkeitshypothese». Anschliessend werden fundamentale Aufgaben gelöst, die inzwischen klassisch geworden sind; sie führen zu denselben Lösungen wie die heutigen Berechnungen. Wir beschränken uns auf einige Beispiele:

Wie viele von M gleichaltrigen, m-jährigen Personen werden nach n Jahren noch am Leben sein? Mit den Klammersymbolen von Euler sind es M · (m+n)/(m) Personen; modern geschrieben $l_{m+n} = l_m \cdot {}_np_m$
Weiter wird z.B. die Wahrscheinlichkeit angegeben (wieder mit den Klammersymbolen), dass eine m-jährige Person noch n Jahre leben wird und dann im darauf folgenden Jahr stirbt: [(n)–(n+1)] : (m), also ${}_np_m \cdot q_{m+n}$
Als «wahrscheinliche Lebensdauer» einer m-jährigen Person gilt die Frist bis zu jenem Zeitpunkt, da die ursprüngliche Anzahl der m-Jährigen auf die Hälfte gesunken sein wird.

Leonhard Euler
1707–1783

Es wird u.a. auch der Betrag einer nachschüssigen Leibrente berechnet, die gerechterweise als Entgelt für die Bareinlage a einer Person im Alter von m Jahren zu zahlen ist. Euler geht dazu von einer Gruppe von M Personen aus und nimmt an, dass jede der M Personen den Betrag x bis zu ihrem Tode erhält; den Aufzinsungsfaktor bezeichnet er mit λ. Mit den oben definierten Klammersymbolen führt dies auf die folgende Gleichung für x:

$$a = \frac{x}{(m)} \left\{ \frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \cdots \right\}$$

«Alle diese Fragen», schreibt Euler, «sind leicht zu lösen, sobald die Werte der Brüche (1), (2), (3), ... bekannt sind. Diese Werte variieren mit dem Klima und der Lebensweise; es wurde sogar festgestellt, dass sie für beide Geschlechter verschieden sind und daher kann allgemein nichts Bestimmtes gesagt werden.» Dann bringt er eine Sterblichkeitstafel; den eben erwähnten Brüchen legt er Werte zugrunde, die er den Beobachtungen des holländischen Statistikers Willem Kersseboom (1691–1761) entnimmt.

Im zweiten Teil seiner Abhandlung untersucht Euler nun das Bevölkerungswachstum. Er weiss, dass die demographischen Erscheinungen sehr verwickelt sind. Um eine einfache Grundlage zu erhalten, macht er folgende drei Annahmen:

- Die betrachtete Bevölkerung bildet eine abgeschlossene Gesamtheit; es gibt also keine Auswanderungen, keine Einwanderungen.
- Das Sterblichkeitsgesetz ist unveränderlich im Laufe der Jahre.
- Es besteht eine direkte Proportionalität zwischen der Gesamtzahl der Lebenden und der jährlichen Geburtenzahl.

Nach der Behandlung einiger vorbereitender Aufgaben zeigt er, wie aus seinen Annahmen nun unmittelbar eine Sterblichkeitstafel entwickelt werden kann, sobald die Ergebnisse einer Volkszählung und die Liste der Toten des auf die Volkszählung folgenden Jahres vorliegen. Allerdings liegt der Berechnungsmethode die Annahme zugrunde, dass die Veränderungen der Einwohnerzahl eine geometrische Folge bilden, was jedoch den Beobachtungen nicht entspricht (vgl. L.G. Du Pasquier [3], [4]).

«Sur les rentes viagères»

Diese Arbeit über die Leibrenten wird von Euler als Fortsetzung der eben besprochenen Abhandlung bezeichnet. Er weist zuerst auf die zwei Rechnungsgrundlagen hin, die hier von besonderer Bedeutung sind, nämlich auf die Sterblichkeitstafel und den Zinsfuss. Bezüglich der Sterblichkeitstafel stellt er fest, *«qu'on a raison de considérer les rentiers comme une espèce plus robuste»:* Wer schwächlich ist oder auch nur glaubt, er werde nicht sehr lange leben, wird ja in der Regel keine Leibrente kaufen. Was den Zinsfuss anbelangt, empfiehlt Euler dem Versicherer, die beste Anlagemöglichkeit zu wählen, sonst «wird er nur eine mittelmässige Rente anbieten können, die niemand erwerben will». Für seine Berechnungen wählt er einen Zinsfuss von 5%. Sein Gedankengang zur Berechnung des Wertes einer Leibrente beruht auf drei inzwischen ebenfalls klassisch gewordenen Prinzipien. Er nimmt an:

- dass sich nicht eine einzelne Person, sondern eine fingierte Gesellschaft von gleichaltrigen Personen versichert;
- dass die Summe der Leistungen der einzelnen Personen barwertmässig gleich der Summe der zukünftigen Leistungen des Versicherers sein muss;
- dass der Barwert der beiden Leistungen auf den gleichen Zeitpunkt hin berechnet wird.

Er kommt dabei auch dem Begriff der «diskontierten Zahl der Lebenden» recht nahe. Die Erkenntnis der Wichtigkeit solcher Kommutationszahlen und die Einführung von entsprechenden speziellen Bezeichnungen geht indessen auf die englische Schule zurück, auf unserem Kontinent auf den Dänen J.-N. Tetens (1763–1807), der 1785 eine «Anleitung zur Berechnung von Leibrenten und Anwartschaften» veröffentlicht hat [3].

Euler bemerkt weiter, dass die so berechnete Nettoprämie nicht ausreichend ist. Sie muss erhöht werden, um die Verwaltungskosten und um die *«dépenses particulières qu'un tel établissement exige»* zu decken, aber auch um eine Schwankungsreserve zu haben für die *«oscillations plus ou moins considérables que l'institution doit être en état de supporter»*.

Er wendet sich dann noch der aufgeschobenen Leibrente zu, «deren Ankaufspreis viel geringer zu stehen kommt, welche also beim Publikum viel mehr Anklang finden könnte; ich meine solche Leibrenten, deren Bezug erst nach Ablauf von 10 oder gar von 20 Jahren beginnt». Er beweist anschliessend die Formel, welche es gestattet, für ein beliebiges Alter m eine solche n Jahre aufgeschobene Leibrente zu berechnen, und gibt auch hier – wie an vielen anderen Stellen – wieder einige Kunstgriffe an, durch die man sich die Rechnung erleichtern kann. Dann berechnet er zwei Tabellen, um den Barwert einer 10 bzw. 20 Jahre aufgeschobenen Rente zu finden, wenn im Zeitpunkt der einmaligen Einlage das Alter des Rentenbezügers 0, 5, 10, 15,..., 80 Jahre beträgt (wieder mit dem Zinsfuss von 5% und der Sterbetafel von W. Kersseboom). «Es wäre gewiss eine schöne Einrichtung, durch einmalige Zahlung von 3500 Gulden bei der Geburt eines Kindes, diesem eine feste, lebenslängliche Jahresrente von 1000 Gulden zu sichern, obgleich sie erst ausbezahlt würde, nachdem das Kind das Alter von 20 Jahren erreicht hätte», schreibt Euler in diesem Zusammenhang.

«Eclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts ...»

Diese «Aufklärungen über die öffentlichen Institute zugunsten sowohl der Witwen als der Verstorbenen, mit der Beschreibung einer neuen Art von Tontine, ebenso vorteilhaft für das Publikum als nützlich für den Staat» – französisch geschrieben – stellen das Hauptwerk Eulers auf dem Gebiete des Versicherungswesens dar. «Dieses äusserst interessante, in seinem dritten Teil sehr merkwürdige Werk bildet ein in sich abgeschlossenes Ganzes und ist auch für Leser, die nicht Fachleute sind, leicht verständlich, denn die Darstellungsweise zeichnet sich, wie ja auch sonst bei Euler, durch grösste Klarheit aus», schreibt G.L Du Pasquier [4].

Der erste Teil handelt von den Witwenrenten: Ein Ehemann, dessen Alter mit a bezeichnet werde, möchte seiner b-jährigen Frau eine Witwenrente von p Rubel sichern. Er will dafür sofort eine einmalige Summe x bezahlen und überdies noch jährlich die Prämie z bis zu seinem Tode. Von seinem Tode an soll seine Witwe bis an ihr Lebensende die Jahresrente p erhalten. Wenn der Mann seine Frau überlebt, so verfallen alle seine geleisteten Einzahlungen der Versicherung, und die Versicherung ist dem Witwer gegenüber zu keinen Leistungen verpflichtet.

Eulers Ansatz gestattet, mehrere Aufgaben in einer einzigen Formel zusammenzufassen – eine Vereinfachung, die er immer gerne anstrebt. Setzt man nämlich in seiner Formel nachträglich $z=0$, so zahlt der Mann einfach die Einmalprämie x für die Witwenrente, und x ist dann auch der Barwert dieser Rente. Setzt man hingegen $x = 0$, so wird mit der Lösungsformel der Wert der nachschüssigen Jahresprämie berechnet, die ein jetzt a-jähriger bis zu seinem Tode bezahlen muss, damit die jetzt b-jährige Frau nach dem Ableben des Mannes die Jahresrente p bis an ihr Lebensende erhält; für $x = z$ erhält man schliesslich die vorschüssige Jahresprämie.

Euler nimmt wiederum an, dass sich eine grosse Zahl von a-jährigen Ehemännern, deren Frauen alle b Jahre alt sind, an denselben Versicherer mit demselben Begehren wenden. Nun sind die beiden Grössen x und z so zu bestimmen, dass die gesamte Summe der zu erwartenden Einnahmen des Versicherers, jede einzelne auf den gegenwärtigen Zeitpunkt diskontiert, gleich ist der Summe aller Renten, welche der Versicherer voraussichtlich an die hinterbliebenen Witwen zu zahlen haben wird, selbstverständlich wieder jeder Betrag auf den gegenwärtigen Zeitpunkt diskontiert. Er legt dann mit grosser Klarheit dar, wie durch Anwendung dieses grundlegenden Äquivalenzprinzips die Zahlungen berechnet werden können, und zwar eben so, dass «das Versicherungsinstitut mit den Regeln der strengsten Gerechtigkeit in vollkommenem Einklang steht». Den Bedürfnissen der Praxis kommt Euler weitgehend entgegen: Er berechnet umfangreiche Tabellen, erläutert Kunstgriffe, die die Rechnung vereinfachen, und erteilt praktische Ratschläge.

Der zweite Teil dieses Hauptwerkes trägt den Titel *«Sur l'établissement d'une caisse pour les morts»*. Hier geht es um die Gründung von Sterbekassen. Euler erläutert die weit verbreiteten Hauptfehler bestehender Sterbekassen und zeigt, wie man vorzugehen hat, damit Leistung und Gegenleistung einander wirklich entsprechen. – Im dritten Teil, *«Plan d'une nouvelle espèce de Tontine, aussi favorable au Public qu'utile à l'Etat»*, stellt er dar, wie die gegen Ende des 17. Jh. durch den italienischen Arzt Lorenzo Tonti vorgeschlagenen Staatsanleihen – die «Tontinen» – mit denen grosse Nachteile verbunden sind, vernünftig umgestaltet werden könnten, um zu einer Institution zu kommen, die «beim Publikum einen grossen Anklang» finden und «für den Staat eine nie versiegende Quelle von Einkünften bilden» würde! Wir müssen hier auf die Arbeiten von L.G. Du Pasquier [4] verweisen.

In der lateinisch geschriebenen vierten Arbeit Eulers, die ebenfalls noch zur Versicherungsmathematik gehört, wird eine Rentenversicherung auf zwei Leben behandelt – als «Lösung einer Frage, die zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört». Sie ist vom Göttinger Mathematiker und Mathematikhistoriker A.G. Kästner (1719–1800) frei ins Deutsche übersetzt worden [7].

* * * * *

Leonhard Euler wurde 1707 in Basel geboren; seine Kindheit verbrachte er in der Nähe der Stadt Basel, in Riehen, wo sein Vater als Pfarrer tätig war. Von seinem Vater, der bei Jakob I Bernoulli (1654–1705) Mathematik studiert hatte, bekam er den ersten Mathematikunterricht. 1720 ist er an der philosophischen Fakultät der Universität Basel immatrikuliert worden, 1723 an der theologischen. Er hatte die Chance, bei Johann I Bernoulli (1667–1748), damals einer der grössten Mathematiker, ein mathematisches Privatissimum absolvieren zu dürfen. 1727 folgte er dessen Söhnen Daniel I und Nikolaus II nach Petersburg an die von Zar Peter I. 1724 gegründete Akademie, wo er 1731 Professor für Physik, 1733 für Mathematik wurde. 1741 nahm er eine Berufung an die Berliner Akademie an. Differenzen zwischen ihm und dem preussischen König Friedrich II. bewogen ihn, 1766 nach St. Petersburg zurückzukehren, bis zu seinem Tode (1783) weiterhin unermüdlich wissenschaftlich tätig, obwohl er kurz nach seiner Ankunft erblindet war. – Er hat in allen mathematischen Disziplinen gearbeitet und glänzende Resultate erzielt; er prägte die Mathematik des 18. Jh. Seine rein mathematischen Werke betreffen Zahlentheorie, Algebra, Grundlagen der Analysis, Infinitesimalrechnung, unendliche Reihen, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Geometrie, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitstheorie; er hat sich aber auch mit Mechanik und Hydromechanik, Astronomie, Ballistik, Schiffswesen und Musiktheorie beschäftigt. Seine Überlegungen hat er in zahlreichen Abhandlungen in den «Petersburger Kommentaren», den «Memoiren» der Berliner Akademie und in seiner Korrespondenz niedergelegt, vor allem aber auch in umfangreichen Lehrbüchern, die sich durch einen vorbildlichen, exemplarisch gewordenen Aufbau auszeichnen. – «Der produktivste Mathematiker der Menschheitsgeschichte [...] einer der grössten Gelehrten aller Zeiten» (E. A. Fellmann [8]).

R. Ineichen

Bibliographie

[1] Kupper, J., Versicherungsmathematik und schweizerische Hochschulen, Mitteilungen SAV 1/1998
[2] Leonhardi Euleri Opera omnia, series prima, vol. septimum. Edidit L.G. Du Pasquier, B.G. Teubner, Leipzig 1923
[3] Du Pasquier, L.G., Préface de l'éditeur. In: [2]
[4] Du Pasquier, L.G., Leonhard Eulers Verdienste um das Versicherungswesen, Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 54/1
– Les travaux de Léonard Euler concernant l'assurance, Mitteilungen VSVM 1910
[5] Sofonea, T., Leonhard Euler und seine Schriften über die Versicherung, Het Verzekerings-Archief 34, 1957
[6] Loeffel, H., Leonhard Euler – Zum 200.Todestag am 18. September 1983, Mitteilungen VSVM 1984.
[7] Kästner, A.G., Des Herrn Leonhard Eulers nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwenkasse (1770) In: [2]
[8] Fellmann, E.A., Leonhard Euler, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Hamburg 1995

«Über das Ende des Lebens»

Johannes Gessner (1709–1790)

Regeln darbieten, um die Wahrscheinlichkeiten des Lebens und des Sterbens abzuschätzen – *regulas aestimandi Vitae et Mortis probabilitates* –, will Johannes Gessner in seiner lateinisch[1] geschriebenen Abhandlung «Über das Ende des Lebens» – *De Termino Vitae* – von 1748 [1]. Doch es geht ihm nicht bloss um die Herleitung und die Formulierung von derartigen Regeln. Er versucht zunächst, Leben und Tod des Menschen zu umschreiben, skizziert dann als Naturwissenschaftler einlässlich die Fortpflanzung der Lebewesen, ihr Leben und Sterben und geht schliesslich auch noch den Gründen nach, die allenfalls zu einem früheren oder späteren Lebensende führen könnten. So liegt also mit der *Dissertatio physico-medico-mathematica de termino vitae* eine Darstellung vor, die den allgemein gehaltenen und vielerlei umfassenden Titel durchaus verdient.

Wir können hier allerdings nur den mathematisch-statistischen Ausführungen Gessners nachgehen. Er stellt nach seinen einleitenden Kapiteln fest, dass all das, was man von vornherein aus der Natur des Menschen herleiten kann, nicht genügt, um eine sorgfältige Bestimmung der Anzahl der Todesfälle in den verschiedenen Altersstufen durchzuführen oder um dabei die Zahlen der Sterbenden nach Geschlecht, nach der Lebensart oder nach anderen Bedingungen zu gliedern. Deshalb muss man versuchen, im Nachhinein, d.h. aus Beobachtungen – *a posteriori vel ex observationibus* –, Schlüsse zu ziehen. Eine solche Schlussweise – er spricht von einem Schluss *per inductionis speciem* – scheint ihm nahe liegend, denn «immer, wenn in diesem oder jenem bestimmten Zustand sich ein gewisser Vorgang sehr häufig ereignet, schliessen wir daraus, dass dasselbe geschieht, wenn ein ähnlicher Zustand wieder kommt und dieselben Bedingungen wieder vorhanden sind». Für Gessner ist dies eine allgemeine Regel, die er zudem schon aus dem Alten Testament kennt: «Was geschehen ist, wird wieder geschehen», hat er im Buch Ecclesiastes (Kohelet) 1,9 gelesen. Er kennt auch ihre grosse Bedeutung, denn «Aussagen, die auf diese Weise formuliert werden, haben einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit *(verisimilitudo et probabilitas)*, der sich desto mehr der Gewissheit annähert, je grösser die Zahl der Beobachtungen ist.»

Um diese Ausführungen zu unterstützen, weist er nun zusätzlich auf den «berühmten Jakob Bernoulli» hin und übernimmt fast wörtlich aus dessen *Ars Conjectandi*

1 Ich danke dem Altphilologen lic. phil. Mario Somazzi, Bern, der mit mir zusammen fast den gesamten Text gelesen und dabei laufend übersetzt hat, für seine sachkundige Hilfe.

Johannes Gessner
1709–1790

von 1713 die Aussage, dass «ebenso, wie man die Zahl der Beobachtungen vermehrt, auch die Wahrscheinlichkeit unablässig zunimmt, das wahre Verhältnis zu erhalten zwischen den beiden Zahlen der Fälle, in denen ein bestimmtes Ereignis entweder eintritt oder nicht eintritt, so dass sich schliesslich diese Wahrscheinlichkeit bis zu einem beliebig gegebenen Grad der Gewissheit annähert» [2, p. 249]. Er fügt auch ein Zahlenbeispiel aus der *Ars Conjectandi* [2, p. 259] bei. Die dabei auftretenden numerischen Werte überraschen jedoch den Leser und leuchten keineswegs ein, da das Beispiel aus dem bei Bernoulli gegebenen Zusammenhang gerissen ist und Gessner keinen Kommentar beifügt.

Sterbetafeln

Gessner kennt eine ganze Anzahl von Sterbetafeln, die ihm die notwendigen Erfahrungswerte liefern könnten, um die eingangs erwähnten Wahrscheinlichkeiten des Lebens und des Sterbens abzuschätzen und dann auch weitere Fragen zu beantworten: Es sind dies für ihn «Tafeln, die für jedes Alter die Anzahl der Lebenden und der Verstorbenen angeben», an anderer Stelle spricht er kürzer von *Ordines mortalitatis,* also von «Absterbeordnungen». Er erwähnt neben verschiedenen anderen die 1662 veröffentlichten Tafeln von John Graunt (1620–1674), dann die Untersuchungen von William Petty (1623–1687) von 1683 und jene von Nicholas Struyck (1687–1769) aus dem Jahre 1740, schliesslich die seinerzeit weit verbreitete Schrift des deutschen Pfarrers und Bevölkerungsstatistikers Johann Peter Süssmilch (1707–1767) über «Die göttliche Ordnung in den Verhältnissen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen» (1741). Für seine eigenen Überlegungen stellt er Auszüge aus verschiedenen Tafeln nebeneinander. Diese synoptische Tafel heisst bei ihm *Scala periodi humanae vitae*. Sie enthält

- in der ersten Kolonne das laufende Alter,
- in der zweiten zu jedem Alter die Zahl der Lebenden nach Edmond Halley (1693),
- in den nächsten vier Kolonnen die Zahlen der Lebenden und der Verstorbenen, das jeweilige Verhältnis dieser beiden Zahlen und schliesslich die mittlere Lebenserwartung nach Willem Kersseboom (1742),
- in den letzten drei Kolonnen nochmals die Zahlen der Lebenden und der Verstorbenen und die mittlere Lebenserwartung nach Antoine Déparcieux (1746).

Edmond Halley (1656–1742), der bekannte Astronom, hat in London von der Royal Society den Auftrag erhalten, das reichhaltige und zuverlässige Beobachtungsmaterial zu bearbeiten, das Caspar Neumann

(1648–1715), Professor der Theologie und Pfarrer in Breslau, aus den Breslauer Sterberegistern der Jahre 1687–1691 gewonnen hatte. – Willem Kersseboom (1691–1771) aus Den Haag hat sich bei der Bearbeitung seiner Sterbetafel auf die Sterberegister von holländischen Gemeinden und auf Material aus der Verwaltung der Leibrenten gestützt. – Auf ähnlichen Grundlagen beruhen auch die Ausführungen von Antoine Déparcieux (1703–1768) in seinem 1746 publizierten *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine;* seine Publikation ist noch lange bei den französischen Versicherungsgesellschaften als Rentnertafel verwendet worden. (Mehr zur Geschichte der Sterblichkeitsforschung in [3] und in [4].)

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bevor jetzt Gessner seine Überlegungen zu den Angaben aus seiner Tafel darlegt und einige Folgerungen zieht, erläutert er einiges aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er folgt hier wohl einigermassen Jakob I Bernoulli, den er wie andere frühe Vertreter der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch ausdrücklich erwähnt. Allerdings übernimmt er keine Formulierungen wörtlich aus der *Ars Conjectandi*. – Die «Gewissheit eines Ereignisses» wird als Ganzes angenommen; die Wahrscheinlichkeit ist «ein Teil der Gewissheit» und die «Grösse der Wahrscheinlichkeit» *(probabilitatis quantitas)* ist das Verhältnis dieses Teils zum Ganzen. Er schreibt von den Schwierigkeiten, dieses Verhältnis zu bestimmen, wenn es sich nicht einfach um Würfelspiele und Ähnliches handelt, und weist darauf hin, dass man dann auf die zahlreichen Beobachtungen des Ereignisses zurückgreifen muss, wie er dies in den vorausgehenden Paragraphen gezeigt habe. Dann folgen zwei Lemmata:

Lemma 1: «Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist wie die Zahl der Fälle, in denen es stattfindet *(locum habet)* zur Zahl aller möglichen Fälle.» – Lemma 2: «Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das von anderen abhängt, ist gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten.» (Für «Produkt» wird hier *factum* verwendet, was im 18. Jh. noch oft üblich war.)

Die Formulierung dieser beiden Lemmata ist nicht besonders gut geraten. Doch Johannes Gessner war ja schliesslich auch nicht Mathematiker, sondern ein ausgesprochener «Generalist», der in allen Naturwissenschaften sehr bewandert war!

Beispiele, Anwendungen

Gessner beginnt mit der Erklärung der Formeln für die Berechnung der ein- und mehrjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten und Sterbenswahrscheinlichkeiten und zeigt, wie man das Alter finden kann, in welchem die Zahl der Überlebenden zur Zahl der am Anfang Lebenden angenähert ein bestimmtes Verhältnis erreicht. Hier und auch bei fast allen weiteren Betrachtungen illustriert er die Formeln durch mehrere Zahlenbeispiele, wobei er bald von der einen und bald von einer anderen Tafel seiner oben beschriebenen *Scala* ausgeht. Es folgt die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, dass jemand das ganze erste Jahr lebt, dann aber im zweiten Jahr, im dritten Jahr usw. stirbt. Gessner weist kurz darauf hin, dass diese Werte bei der Berechnung des Preises von einer Rente für eine feste Zahl von Jahren oder für eine Leibrente *(pensio ad vitam)* eine Rolle spielen und dabei Multiplikationen mit Barwerten *(valores praesentes)* einer gegebenen Summe auftreten. Leider bringt er gerade hier, wo eine zusätzliche Erklärung notwendig wäre, kein Zahlenbeispiel. Klar sind dann aber wieder die Überlegungen, die er für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten von zwei oder mehreren verbundenen Leben macht und wo er die Erklärungen durch numerische Beispiele gut ergänzt. Es folgen dann die mit ihrer Herleitung gegebenen Formeln für die Berechnung der mittleren Lebenserwartung *(aetas media* oder *spes vitae)*. Weiter wird gezeigt, wie man aufgrund einer Sterbetafel auch versuchen kann, Aussagen über die Altersstruktur einer ganzen Bevölkerung zu machen. – Anhand von Zahlenmaterial, das er nicht aus seiner *Scala,* sondern aus verschiedenen anderen Unterlagen entnimmt, illustriert er noch etliche andere Einzelheiten aus der Bevölkerungsstatistik, so zum Beispiel, dass – statistisch gesehen – in den meisten Lebensperioden die Frauen «längerlebend» *(longeviores)* sind als die Männer und dass verheiratete Menschen längerlebend sind als ledig gebliebene.

Gessner möchte, dass auch in Helvetien und in der Region Zürich solche statistische Untersuchungen gemacht würden; wegen des Mangels an sorgfältigen Beobachtungen habe er es vorgezogen, über die Verhältnisse hierzulande zu schweigen, anstatt Unsicheres oder nur weniges zu sagen. – Er schliesst seine Ausführungen mit einer kurzen religiösen Betrachtung und dem Lob Gottes, zu dessen Ehre er mit seinen Ausführungen beitragen möchte, und richtet an ihn die Bitte *«zu zählen unsere Tage, das lehre uns, damit wir ein weises Herz erlangen»* (Psalm 90, 12).

Auswirkungen

Man kann zusammenfassend sagen, dass Gessners *Dissertatio* «zwar keine neuen Erkenntnisse enthält, aber das ganze damalige Wissen über die Sterblichkeitsstatistik von Graunt (1662) über Halley, Struyck, Kersseboom bis Déparcieux (1746) zusammenträgt» [5]. Doch die Auswirkungen von Gessners Beschäftigung mit dem Thema «Sterblichkeitsstatistik» verdienen noch einige zusätzliche Bemerkungen: Johannes Gessner war als Lehrer am Zürcher Collegium Carolinum verpflichtet, Jahr für Jahr eine *Dissertatio* zu verfassen, und diese Abhandlung bildete jeweils die Grundlage für die Examensdisputation der Theologen. So dürften zunächst einmal seine Ausführungen in *De Termino Vitae* dazu beigetragen haben, in einem etwas grösseren Kreis ein gewisses Verständnis für die Bedeutung statistischer Erhebungen zu wecken. Gessner war aber auch der eigentliche Gründer und der erste Präsident der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, die 1746 als «Physicalische Societät» gegründet worden ist. Und bei seinem offensichtlichen Bedürfnis nach statistischen Erhebungen überrascht es uns nicht, dass die «Ökonomie» einer der 28 Wissenszweige war, die er an der Gründungsversammlung der Gesellschaft zur

Behandlung vorgeschlagen hat. «Wenn daher Zürich den Ruhm beanspruchen darf, [...] die erste nationalökonomische Studienkommission beherbergt zu haben, so ist dies in erster Linie das persönliche Verdienst von Johannes Gessner. Er hat in Zürich [...] das Verständnis für methodisches wissenschaftliches Arbeiten gelehrt. [...] Ohne diese Schulung wären die geradezu vorbildlichen Untersuchungen der Ökonomischen Kommission der Physicalischen Societät über die Bevölkerung und Wirtschaft der Stadt und der Landgemeinden von 1756 bis 1790 nicht möglich gewesen» [6].

* * * * *

Johannes Gessner ist 1709 in Zürich als Sohn eines Pfarrers geboren und ist Spross eines sehr bekannten Zürcher Geschlechts, dem u.a. der überaus vielseitige, hervorragende Gelehrte Conrad Gessner (1516–1565) und der Idyllendichter Salomon Gessner (1730–1788) angehören. Seine erste naturwissenschaftliche Ausbildung erhielt er bei Johann Jakob Scheuchzer (1672–1733) – ebenfalls ein bedeutender Universalgelehrter – und bei Johannes von Muralt (1645–1733), einem Mediziner und Naturwissenschaftler von grossem Wissen und bedeutenden Verdiensten. 1726 begann er in Basel das Medizinstudium, das er bald darauf in Leiden und später in Paris fortsetzte. Ab 1728 studierte er wieder in Basel und widmete sich hier auch dem Studium der Mathematik bei Johann I Bernoulli (1667–1748) – einen bedeutenderen Mathematiker hätte er damals kaum als seinen Lehrer wählen können! In Basel schloss er 1730 sein Medizinstudium mit dem Doktorat ab. «Der grösste Gewinn dieser Jahre bestand zweifellos in der damals geschlossenen Freundschaft mit Albrecht von Haller, eine Freundschaft, die ein halbes Jahrhundert in ungetrübtester Weise Bestand hatte» [7]. Mit Haller (1708–1777) zusammen unternahm Gessner auch eine Reise durch die Schweiz, die Haller zum Gedicht «Die Alpen» inspirierte. 1730 kehrte er nach Zürich zurück und wirkte dort kurze Zeit als Arzt. 1733 wurde er als Nachfolger von J.J. Scheuchzer Professor für Mathematik am Collegium Carolinum, 1738 als Nachfolger von Johannes Scheuchzer auch Professor für Physik. Als solcher verfasste er jeweils für die Examina Abhandlungen zu mathematischen und naturwissenschaftlichen Themen; auf jene «Über das Ende des Lebens» sind wir oben eingegangen. Daneben beschäftigte er sich mit den verschiedensten Zweigen der Naturwissenschaft. Besonders intensiv pflegte er die Botanik, und hier lieferte er auch wichtige Beiträge zu Hallers Schweizer Flora. Seine umfangreiche Naturaliensammlung war international bekannt. Sie umfasste ein Herbarium mit 4000 Pflanzen, ferner Schmetterlinge, Fische, Amphibien, Muscheln, Mineralien, Steine und Fossilien und wurde immer wieder von naturwissenschaftlich interessierten Besuchern aus aller Welt aufgesucht. Er korrespondierte mit zahlreichen Gelehrten und wurde in viele gelehrte Gesellschaften und Akademien aufgenommen, so z.B. in die Akademien von Berlin, Göttingen, Petersburg, Uppsala. – «Gessner war im Grunde seines Wesens kein Forscher. Sein Verdienst lag vollkommen auf didaktischem Gebiet, hier freilich in besonderem Mass und in weitestem Sinn. [...] Sein geistiger Einfluss auf seine Schüler war sehr gross. Gegen hundert Jahre trug der naturwissenschaftliche Geist Zürichs sein Gepräge. [...] Die Fähigkeit zu kritischem, unbefangenen Urteil wusste er durch eine gute Denkschulung auch in seinen Schülern zu wecken» [7]. – Die Autobiographie Gessners, ergänzt durch Auszüge aus seinem Briefwechsel mit Albrecht von Haller, ist von Urs Boschung herausgegeben und mit einer reichhaltigen Einleitung, einer Würdigung seines Lebenswerkes und Illustrationen versehen worden [8].

R. Ineichen

Bibliographie

[1] Gessner, J., Dissertatio physico-medico-mathematica de Termino Vitae, Tiguri, Gessner 1748

[2] Bernoulli, J., Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3. Bearbeitet von B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel 1975

[3] Kupper, J., Sterblichkeitsforschung im Wandel der Zeit, Antrittsvorlesung der ETH Zürich vom 29. Januar 1980

[4] Braun, H., Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik. 2. Auflage. Duncker & Humblot, Berlin 1963

[5] Kupper, J., Versicherungsmathematik und schweizerische Hochschulen. Mitteilungen SAV 1/1998

[6] Walter, E. J., Abriss der Geschichte der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 114, 1969

[7] Milt, B., Johannes Gessner (1709–1790). Gesnerus 3, 1946

[8] Boschung, U., Johannes Gessner (1709–1790) – Der Gründer der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Neujahrsblatt der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich auf das Jahr 1996