Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Aktuarvereinigung

Band: - (2003)

Heft: 1

Artikel: Schadenhöhenverteilungen der einzelnen Segmente versus Schadenhöhenverteilung des ganzen Portefeuilles

Autor: Toniolo, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967404

D. TONIOLO, Zürich

Schadenhöhenverteilungen der einzelnen Segmente versus Schadenhöhenverteilung des ganzen Portefeuilles

1 Motivation und Einführung

In der Praxis ist es oft üblich, Schadenhöhenverteilungen mit Gamma-Verteilungen zu modellieren. In der Tat liefern Gamma-Verteilungen, deren Parameter beispielsweise mittels eines Likelihoodschätzers ermittelt wurden, oft gute Anpassungen an die empirische Schadenhöhenverteilung, solange wir nur kleinere und mittlere Schäden in Betracht ziehen. Zur Modellierung von Grossschäden sind sie aber in der Regel nicht mehr geeignet, da sie einen zu schmalen Schwanz besitzen. Allfällige Grossschäden zerstören die Information, welche die kleinen und mittleren Schäden einbringen, die ganze Gamma-Verteilung wird in Richtung der Grossschäden „gezerrt".
Man würde in diesem Fall sagen, dass das ausgewählte Modell nicht genügend robust sei. Um das Modell robuster zu machen könnten Grossschäden aus den Daten entfernt oder durch eine Transformationsfunktion geändert werden (zum Beispiel durch eine Cut-Funktion, mit welcher der über einer Schranke liegende Teil eines Grossschadens abgeschnitten wird). Dabei stellen sich weitere Fragen: Welche Transformationsfunktion soll gewählt werden (ab welcher Höhe sollen Grossschäden gestutzt werden), wie soll der fehlende Teil der Schadenlast wieder in die Prämien integriert werden?
Mit dem im Folgenden präsentierten Vorgehen versucht man diese Fragen anzugehen. Der Grundgedanke ist dabei, die Risikoprämien der einzelnen Segmente eines Portefeuilles aus den Daten herzuleiten, unter der Annahme, dass die Schadenhöhenverteilungen in diesen Segmenten stetig sind und dass sie sich voneinander nur um einen Massstabparameter unterscheiden.
Weiter setzen wir voraus, dass sich die folgenden Daten mit absoluter Genauigkeit bestimmen lassen:

- die gesamte Schadenlast
- die Schadenhöhenverteilung des gesamten Portefeuilles im Bereich der kleinen und mittleren Schäden (diese Verteilung darf im Bereich der Grossschäden unbekannt bleiben)
- die Schadenfrequenz pro Segment

– die Werte, welche die Schadenhöhenverteilungen der einzelnen Segmente in einem bestimmten Punkt annehmen

Diese letzte Annahme benötigt eine Erläuterung: Wir definieren eine Grenze und teilen die Schäden in zwei Klassen, nämlich in Schäden unterhalb oder gleich der Grenze, und in Schäden über der Grenze. Wenn die Schäden in den beiden Klassen für die verschiedenen Segmente vernünftig verteilt sind, können wir für jedes Segment mit einer guten Genauigkeit die Wahrscheinlichkeit schätzen, dass ein Schaden unter diese Grenze fallen wird (z.B. durch eine logistische Regression). In diesem Artikel untersuchen wir Bedingungen, unter welchen die oben erwähnten Informationen genügen, um die Risikoprämien der einzelnen Segmente zu bestimmen. In diesen Fällen haben die einzelnen Grossschäden keinen direkten Einfluss auf die Schätzung der Prämien; nur in der aggregierten Form der gesamten Schadenlast wird die Information der Grossschäden berücksichtigt.

2 Darstellung des Problems

2.1 Definitionen

Sei $N :=$ die endliche Anzahl Versicherte im Portefeuille.

- $\forall i = 1, \ldots, N$ sei $\lambda_i :=$ die Schadenfrequenz des i-ten Versicherten.
- $\forall i = 1, \ldots, N$ sei $G_i :=$ die Schadenhöhenverteilung des i-ten Versicherten:
- $\forall x < 0$: $G_i(x) = 0$, $\quad X_i \approx G_i$ unabhängig.
- Sei $\breve{F} :=$ die Schadenhöhenverteilung, die man im ganzen Portefeuille beobachtet hat.

Bemerkung: Es gilt die folgende Beziehung:

$$\breve{F} = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot G_i\,, \quad \text{wobei} \;\; p_i := \lambda_i \Big/ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j\,.$$

2.2 Grössen

Grössen, die man in der realen Welt mit einer „vernünftigen" Genauigkeit messen oder mit verschiedenen Methoden schätzen kann (also Daten, die uns zur Verfügung stehen und nicht als stochastische Grössen betrachten werden):

- Die Schadenfrequenzen $\lambda_i \quad \forall i = 1, \dots, N$.
- Die Werte $y_i := G_i(\omega) \quad \forall i = 1, \dots, N$, wobei ω eine feste (vorgegebene) Zahl ist.
- Die Werte $\breve{F}(x) \quad \forall x \in [0, M]$ wobei $M \geq \omega$.
- Die gesamte Schadenlast $S := E\left[\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot X_i\right]$.

Bemerkung: Pro Versicherten i möchten wir die Risikoprämie $P_i := \lambda_i \cdot E[X_i]$ bestimmen. Dafür genügen die Verhältnisse

$$\varrho_{ij} := E[X_i] \Big/ E[X_j] \,,$$

da λ_i bekannt ist und

$$E[X_i] = S \Big/ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \cdot \varrho_{ji} \,.$$

2.3 *Modellannahme*

Es gibt eine stetige Verteilung $\breve{G}$ und positive Werte α_i, so dass: $G_i(x) = \breve{G}(\alpha_i \cdot x)$ $\forall x$, $\forall i$, d.h. alle Verteilungen G_i haben die gleiche Form. Sie unterscheiden sich voneinander nur durch N Massstabparameter $\alpha_1, \dots, \alpha_N$.
Das ist keine willkürliche Annahme: wenn zum Beispiel unsere Versicherten verschiedenen geographischen Einheiten in einem Land entsprechen, dann kann man die Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ als „Lebenshaltungskoeffizienten" interpretieren, die den „relativen Wert"der Geldwährung im Land beschreiben.

2.4 *Bemerkung*

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \int_0^\infty (1 - G_i(x))\, dx = \int_0^\infty \Big(1 - \breve{G}(\alpha_i \cdot x)\Big)\, dx \\ &= \frac{1}{\alpha_i} \int_0^\infty \Big(1 - \breve{G}(y)\Big)\, dy \,, \end{aligned}$$

d.h.

$$\varrho_{ij} = E\,[X_i] \Big/ E\lfloor X_j \rfloor = \alpha_j \,/\, \alpha_i \,.$$

Andererseits ist

$$y_i = \breve{G}(\alpha_i \cdot \omega) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = \breve{G}^{-1}(y_i)/\omega \,,$$

und deswegen:

$$\varrho_{ij} = \breve{G}^{-1}(y_j)/\breve{G}^{-1}(y_j) \,.$$

Wenn also die Verteilung $\breve{G}$ im Intervall $\lfloor 0, \max_i(\breve{G}^{-1}(y_i)) \rfloor$ bekannt wäre, hätten wir unser Ziel erreicht.

2.5 *Definition der schwachen Gleichung*

Gesucht werden stetige Verteilungen $\breve{G}$, so dass:

$$\breve{F}(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \breve{G}\left(x \cdot \breve{G}^{-1}(y_i)/\omega\right) \quad \forall x \in [0, M] \,.$$

Bemerkung: Die Lösungen dieser Gleichung sind nur bis auf Multiplikation mit einem Massstabparameter bestimmt (d.h.: ist $\breve{G}$ eine Lösung und $\beta > 0 \quad \Rightarrow$ $K(x) := \breve{G}(\beta \cdot x)$ ist auch eine Lösung), was der Eindeutigkeit der gesuchten Werte $\varrho_{ij} = \breve{G}^{-1}(y_j)/\breve{G}^{-1}(y_j)$ nicht widerspricht.

Da die Werte der Verteilung $\breve{F}$ nur im Intervall $[0, M]$ bekannt sind, sind die Werte der Verteilung $\breve{G}$ ab der Grenze $M \cdot \max_i(\breve{G}^{-1}(y_i))/\omega$ frei, d.h. die frühere Gleichung ist äquivalent zu:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot G\left(x \cdot G^{-1}(y_i)/\omega\right) \qquad \forall x \in [0, M] \,,$$

wobei $F := \breve{F}/\,[0, M]$ der Einschränkung von $\breve{F}$ auf $[0, M]$ und

$G := \breve{G}/[0, M \cdot \max_i(\breve{G}^{-1}(y_i))/\omega]$ der Einschränkung von

$\breve{G}$ auf $[0, M \cdot \max_i(\breve{G}^{-1}(y_i))/\omega]$ entsprechen. Diese Gleichung wird als „schwache Gleichung" bezeichnet, oder mit dem Symbol [G1].

2.6 Definition der verstärkten Gleichung

Da die schwache Gleichung schwierig zu behandeln ist, betrachten wir zuerst die folgende Gleichung:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot G(\alpha_i \cdot x) \qquad \forall x \in [0, M] \ ,$$

wobei jetzt die α_i feste streng positive Zahlen sind (unabhängig von G). Diese Gleichung nennen wir „verstärkte Gleichung".
Mit [G2] werden wir die verstärke Gleichung bezeichnen, falls die Lösungen G stetige Funktionen auf $[0, M \cdot \max_i(\alpha_i)]$ sein dürfen.
Mit [G3] werden wir die verstärke Gleichung bezeichnen, falls nur stetige Funktionen erlaubt sind, die sich zu einer Verteilung erweitern lassen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$\max_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)$$

(wenn $\max\limits_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \neq 1$, dann dividieren wir die α_i durch $\max\limits_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ und setzen

$$G^{\text{neu}}(x) := G^{\text{alt}}(\max_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \cdot x) \, ;$$

wenn $\alpha_i = \alpha_j$, dann eliminieren wir α_j und setzen $p_i^{\text{neu}} := p_i^{\text{alt}} + p_j$.)

3 Existenz von Lösungen der verstärkten Gleichung

3.1 Satz

Es gelte die Bedingung $p_1 > \sum_{i \geq 2} p_i$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)$ gegen eine Lösung von [G2], wobei:

$$g_m(x) := \frac{(-1)^m}{p_1} \cdot \sum_{m_2 + \cdots + m_N = m} \binom{m}{m_2, \ldots, m_{N-1}} \cdot \prod_{j=2}^{N} \left(\frac{p_j}{p_1}\right)^{m_j}$$
$$\cdot \breve{F}\left(\prod_{j=2}^{N} \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)^{m_j} x/\alpha_1\right) \qquad \forall x \in [0, M]$$

und

$$\binom{m}{m_2, \dots, m_{N-1}} := \frac{m!}{m_2!\, m_3! \cdots m_{N-1}!\, (m - m_2 - \cdots - m_{N-1})!}$$

der multinomiale Koeffizient ist.

Beweis (Um die Notation nicht zu erschweren, nehmen wir an $N = 3$): Setze

$$^m G(x) := \sum_{i=0}^{m} g_i(x) .$$

Zuerst zeigen wir, dass die Funktionenfolge $(^m G)_{m=0,1,\dots}$ gleichmässig konvergiert (bezüglich der ∞-Norm):

$$\begin{aligned}
\|g_m\|_\infty &\left(= \sup_{x \in [0,M]} (g_m(x))\right) \\
&= \left\| \frac{(-1)^m}{p_1} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (p_2/p_1)^i (p_3/p_1)^{m-i} \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdot \breve{F}\left((\alpha_2/\alpha_1)^i (\alpha_3/\alpha_1)^{m-i} \cdot x/\alpha_1\right) \right\|_\infty \\
&\le \frac{1}{p_1} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (p_2/p_1)^i (p_3/p_1)^{m-i} \cdot \|F\|_\infty \\
&\le \frac{1}{p_1} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (p_2/p_1)^i (p_3/p_1)^{m-i} \\
&= \frac{1}{p_1} ((p_2 + p_3)/p_1)^m \\
&=: k_m
\end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} k_i$ konvergiert gleichmässig. Nach dem Kriterium von Weierstrass muss die Funktionenfolge $(^m G)_{m=0,1,\dots}$ auch gleichmässig konvergieren.
Setze

$$G(x) := \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) .$$

Aus der gleichmässigen Konvergenz folgt die Stetigkeit von G.

Zusätzlich gilt:

$$\begin{aligned}
&p_1 \cdot g_{m+1}(\alpha_1 \cdot x) \\
&\quad = \breve{F}(x) - (p_1 \cdot {}^m G(\alpha_1 \cdot x) + p_2 \cdot {}^m G(\alpha_2 \cdot x) + p_3 \cdot {}^m G(\alpha_3 \cdot x)) \\
&\Leftrightarrow: \ A_m
\end{aligned}$$

Beweis (durch Induktion): A_0 ist wahr. Zu beweisen: $A_m \Rightarrow A_{m+1}$:

$$\begin{aligned}
&p_1 \cdot {}^{m+1}G(\alpha_1 \cdot x) + p_2 \cdot {}^{m+1}G(\alpha_2 \cdot x) + p_3 \cdot {}^{m+1}G(\alpha_3 \cdot x) \\
&= p_1 \cdot {}^m G(\alpha_1 \cdot x) + p_1 \cdot g_{m+1}(\alpha_1 \cdot x) + p_2 \cdot {}^m G(\alpha_2 \cdot x) \\
&\quad + p_2 \cdot g_{m+1}(\alpha_2 \cdot x) + p_3 \cdot {}^m G(\alpha_3 \cdot x) + p_3 \cdot g_{m+1}(\alpha_3 \cdot x) \\
&\underset{\text{Induktion}}{=} \left(\breve{F}(x) - p_1 \cdot g_{m+1}(\alpha_1 \cdot x)\right) + p_1 \cdot g_{m+1}(\alpha_1 \cdot x) \\
&\quad + p_2 \cdot g_{m+1}(\alpha_2 \cdot x) + p_3 \cdot g_{m+1}(\alpha_3 \cdot x) \\
&= \breve{F}(x) + p_2 \cdot g_{m+1}(\alpha_2 \cdot x) + p_3 \cdot g_{m+1}(\alpha_3 \cdot x) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&p_2 \cdot g_{m+1}(\alpha_2 \cdot x) \\
&= (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} (p_2/p_1)^{i+1} (p_3/p_1)^{m+1-i} \\
&\quad \cdot \breve{F}((\alpha_2/\alpha_1)^{i+1} (\alpha_3/\alpha_1)^{m+1-i} \cdot x) \\
&= (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{m+2} \binom{m+1}{i-1} (p_2/p_1)^{i} (p_3/p_1)^{m+2-i} \\
&\quad \cdot \breve{F}((\alpha_2/\alpha_1)^{i} (\alpha_3/\alpha_1)^{m+2-i} \cdot x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&p_3 \cdot g_{m+1}(\alpha_3 \cdot x) \\
&= (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} (p_2/p_1)^{i} (p_3/p_1)^{m+2-i} \\
&\quad \cdot \breve{F}((\alpha_2/\alpha_1)^{i} (\alpha_3/\alpha_1)^{m+2-i} \cdot x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&p_2 \cdot g_{m+1}(\alpha_2 \cdot x) + p_3 \cdot g_{m+1}(\alpha_3 \cdot x) \\
&= (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} \left[\binom{m+1}{i-1} + \binom{m+1}{i} \right] (p_2/p_1)^i (p_3/p_1)^{m+2-i} \\
&\quad \cdot \breve{F}((\alpha_2/\alpha_1)^i (\alpha_3/\alpha_1)^{m+2-i} x) \\
&\quad + (-1)^{m+1} \big((p_2/p_1)^{m+2} \breve{F}((\alpha_2/\alpha_1)^{m+2} x) \\
&\quad + (p_3/p_1)^{m+2} \breve{F}((\alpha_3/\alpha_1)^{m+2}) \big) \\
&= (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m+2} \left[\binom{m+2}{i} \right] (p_2/p_1)^i (p_3/p_1)^{m+2-i} \\
&\quad \cdot \breve{F}((\alpha_2/\alpha_1)^i (\alpha_3/\alpha_1)^{m+2-i} x) \\
&= -p_1 \cdot g_{m+2}(\alpha_1 \cdot x)
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
\begin{aligned}
&p_1 \cdot {}^{m+1}G(\alpha_1 \cdot x) + p_2 \cdot {}^{m+1}G(\alpha_2 \cdot x) + p_3 \cdot {}^{m+1}G(\alpha_3 \cdot x) \\
&\quad = \breve{F}(x) - p_1 \cdot g_{m+2}(\alpha_1 \cdot x)\,,
\end{aligned}
$$

also $A_m \;\Rightarrow\; A_{m+1}$ (Ende des Induktionsbeweises).

Da

$$
\begin{aligned}
&p_1 \cdot g_{m+1}(\alpha_1 \cdot x) \\
&\quad = \breve{F}(x) - (p_1 \cdot {}^{m}G(\alpha_1 \cdot x) + p_2 \cdot {}^{m}G(\alpha_2 \cdot x) + p_3 \cdot {}^{m}G(\alpha_3 \cdot x))
\end{aligned}
$$

und

$$
\|g_m\|_\infty \le \frac{1}{p_1} ((p_2 + p_3)/p_1)^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,
$$

folgt:

$$
p_1 \cdot G(\alpha_1 \cdot x) + p_2 \cdot G(\alpha_2 \cdot x) + p_3 \cdot G(\alpha_3 \cdot x) = F(x) \quad \forall x \in [0, M]
$$

Bemerkung: Bei diesem Beweis wäre $M = \infty$ auch möglich gewesen.

3.2 Satz

Die Konvergenzbedingung des früheren Satzes, dass ein p_h „dominant“ sein muss ($p_h > \sum_{i \neq h} p_i$), sieht sehr einschränkend aus. Könnte man diese Bedingung nicht abschwächen? Diese Frage zu beantworten, wird das Thema des nächsten Satzes sein:

Wenn F beliebig oft differenzierbar ist, dann gibt es eine Lösung G von [G2] (die auch beliebig oft differenzierbar ist).

Beweisskizze:

OBdA (nach 2.6): $\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$, und deswegen existiert eine natürliche Zahl m mit der Eigenschaft, dass $p_1 \cdot \alpha_1^m > \sum_{i=2}^N p_i \cdot \alpha_i^m$. Nehmen wir an, die gesuchte Lösung G sei auch m-mal differenzierbar. Wenn wir die Gleichung $F(x) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot G(\alpha_i \cdot x)$ m-mal differenzieren, bekommen wir:

$$F^m(x) = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot G^m(\alpha_i \cdot x)\,, \quad \text{wobei } q_i := p_i \cdot \alpha_i^m$$

Diese neue Gleichung erfüllt die Konvergenzbedingung, und kann mittels 3.1 gelöst werden. Es ist einfach zu sehen, dass die Lösung dieser neuen Gleichung der m-ten Ableitung einer Lösung der ursprünglichen Gleichung entspricht.

Bemerkung: wegen der Einschränkung, dass die ∞-Norm von F^m existieren muss, kann dieses Verfahren auf $M = \infty$ nicht erweitert werden.

4 Eindeutigkeit der Lösungen der verstärkten Gleichung

4.1 Vorbemerkung

Wir bekommen alle Lösungen von [G2], wenn wir zu einer gegebenen Lösung G die Funktionen H addieren, die die folgende Bedingung erfüllen:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot H(\alpha_i \cdot x) = 0 \qquad \forall x \in [0, M]\,.$$

Wir können nämlich die Gleichung [G2] so schreiben: $F = L(G)$, wobei L ein Linearoperator im Vektorraum $C_{[0,M]}$ der auf $[0, M]$ stetigen Funktionen ist (zur Erinnerung: $\max_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = 1$). Wegen der Linearität von L werden alle Lösungen der Gleichung [G2] durch eine einzige Lösung und den $Ker(L) = \{H\colon\ L(H) = 0\}$ erzeugt.

4.2 Beispiel (Korollar)

Sei $\alpha_1 = \max_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)\ (= 1)$ und es gebe ein $p_h \neq p_1$, so dass $p_h > \sum_{i \neq h}^{N} p_i$, dann: $Ker(L) \neq \{0\}$

Beweis (um die Notation nicht zu erschweren, sei $N = 3$):

Sei $R(x) = 0\ \ \forall x \in [0, M]$, R stetig und beschränkt auf der ganzen reellen Achse. Gesucht wird eine stetige Funktion H, so dass:

$$R(x) = p_1 H(\alpha_1 \cdot x) + p_2 H(\alpha_2 \cdot x) + p_3 H(\alpha_3 \cdot x) \quad \forall x \in [0, M]$$
$$(\text{also } H \in Ker(L))$$

Sei nun $p_3 > p_1 + p_2$. Mittels 3.1 können wir eine Lösung konstruieren, nämlich:

$$H(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{p_3} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (p_1/p_3)^i (p_2/p_3)^{m-i} \cdot R\left((\alpha_1/\alpha_3)^i (\alpha_2/\alpha_3)^{m-i} \cdot x/\alpha_3\right)$$

Sei nun $x_0 \in (0, M]$ fest. Da $\alpha_1/\alpha_3 > 1$ werden einige Werte

$$(\alpha_1/\alpha_3)^i (\alpha_2/\alpha_3)^{m-i} \cdot x_0/\alpha_3 \quad : i = 0, \ldots, m$$

beliebig gross, wenn $m \to \infty$. Also wird $H(x_0)$ auch von den Werten $R(x)$: $x > M$ abhängig sein, die beliebig sind $\Rightarrow$ Im allgemeinen wird $H(x_0) \neq 0$ sein.

4.3 Beispiel

Die durchaus plausible Vermutung, dass im Fall $M = \infty$ der $Ker(L)$ gleich Null sein muss, ist falsch, wie das folgende Beispiel von Bruno Gustavs und David Pilowsky zeigt:

Seien p, q zwei ungerade Zahlen, a eine reelle Zahl mit $0 < a < 1$. Sei zusätzlich $p_1 < p_2 + p_3$. Die Gleichung

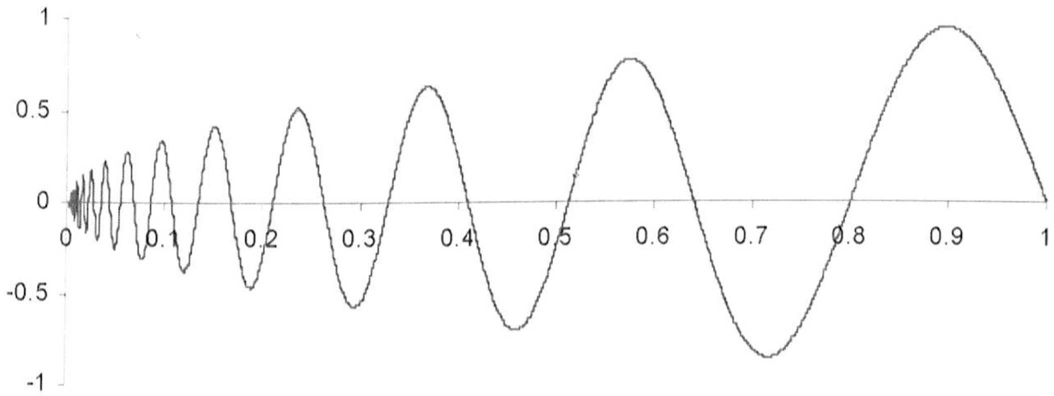
$$p_1 H(x) + p_2 H(a^P \cdot x) + p_3 H(a^q \cdot x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

besitzt eine explizite Lösung $\neq 0$:

$$H(x) = \begin{cases} x^\sigma \cdot \sin(\pi \cdot \log_a(x)) & \text{für } x > 0\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

wobei σ die (positive) Lösung der Gleichung $p_1 = p_2 \cdot a^{p \cdot \sigma} + p_3 \cdot a^{q \cdot \sigma}$ ist. (Beweis: explizite Berechnung)

Beispiel einer möglichen Funktion H:



4.4 Lemma

Das frühere Beispiel lässt uns vermuten, dass die Elemente des $Ker(L)$ bei der Null „schwingen" müssen. Diese Intuition lässt sich durch den folgenden Satz formell ausdrücken:

Sei $0 \neq H \in Ker(L)$, dann existiert eine positive Nullfolge (z_n) (d.h. $z_n > 0 \; \forall n$ und $z_n \to 0$) und eine positive reelle Zahl $\mu > 0$, so dass:

$$H(z_n) \geq \mu \cdot z_n^{\varrho} \qquad \text{für } n \text{ gerade und}$$
$$H(z_n) \leq -\mu \cdot z_n^{\varrho} \qquad \text{für } n \text{ ungerade,}$$

wobei

$$\varrho := -\log\Big(\sum_{i \geq 2} p_i/p_1\Big) \Big/ \log(\alpha_2),$$

angenommen dass $1 = \alpha_1 > \alpha_2 = \max\limits_{i \geq 2}(\alpha_i)$

Beweis (um die Notation nicht zu erschweren, sei wie früher $N = 3$)

$$p_1 H(x) + p_2 H(\alpha_2 \cdot x) + p_3 H(\alpha_3 \cdot x) = 0 \qquad \forall x \in [0, M]$$

$\Leftrightarrow$

$$H(x) + \beta_2 H(\alpha_2 \cdot x) + \beta_3 H(\alpha_3 \cdot x) = 0 \qquad \forall x \in [0, M],$$

wobei $\beta_i := p_i / p_1$

$$0 \neq H \in \mathit{Ker}(L) \quad \Rightarrow \quad \exists x_0 \in (0, M]\colon\ H(x_0) > 0$$

(sonst $\exists y \in (0, M]\colon\ H(y) < 0$, da $H \neq 0$ und $H(0) = 0$.
Wegen $\max\limits_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = 1$ und $H(x) \leq 0 \;\; \forall x \in (0, Mt]$, folgt:
$\sum\limits_{i=1}^{N} p_i \cdot H(\alpha_i \cdot y) < 0$. Also kann H nicht im $\mathit{Ker}(L)$ liegen).

Es gilt:

$$\begin{cases} H(x_0) = -\beta_2 \cdot H(\alpha_2 \cdot x_0) - \beta_3 \cdot H(\alpha_3 \cdot x_0) \\ H(\alpha_2 \cdot x_0) = -\beta_2 \cdot H(\alpha_2^2 \cdot x_0) - \beta_3 \cdot H(\alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot x_0) \\ H(\alpha_3 \cdot x_0) = -\beta_2 \cdot H(\alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot x_0) - \beta_3 \cdot H(\alpha_3^2 \cdot x_0) \end{cases}$$

(da $\alpha_2, \alpha_3 < 1$, sind wir immer noch im Definitionsbereich von H) $\Rightarrow$

$$H(x_0) = \beta_2^2 \cdot H(\alpha_2^2 \cdot x_0) + 2\beta_2 \cdot \beta_3 \cdot H(\alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot x_0) + \beta_3^2 \cdot H(\alpha_3^2 \cdot x_0).$$

Allgemeiner gilt:

$$H(x_0) = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \beta_2^i \cdot \beta_3^{n-i} \cdot H(\alpha_2^i \cdot \alpha_3^{n-i} \cdot x_0).$$

Sei n gerade. $\exists i_0$:

$$H(\alpha_2^{i_0} \cdot \alpha_3^{n-i_0} \cdot x_0) \geq H(x_0)/(\beta_2 + \beta_3)^n,$$

(sonst wäre

$$\begin{aligned} H(x_0) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \beta_2^i \cdot \beta_3^{n-i} \cdot H(\alpha_2^i \cdot \alpha_3^{n-i} \cdot x_0) \\ &< \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \beta_2^i \cdot \beta_3^{n-i} \cdot \frac{H(x_0)}{(\beta_2 + \beta_3)^n} = H(x_0)\ ) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists z_n \in (0, x_0 \cdot \alpha_2^n]$:

$$H(z_n) \geq H(x_0)/(\beta_2 + \beta_3)^n \,.$$

Setze $x_n := x_0 \cdot \alpha_2^n$. Da $\alpha_2 \neq 1$, gilt: $n = (\log(x_n) - \log(x_0))/\log(\alpha_2)$.

Wenn wir diesen Ausdruck in die vorherige Ungleichung einfügen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} H(z_n) &\geq H(x_0)/(\beta_2 + \beta_3)^{(\log(x_n) - \log(x_0))/\log(\alpha_2)} \\ &= H(x_0) \cdot (x_n/x_0)^{(-\log(\beta_2+\beta_3))/\log(\alpha_2)} \\ &= \mu \cdot x_n^{\varrho}, \quad \text{wobei } \mu := H(x_0)/x_0^{\varrho} \,. \end{aligned}$$

Also $\exists z_n \in (0, x_n]$ mit $x_n \to 0$, so dass $H(z_n) \geq \mu \cdot x_n^{\varrho}$.

Da $\varrho \geq 0$ (sonst wäre H unstetig in der Null, also $H \notin Ker(L)$), erhalten wir: $H(z_n) \geq \mu \cdot z_n^{\varrho}$.

Analog für n ungerade.

4.5 Satz

Dass die Elemente von $Ker(L)/\{0\}$ schwingen müssen, hat schwere Konsequenzen auf die Differenzierbarkeit dieser Funktionen. Es ist einfach zu zeigen, dass solche Funktionen höchstens $\widehat{\varrho}$ Mal in Null differenzierbar sein können, wobei $\widehat{\varrho}$ die grösste natürliche Zahl kleiner als ϱ ist (ϱ wie in 4.4).

Beweis: Vorbemerkung: Sei H^n die n-te Ableitung der Funktion H, dann gilt: $H^n(0) = 0$.

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot H(\alpha_i \cdot x) = 0 \quad \forall x \in [0, M] \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot H(\alpha_i \cdot x) = 0 \quad \forall x \in [0, M] \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \alpha_i^n \cdot H^n(\alpha_i \cdot x) = 0 \quad \forall x \in [0, M] \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \alpha_i^n \cdot H^n(0) = H^n(0) \cdot \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \alpha_i^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$H^n(0) = 0$$

Nehmen wir an, dass die n-te Ableitug H^n exitiert. Nach dem Restsatz für Taylorentwicklungen: $\exists\vartheta \in (0,1)$:

$$H(x) = \frac{H^n(\vartheta \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^n\,.$$

Kann nun die $(n+1)$-te Ableitung existieren?

$$\begin{aligned}
H^{n+1}(0) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{H^n(\varepsilon) - H^n(0)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(n+1)!\,(H(\varepsilon/\vartheta)/(\varepsilon/\vartheta)^n)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{(n+1)!\,(H(z_m)/z_m^n)}{\vartheta \cdot z_m}\,,
\end{aligned}$$

wobei die Folge (z_m) wie in 4.4 definiert ist, es folgt (nach 4.4)

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)!\,(H(z_m)/z_m^n)}{\vartheta \cdot z_m} &\geq \frac{\mu \cdot (n+1)!}{\vartheta} \cdot z_m^{\varrho-n-1} \quad \text{für } n \text{gerade und} \\
\frac{(n+1)!\,(H(z_m)/z_m^n)}{\vartheta \cdot z_m} &\leq -\frac{\mu \cdot (n+1)!}{\vartheta} \cdot z_m^{\varrho-n-1} \quad \text{für } n \text{ungerade}\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass H^{n+1} bei Null nur dann existieren kann, wenn $\varrho > n+1$.

4.6 Korollar (Verstärkte Gleichung [G2])

Der Linearoperator L, eingeschränkt auf dem Vektorraum $C^\infty_{[0,M]}$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, ist bijektiv. Anders ausgedrückt: wenn F beliebig oft differenzierbar ist, dann gibt es genau eine Lösung von [G2], die auch beliebig oft (in der Null) differenzierbar ist. (Beweis: 3.2 und 4.5)

4.7 Satz (Verstärkte Gleichung [G3])

Jetzt stellt sich die Frage: was passiert, wenn die gesuchten Funktionen G auch Verteilungen sein müssen? Nochmals scheint das „Schwingen“ dieser Funktionen ein sehr nützliches Element zu sein: wenn die ursprüngliche Verteilung F „sehr flach“ bei Null ist, sieht es plausibel aus, dass auch mindestens eine Lösung G sehr flach sein wird. Andererseits, wenn wir zu einer sehr flachen Funktion eine

schwingende Funktion addieren, dann wird die Summe auch schwingen, so dass diese Summe nicht mehr monoton steigend sein kann. Formell:
Sei F beliebig oft differenzierbar in einer Umgebung der Null und $F^n(0) = 0$ $\forall n < \varrho + 1$, wobei F^n die n-te Ableitung von F ist (ϱ wie in 4.4), dann gilt:

Es gibt höchstens eine Verteilung G, die Lösung von [G3] ist. Diese Lösung ist dann die einzige Lösung der verstärkten Gleichung [G2], die beliebig oft (in Null) differenzierbar ist.

Beweis: Sei F beliebig oft differenzierbar im Intervall $[0, \varepsilon]$, $M \geq \varepsilon > 0$. Nun betrachten wir die Gleichung $\widehat{F} = \widehat{L}(\widehat{G})$, wobei $\widehat{F} := F/[0, \varepsilon]$ die Einschränkung der Verteilung F auf dem Intervall $[0, \varepsilon]$ ist, $\widehat{G}$ eine reelle Funktion mit Definitionsbereich $[0, \varepsilon]$ und $\widehat{L} := L/C_{[0,\varepsilon]}$ der Einschränkung des Linearoperators L auf dem Vektorraum $C_{[0,\varepsilon]}$ entspricht.
Nach 3.2 wissen wir bereits: es gibt genau eine Lösung $\widehat{G}$ der Gleichung $\widehat{F} = \widehat{L}(\widehat{G})$, die auch beliebig oft (in der Null) differenzierbar ist.

$$\widehat{F}(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \widehat{G}(\alpha_i \cdot x) \quad \forall x \in [0, \varepsilon] \quad \Rightarrow$$

$$\widehat{F}^{n}(0) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \alpha_i^n \cdot \widehat{G}^{n}(0) \quad \Rightarrow$$

$$\widehat{G}^{n}(0) = 0 \quad \forall n < \varrho + 1,$$

also ist $\widehat{G}$ auch „flach“ bei der Null. Wie flach? Vom Restsatz für Taylorentwicklungen bekommen wir:

$$\exists \vartheta \in (0, 1): \quad \widehat{G}(x) = \frac{\widehat{G}^{\widehat{\varrho}+1}(\vartheta \cdot x)}{(\widehat{\varrho} + 2)!} \cdot x^{\widehat{\varrho}} + 1.$$

Sei nun $0 \neq \widehat{H} \in Ker(\widehat{L})$. Nach dem Lemma 4.4: Es gibt eine positive Nullfolge (z_n) und eine positive reelle Zahl μ, so dass $\widehat{H}(z_n) \leq -\mu \cdot z_n^{\varrho}$ für alle ungeraden Zahlen n

$$\Rightarrow (\widehat{G} + \widehat{H})(z_{2m+1}) \leq \frac{\widehat{G}^{\widehat{\varrho}+1}(\vartheta \cdot z_{2m+1})}{(\widehat{\varrho} + 2)!} \cdot (z_{2m+1})^{\widehat{\varrho}+1} - \mu \cdot (z_{2m+1})^{\varrho}$$

für alle m.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(\widehat{G}+\widehat{H})(z_{2m+1})}{z_{2m+1}^{\varrho}} \leq \begin{cases} -\mu & \text{für } \varrho < \widehat{\varrho}+1 \\ \frac{\widehat{G}^{\widehat{\varrho}+1}(0)}{(\widehat{\varrho}+2)!} - \mu & \text{für } \varrho = \widehat{\varrho}+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \frac{(\widehat{G}+\widehat{H})(z_{2m+1})}{z_{2m+1}^{\varrho}} \leq -\mu$$

(da $\widehat{G}^{\widehat{\varrho}+1}(0) = 0$, aus $\widehat{G}^{n}(0) = 0\ \forall n < \varrho + 1$)

Also muss $(\widehat{G}+\widehat{H})(z_{2m+1})$ für „grosse“ m (d.h. „kleine“ z_{2m+1}) negative Werte annehmen und deswegen kann $(\widehat{G}+\widehat{H})$ keine Verteilung sein.

Gezeigt haben wir:

$$\widehat{F}(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \widehat{G}(\alpha_i \cdot x) \quad \forall x \in [0, \varepsilon]$$

und $\widehat{G}$ entspricht einer Verteilung auf dem Intervall $[0,\varepsilon] \Rightarrow \widehat{G}(x)$ ist eindeutig bestimmt $\forall x \in [0,\varepsilon]$.

Sei nun G eine Lösung der verstärkten Gleichung [G3], d.h.

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot G(\alpha_i \cdot x) \quad \forall x \in [0, M]$$

und G entspricht einer Verteilung im Intervall $[0, M]$.

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot G(\alpha_i \cdot x) \quad \forall x \in [0, \varepsilon]$$

und G entspricht einer Verteilung im Intervall $[0,\varepsilon]$

$$\Rightarrow G(x) = \widehat{G}(x) \quad \forall x \in [0, \varepsilon]\,,$$

d.h. G muss eine Erweiterung von $\widehat{G}$ sein.

Es bleibt noch zu zeigen: Es gibt nur eine Erweiterung von $\widehat{G}$ auf dem ganzen Intervall $[0, M]$, die auch Lösung der verstärkten Gleichung [G3] sein kann.
Seien G und K zwei Lösungen der verstärkten Gleichung [G3] mit $G(x) = K(x) = \widehat{G}(x)\ \forall x \in [0, \varepsilon]$, dann gilt:

$$0 = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (G - K)(\alpha_i \cdot x) \quad \forall x \in [0, M]\,,$$

d.h. $(G - K) \in Ker(L)$.
Aus 4.4 wissen wir: die Funktion $(G - K)$ schwingt bei Null oder sie ist konstant gleich Null. Da $(G - K)(x) = 0\ \forall x \in [0, \varepsilon]$ kann die Funktion $(G - K)$ bei Null nicht schwingen und muss deswegen auf dem ganzen Intervall $[0, M]$ gleich Null sein, also müssen die zwei Erweiterungen G und K übereinstimmen.

4.8 Korollar

Sei $F(x) = 0\ \forall x \in [0, \varepsilon]$, dann gibt es höchstens eine Verteilung G, die Lösung von [G3] ist. Sie ist dann die einzige Lösung der verstärkten Gleichung [G2], die beliebig oft in der Null differenzierbar ist. (Beweis: 4.7)

5 Die schwache Gleichung [G1]

5.1 Vorbemerkung

Bei der schwachen Gleichung sind die Werte α_i nicht vorgegeben, sondern selbst wieder von G abhängig: $\alpha_i = G^{-1}(y_i)/\omega$, wobei jetzt die y_i bekannt sind.
Das ist im Prinzip ein anderes Problem, das anscheinend wenig mit der verstärkten Gleichung zu tun hat. Trotzdem kann man einige Eigenschaften der verstärkten Gleichung benutzen, um weitere Aussagen über die möglichen Lösungen der schwachen Gleichung zu machen, wie die folgenden zwei Beispiele zeigen:

5.2 Beispiel

Sei $N = 3$ (d.h. wir haben nur drei Gruppen von Versicherten). Die Schäden seien anzahlmässig so verteilt: $p_1 = 20\,\%$, $p_2 = 30\,\%$ und $p_3 = 50\,\%$.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass die Schäden eines Versicherten unter der Grenze $\omega = 1.5$ bleiben, seien, in Abhängigkeit der Gruppe, $y_1 = 45\,\%$, $y_2 = 50\,\%$ und $y_3 = 60\,\%$.
Über die Schadenhöheverteilung des ganzes Portefeuilles verfügen wir über folgende Information: $F(x) = 0.5 \cdot x - 0.09\bar{3} \cdot x^2 \ \forall x \in [0, 1.9]$ (Notation: $0.09\bar{3} = 0.093333\cdots$).

Bemerkung: Um konsistent zu bleiben, müssen $F(\omega)$ und $p_1 G_1(\omega) + p_2 G_2(\omega) + p_3 G_3(\omega)$ $(= p_1 \cdot y_1 + p_2 \cdot y_2 + p_3 \cdot y_3)$ übereinstimmen, was in unserem Fall erfüllt ist (beide sind 54%).

Bemerkung: Wenn die Verteilung G auch ein Polynom ist, dann muss sie von der folgenden Form sein:

$$\begin{aligned} G(x) = & \frac{0.5}{20\,\% \cdot \alpha_1 + 30\,\% \cdot \alpha_2 + 50\,\% \cdot \alpha_3} \cdot x \\ & - \frac{0.09\bar{3}}{20\,\% \cdot \alpha_1^2 + 30\,\% \cdot \alpha_2^2 + 50\,\% \cdot \alpha_3^2} \cdot x^2 \end{aligned}$$

Beweis: Seien

$$F(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j \quad \text{und} \quad G(x) = \sum_{h=0}^{q} b_h \cdot x^h .$$

Wenn wir diese Polynome in der Gleichung

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot G(\alpha_i \cdot x) \quad \forall x \in [0, M]$$

einsetzen, bekommen wir:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j &= \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \left(\sum_{h=0}^{q} b_h \cdot (\alpha_i \cdot x)^h \right) \\ &= \sum_{h=0}^{q} x^h \cdot \left(b_h \cdot \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (\alpha_i)^h \right) \quad \forall x \in [0, M] , \end{aligned}$$

was zu

$$b_h = a_h \Big/ \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (\alpha_i)^h \quad \forall h$$

äquivalent ist.

Nehmen wir an, sei G ein Polynom. Es muss gelten: $y_i = G_i(\omega)\ \forall i$, d.h.:

$$\begin{aligned} 45\,\% = {} & \frac{0.5}{20\,\% \cdot \alpha_1 + 30\,\% \cdot \alpha_2 + 50\,\% \cdot \alpha_3} \cdot (1.5\alpha_1) \\ & - \frac{0.09\bar{3}}{20\,\% \cdot (\alpha_1)^2 + 30\,\% \cdot (\alpha_2)^2 + 50\,\% \cdot (\alpha_3)^2} \cdot (1.5\alpha_1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50\,\% = {} & \frac{0.5}{20\,\% \cdot \alpha_1 + 30\,\% \cdot \alpha_2 + 50\,\% \cdot \alpha_3} \cdot (1.5\alpha_2) \\ & - \frac{0.09\bar{3}}{20\,\% \cdot (\alpha_1)^2 + 30\,\% \cdot (\alpha_2)^2 + 50\,\% \cdot (\alpha_3)^2} \cdot (1.5\alpha_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60\,\% = {} & \frac{0.5}{20\,\% \cdot \alpha_1 + 30\,\% \cdot \alpha_2 + 50\,\% \cdot \alpha_3} \cdot (1.5\alpha_3) \\ & - \frac{0.09\bar{3}}{20\,\% \cdot (\alpha_1)^2 + 30\,\% \cdot (\alpha_2)^2 + 50\,\% \cdot (\alpha_3)^2} \cdot (1.5\alpha_3)^2 \end{aligned}$$

Die gesuchten Werte α_1, α_2 und α_3 sind bis auf Multiplikation eines Massstabparameters bestimmt, d.h.: oBdA: $\alpha_3 = 1$.

Also haben wir 3 Gleichungen für nur 2 Unbekannte, was normalerweise unlösbar ist. Aber die Bedingung $F(\omega) = p_1 G_1(\omega) + p_2 G_2(\omega) + p_3 G_3(\omega)$ sagt uns genau, dass die drei Gleichungen linear abhängig sind, und deswegen können wir, zum Beispiel, die dritte Gleichung auslassen.

$$\begin{aligned} 45\,\% = {} & \frac{0.5}{20\,\% \cdot \alpha_1 + 30\,\% \cdot \alpha_2 + 50\,\% \cdot \alpha_3} \cdot (1.5\alpha_1) \\ & - \frac{0.09\bar{3}}{20\,\% \cdot (\alpha_1)^2 + 30\,\% \cdot (\alpha_2)^2 + 50\,\% \cdot (\alpha_3)^2} \cdot (1.5\alpha_1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50\,\% = {} & \frac{0.5}{20\,\% \cdot \alpha_1 + 30\,\% \cdot \alpha_2 + 50\,\% \cdot \alpha_3} \cdot (1.5\alpha_2) \\ & - \frac{0.09\bar{3}}{20\,\% \cdot (\alpha_1)^2 + 30\,\% \cdot (\alpha_2)^2 + 50\,\% \cdot (\alpha_3)^2} \cdot (1.5\alpha_2)^2 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt nur eine Lösung: $\alpha_1 \cong 0{,}6426\ldots$ und $\alpha_2 \cong 0{,}7444$. Wenn wir diese Werte in den Ausdruck

$$\begin{aligned} G(x) = &\frac{0.5}{20\,\% \cdot \alpha_1 + 30\,\% \cdot \alpha_2 + 50\,\% \cdot \alpha_3} \cdot x \\ &- \frac{0.09\bar{3}}{20\,\% \cdot \alpha_1^2 + 30\,\% \cdot \alpha_2^2 + 50\,\% \cdot \alpha_3^2} \cdot x^2 \end{aligned}$$

einsetzen, erhalten wir $G(x) \cong 0{,}5870 \cdot x - 0{,}1246 \cdot x^2$ als einzige polynomiale Lösung der schwachen Gleichung.

Die Funktion G ist monoton steigend, positiv und kleiner als 1 auf ihrem Definitionsbereich $[0, 1.9]$, also ist sie eine brauchbare Lösung (da sie sich zu einer Verteilung erweitern lässt).

Zusätzlich gilt: G ist die einzige Lösung der schwachen Gleichung, die eine Verteilung sein kann.

Beweis: Gäbe es eine zweite Lösung K, dann wäre diese Verteilung auch eine Lösung einer verstärkten Gleichung:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot K(\beta_i \cdot x)\,,$$

wobei $\beta_i := K^{-1}(y_i)/1.5$. Diese verstärkte Gleichung besitzt auch eine Lösung P, die ein Polynom ist:

$$\begin{aligned} P(x) = &\frac{0.5}{20\,\% \cdot \beta_1 + 30\,\% \cdot \beta_2 + 50\,\% \cdot \beta_3} \cdot x \\ &- \frac{0.09\bar{3}}{20\,\% \cdot \beta_1^2 + 30\,\% \cdot \beta_2^2 + 50\,\% \cdot \beta_3^2} \cdot x^2 \end{aligned}$$

Andererseits, wenn wir die Konstante ϱ dieser verstärkten Gleichung berechnen (Lemma 4.4), bekommen wir:

$$\varrho = -\log\left((p_1 + p_2)/p_3\right) / \log(\beta_2) = -\log(1)/\log(\beta_2) = 0\,,$$

unabhängig von β_2.

Aus 4.7 und $\varrho = 0$ folgt: P ist die einzige Funktion, die auch eine Verteilung sein kann. Also ist entweder $K = P$ oder K ist keine Verteilung. Aber wenn $K = P$, dann hätte K schon als Lösung des früheren Gleichungssystems auftauchen müssen.

Fazit: Die erwarteten Schadenaufwände (in den drei Gruppen) für unlimitierte Schäden sind durch die schwache Gleichung und die gesamte Schadenlast eindeutig bestimmt und proportional zu: $1/\alpha_1 \cong 1{,}5560$, $1/\alpha_2 \cong 1{,}3433$ und $1/\alpha_3 = 1$.

5.3 Beispiel

Sei $N = 3$. Die Schäden seien anzahlmässig so verteilt: $p_1 = 20\,\%$, $p_2 = 25\,\%$ und $p_3 = 55\,\%$.
Die Wahrscheinlichkeiten, dass die Schäden eines Versicherten unter der Grenze $\omega = 1.5$ bleiben, seien, in Abhängigkeit der Gruppe, $y_1 = 45\,\%$, $y_2 = 50\,\%$ und $y_3 = 60\,\%$.
Sei nun

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0.5 \\ 0.545(x - 0.5) & \forall x \in (0.5, 2] \end{cases}$$

Die Konsistenzbedingung $F(\omega) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3$ ist erfüllt.

Da $p_3 > p_1 + p_2$, können wir 3.1 anwenden (oBdA: $\alpha_3 = 1$):

$$G(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{0.55} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(\frac{0.2}{0.55}\right)^i \left(\frac{0.25}{0.55}\right)^{m-i} \cdot F(\alpha_1^i \alpha_2^{m-i} \cdot x)\,.$$

Wenn wir das Gleichungssystem

$$G(1.5 \cdot \alpha_1) = 45\,\%$$
$$G(1.5 \cdot \alpha_2) = 50\,\%$$

numerisch nach α_1 und α_2 lösen, erhalten wir als einzige Lösung:

$$\alpha_1 \cong 0{,}8296 \quad \text{und} \quad \alpha_2 \cong 0{,}8862\,.$$

Wenn wir diese Werte in den früheren Ausdruck einsetzen, erhalten wir eine Funktion G, die monoton steigend, positiv und kleiner als 1 im Definitionsbereich ist.

Zeige: G ist die einzige Verteilung, die Lösung der schwachen Gleichung ist.

Beweis: Gäbe es eine zweite Lösung K, dann wäre diese Verteilung auch eine Lösung einer verstärkten Gleichung:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot K(\beta_i \cdot x)\,, \quad \text{wobei } \beta_i := K^{-1}(y_i)/1.5 \quad .$$

Anderseits ist eine Lösung der verstärkten Gleichung die Folgende:

$$D(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{0.55} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(\frac{0.2}{0.55}\right)^i \left(\frac{0.25}{0.55}\right)^{m-i} \cdot F\left((\beta_1/\beta_3)^i(\beta_2/\beta_3)^{m-i} \cdot x/\beta_3\right) \,.$$

$\beta_i := K^{-1}(y_i)/1.5$, $y_3 > y_2, y_1$ und K ist eine Verteilung $\Rightarrow \beta_3 > \beta_2, \beta_1 \Rightarrow$

$$F((\beta_1/\beta_3)^i(\beta_2/\beta_3)^{m-i} \cdot x/\beta_3) = 0 \quad \forall x \leq 0.5 \cdot \beta_3\,, \quad \forall m = 0, 1, 2, \ldots \quad \forall i = 0, 1, \ldots, m$$

und deswegen

$$D(x) = 0 \quad \forall x \leq 0.5 \cdot \beta_3\,.$$

Insbesondere ist D beliebig oft in Null differenzierbar. Aus 4.8: D ist die einzige Lösung der verstärkten Gleichung, die eine Verteilung sein kann.

$\Rightarrow K = D$ und deswegen stimmt K mit G (bis auf den Massstabparameter β_3) überein.

Dank
Der Autor bedankt sich bei den Referenten für ihre wertvollen Anregungen, die die Qualität und Verständlichkeit des Artikels entscheidend verbessert haben.

Dino Toniolo
Swiss Reinsurance Company
Mythenquai 50/60
CH-8022 Zürich
Tel: 043 285 68 39
Fax: 043 282 68 39
Email: dino_toniolo@swissre.com

Zusammenfassung

Man untersucht das folgende Problem: gegeben sei ein segmentiertes Portefeuille, mit bekannter Schadenerfahrung in jedem Segment. Man bestimme für jedes Segment die Risikoprämie.
Die Schadenhöhenverteilung des gesamten Portefeuilles erfüllt die funktionale Gleichung $F = \sum_{i=1,\ldots,N} p_i \cdot G_i$. Dabei bezeichnen wir mit G_i die Schadenhöhenverteilung im Segment i und mit p_i den Quotienten gebildet aus der Anzahl Schäden im Segment i und der Gesamtanzahl der Schäden im Portefeuille. Man nimmt an, dass die Verteilung F in einem beschränkten Intervall gegeben sei, und dass eine Verteilung G und positive Werte α_i existieren so dass $G_i(x) = G(\alpha_i \cdot x)$ $\forall x$. Weiter sei für jede Verteilung G_i der Wert an einer festen Stelle ω bekannt.
Sind anstelle dieser letzten Bedingung die Werte α_i bekannt und ist die Funktion F unendlich oft differenzierbar und genügend „flach„ bei Null, so lässt sich die Verteilung G und somit auch die Risikoprämien eindeutig bestimmen. Dieses Resultat wird verwendet um einige einfache Fälle des ursprünglichen Problems, wo die Werte α_i nicht bekannt sind, zu lösen.

Résumé

On considère le problème suivant: soit un portefeuille muni d'une segmentation, pour lequel on connaît le coût des sinistres dans chaque segment, quelles sont les primes de risque des différents segments?
La distribution du coût des sinistres sur l'ensemble du portefeuille satisfait l'équation fonctionnelle $F = \sum_{i=1,\ldots,N} p_i \cdot G_i$, où G_i désigne la distribution des sinistres dans un segment i et p_i le quotient du nombre de sinistres du segment par le nombre de sinistres du portefeuille. On suppose que la distribution F est donnée dans un intervalle borné, qu'il existe une distribution G et des valeurs positives α_i, telles que $G_i(x) = G(\alpha_i \cdot x)$ $\forall x$ et que la valeur de chacune des distributions G_i est connue pour une valeur donnée ω. On remplace cette dernière hypothèse par la condition que les valeurs α_i sont connues.
On démontre que, si la fonction F est indéfiniment différentiable et suffisamment „plate„ près de zéro, alors la distribution G est déterminée de façon unique. Il s'ensuit que les primes de risque sont déterminées de façon unique. On utilise ce résultat pour résoudre des cas particuliers du problème original, où les valeurs α_i ne sont pas connues.

Summary

We examine the functional equation $F = \sum_{i=1\ldots N} p_i \cdot G_i$, where F is the claims amount distribution of the whole portfolio, G_i the (unknown) claim amount distributions of a given segment i and p_i the part of the claims related to this segment. Assuming that the distribution F is known on a limited interval, that the distributions G_i have the same shape (i.e. there are a distribution G and some positive values α_i, so that $G_i(x) = G(\alpha_i \cdot x)$ $\forall x$) and that the values of these distributions are also known in a given point (i.e. $G_i(\omega)$ known $\forall i$ and for a given value ω), we try to estimate the risk premium of each segments.
It is proved that the distribution G can be determined, if the value α_i are known, if the distribution F of the whole portfolio is infinitely often differentiable (but not necessarily analytical) and „enough" flat in the proximity of zero.
Further we will use this results to solve some particular cases of the original problem, where the values α_i are also unknown.