

Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries
Herausgeber: Schweizerische Aktuarvereinigung
Band: - (1998)
Heft: 2

Artikel: Optimale Gestaltung von Kapitalschutzprodukten auf den SMI
Autor: Blanco, José Antonio / Guillet, Pascal / Müller, Heinz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-551297>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

JOSÉ ANTONIO BLANCO, PASCAL GUILLET, HEINZ MÜLLER,
DANA SCHERER, Zürich und St. Gallen

Optimale Gestaltung von Kapitalschutzprodukten auf den SMI

Übersicht

1	Einleitung	212
2	Theoretische Aspekte	214
2.1	“Two date“-Modell: Call-Optionen mit beliebigen Ausübungspreisen	215
2.1.a	“Payoff“-Funktionen	215
2.1.b	Bewertung von “Payoff“-Funktionen im Black/Scholes-Modell	216
2.1.c	Marktmodell für die Risikoallokation	217
2.1.d	Marktmodell mit repräsentativem Investor	220
2.2	“Two date“-Modell: Unvollständiger Markt	221
3	Optimales Kapitalschutzprodukt auf den SMIC	221
3.1	Konstruktion des Kapitalschutzproduktes	222
3.2	Modellvarianten	224
3.2.a	Standardmodell	224
3.2.b	Unrestringiertes Modell	225
3.3	Wahl der Parameter	225
3.4	Durchführung der Optimierung	226
3.4.a	“Monte Carlo“-Simulation	226
3.4.b	Optimierung mit “Grid Search“-Verfahren	226
3.5	Diskussion der Resultate	228
4	Möglichkeit zur Verallgemeinerung	229
5	Schlussbemerkungen	230
	Literatur	231
	Zusammenfassung	232

1 Einleitung

Auf dem schweizerischen Finanzmarkt sind Kapitalschutzprodukte für Pensionskassen mit tiefem Deckungsgrad, sowie für private Investoren, welche ihr Vermögen vor massiven Börseneinbrüchen schützen wollen, von besonderem Interesse. Diese Arbeit konzentriert sich auf die optimale Gestaltung von Kapitalschutzprodukten auf den SMIC (gleiche Zusammensetzung wie der SMI¹, aber mit Dividendenreinvestition) für private Investoren. Wie aus Abbildung 1 hervorgeht, erreichte der SMIC am 1. Januar 1997 einen Indexstand von $S_0 = 4\,732.4$.

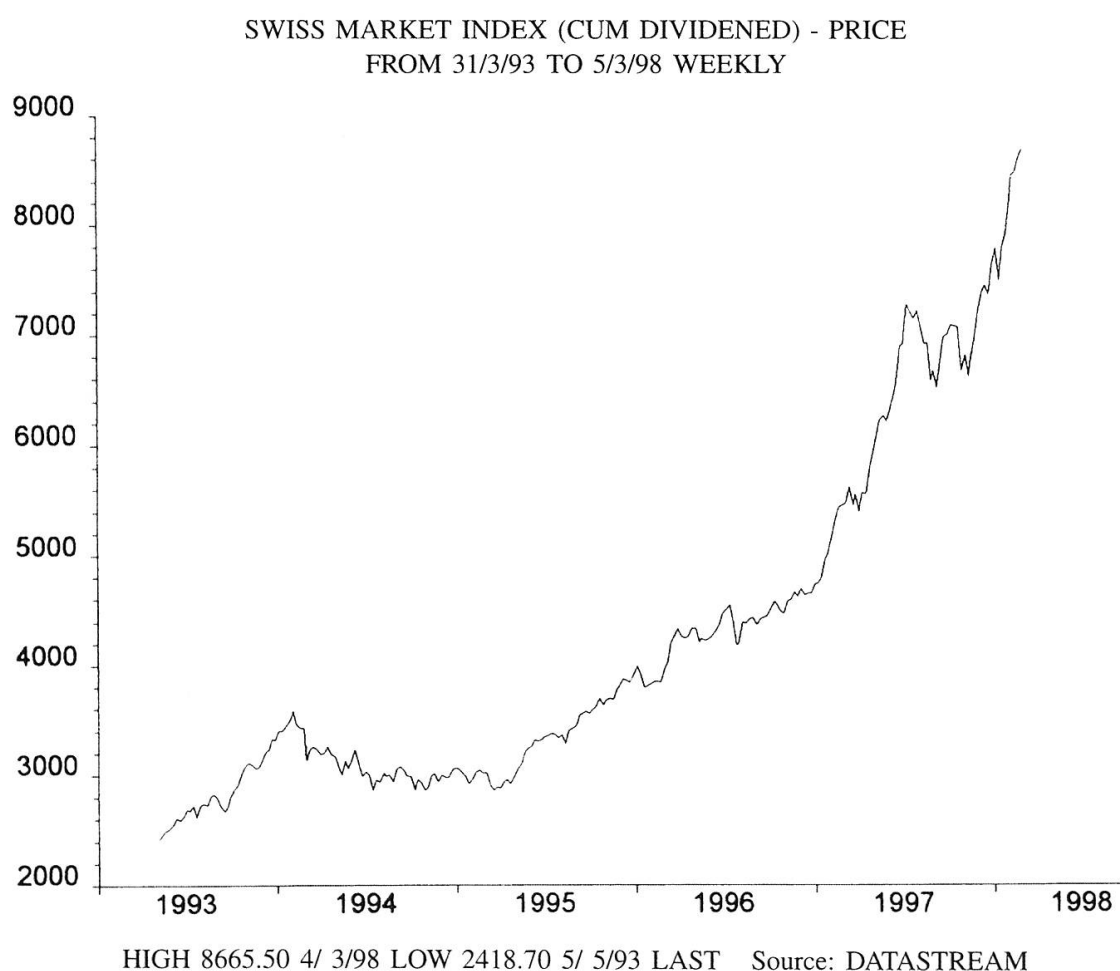


Abb. 1: Indexentwicklung des SMIC

Zu diesem Zeitpunkt war der Indexstand am Jahresende als stochastische Grösse S zu betrachten. Bei der Gestaltung eines Kapitalschutzproduktes geht es um

¹ Swiss Market Index

die Ermittlung einer Auszahlungsfunktion $h(S)$, welche beispielsweise durch die Kombinationen "Kauf Indexportfolio, Kauf Put, Verkauf Call" oder "Geldmarktanlage, Kauf Call, Verkauf Call" generiert werden kann (siehe Abbildung 2). Bei der optimalen Gestaltung stehen folgende Fragen im Vordergrund:

1. Soll ein "Cap" gesetzt werden ($M < \infty$)?
2. Wie sind die Ausübungspreise $k_1 S_0, k_2 S_0$ sowie der "Floor" $m S_0$ und der "Cap" $M S_0$ zu setzen?

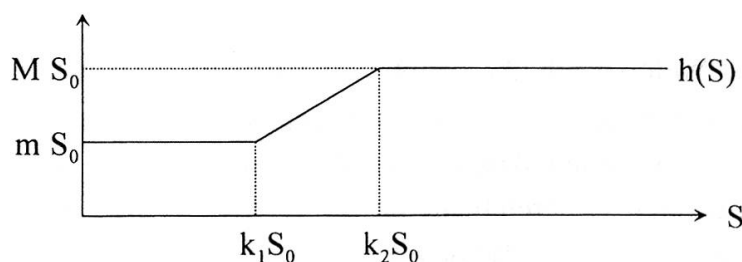


Abb. 2: Gestaltung eines Kapitalschutzproduktes

Wegen des Auftretens von Optionen ist die "mean variance" Analyse als Optimierungsansatz ungeeignet. In Analogie zu den Studien von BRENNAN (1979), LELAND (1980), BRENNAN/SOLANKI (1981), BENNINGA/BLUME (1985) wird deshalb Erwartungsnutzenmaximierung unterstellt.

Seit der Arbeit von BENNINGA/BLUME (1985) ist es sehr umstritten, ob einfache "Portfolio insurance"-Strategien ($k_2 = \infty$) für private Investoren zweckmässig sind. Für den Fall, dass eine Geldmarktanlage, ein Aktienindex sowie eine Put-Option auf diesen Aktienindex als Anlagemöglichkeiten zur Verfügung stehen, ermittelten diese Autoren optimale Anlagestrategien für Investoren mit unterschiedlicher Risikoaversion. In keinem Fall war es optimal, beim Put eine "long"-Position einzugehen. Um dieses Argument zu entkräften, gehen wir in Abschnitt 2 auf die theoretischen Grundlagen zur Konstruktion von Kapitalschutzprodukten ein. Zuerst wird anhand der Arbeiten von CONSTANTINIDES (1982) und LELAND (1980) der Zusammenhang zwischen dem Einsatz von Optionen und "Risk Sharing" auf den Finanzmärkten erläutert. Insbesondere wird dabei auf das BLACK/SCHOLES-Modell (1973) Bezug genommen. Anschliessend wird gezeigt, dass die erwähnten Ergebnisse von BENNINGA/BLUME (1985), S. 1349–1350 auf einer einseitigen Parameterwahl beruhen,

In Abschnitt 3 wird die Konstruktion eines Kapitalschutzproduktes erläutert. Anschliessend werden ein Standardmodell und ein unrestringiertes Modell präsentiert und mit Hilfe von "Monte Carlo"-Simulationen analysiert. Beim unrestringierten

Modell ist lediglich eine Minimalrendite zu garantieren. Die optimalen Ausübungspreise $k_1 S_0$, $k_2 S_0$ sowie der "Floor" $m S_0$ und der "Cap" $M S_0$ resultieren dann aus einer Erwartungsnutzenmaximierung. Beim Standardmodell wird zusätzlich verlangt, dass bei einer Umsetzung der Anlagestrategie durch "Kauf Indexportfolio, Kauf Put, Verkauf Call" keine Geldmarktposition entsteht. Für beide Modelle erfolgt die Optimierung durch "Grid search" und "Monte Carlo"-Simulation. Für die Renditeverteilungen und die Optionspreise wird der BLACK/SCHOLES-Ansatz (1973) unterstellt. Aufgrund der Simulationsrechnungen gelangen wir zu folgenden Resultaten:

1. Der "Cap" sollte, wenn überhaupt, sehr hoch angesetzt werden.
2. Wie zu erwarten, reagiert die Aktien-"exposure" beim unrestringierten Modell viel sensibler auf Änderungen der Risikoaversion als beim Standardmodell. Zudem resultieren beim unrestringierten Modell bei geringer Risikoaversion sehr hohe Werte für den Ausübungspreis $k_1 S_0$. In diesen Fällen kann der Investor nur an sehr hohen Aktienkursgewinnen, dafür aber mit einem hohen "leverage", partizipieren.

In Abschnitt 4 wird kurz auf Ansätze von SHIMKO (1993), BREEDEN/LITZENBERGER (1978) und RUBINSTEIN (1994) eingegangen. Mit Hilfe dieser Ansätze wäre es möglich, auf die BLACK/SCHOLES-Annahmen in der Simulationsstudie zu verzichten. Die Hauptergebnisse der Studie werden in Abschnitt 5 zusammengefasst.

2 Theoretische Aspekte

In der ganzen Arbeit wird angenommen, dass als Anlagemöglichkeiten der Geldmarkt mit einem konstanten stetigen Zinssatz r und der SMIC zur Verfügung stehen. Bei einem vollständigen Markt mit kontinuierlichem Handel lassen sich Optionen durch dynamische Strategien replizieren und sind deshalb redundant. Im folgenden beschränken wir uns auf den Fall, bei welchem der Handel nur in zwei Zeitpunkten, z. B. Jahresanfang und Jahresende stattfindet. Dieses "Two date"-Modell wurde in der Literatur u. a. von BRENNAN (1979), LELAND (1980), BRENNAN/SOLANKI (1981), CONSTANTINIDES (1982) und BENNINGA/BLUME (1985) untersucht. In diesem Abschnitt wird kurz auf diejenigen Ergebnisse eingegangen, welche für unsere Fragestellung von zentraler Bedeutung sind.

2.1 "Two Date"-Modell: Call-Optionen mit beliebigen Ausübungspreisen

Im untenstehenden Schema sind die Anlagemöglichkeiten, sowie deren Preise in den Zeitpunkten 0 und 1 wiedergegeben. Der Preis des SMIC im Zeitpunkt 0 wird auf $S_0 = 1$ normiert.

	Preis im Zeitpunkt 0	Preis im Zeitpunkt 1
Geldmarkt	1	e^r
SMIC	$S_0 = 1$	S
Calls auf den SMIC mit Ausübungspreis k	$c(k)$	$\max(0, S - k)$

2.1.a "Payoff"-Funktionen

Durch Anlagen im Geldmarkt, im SMIC, sowie endlich vielen "long"- und "short"-Positionen in Calls mit unterschiedlichen Ausübungspreisen k lassen sich für den Zeitpunkt 1 beliebige stückweise lineare "Payoff"-Funktionen $h(S)$ generieren (siehe Abbildung 3a). LELAND (1980) wies nach, dass sich durch den Einsatz unendlich vieler Optionen beliebige (stetige) "Payoff"-Funktionen konstruieren lassen (siehe Abbildung 3b).

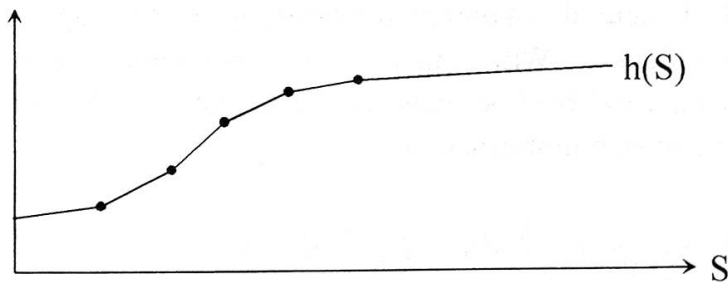


Abb. 3a: Einsatz endlich vieler Optionen

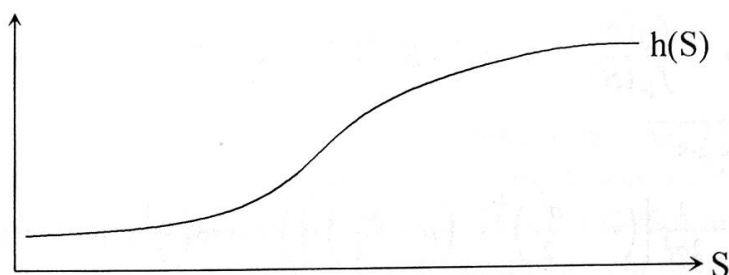


Abb. 3b: Einsatz unendlich vieler Optionen

2.1.b Bewertung von "Payoff"-Funktionen im BLACK/SCHOLES-Modell

Gemäss dem BLACK/SCHOLES-Modell ist S lognormal verteilt, d. h. es gilt

$$\ln(S) \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma\right)$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichte ist durch

$$f_P(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma S} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln S - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2\right)$$

gegeben.

Soll der Wert V einer "Payoff"-Funktion $h(S)$ im Zeitpunkt 0 ermittelt werden, so ist anstelle der wahren Wahrscheinlichkeit mit der Dichte $f_P(S)$ die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit mit der Dichte

$$f_Q(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma S} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln S - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2\right)$$

zu verwenden und es gilt

$$V = e^{-r} \int_0^{\infty} h(S) f_Q(S) dS = e^{-r} E_Q[h(S)] \quad (1)$$

Somit entspricht V dem abdiskontierten Erwartungswert bezüglich der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit. Will man auf die Verwendung einer risikoneutralen Wahrscheinlichkeit verzichten, so muss eine Preisdichte $\pi(S)$ verwendet werden und Formel (1) lässt sich umformen in

$$V = \int_0^{\infty} h(S) \pi(S) f_P(S) dS = E_P[h(S) \pi(S)]$$

wobei²

$$\pi(S) = e^{-r} \frac{f_Q(S)}{f_P(S)} = b \cdot e^{-r} \cdot S^{-\frac{\mu-r}{\sigma^2}}$$

² Für die Konstante gilt

$$b = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2\right]\right) = \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} (\mu - r)(\mu - r - \sigma^2)\right)$$

Für $r = \ln 1.03 = 2.96\%$, $\mu = \ln 1.075 = 7.23\%$ und $\sigma = 17.1\%$ erhält man die in Abbildung 4 dargestellte Preisdichte

$$\pi(S) = 1.0239 \cdot S^{-1.46}$$

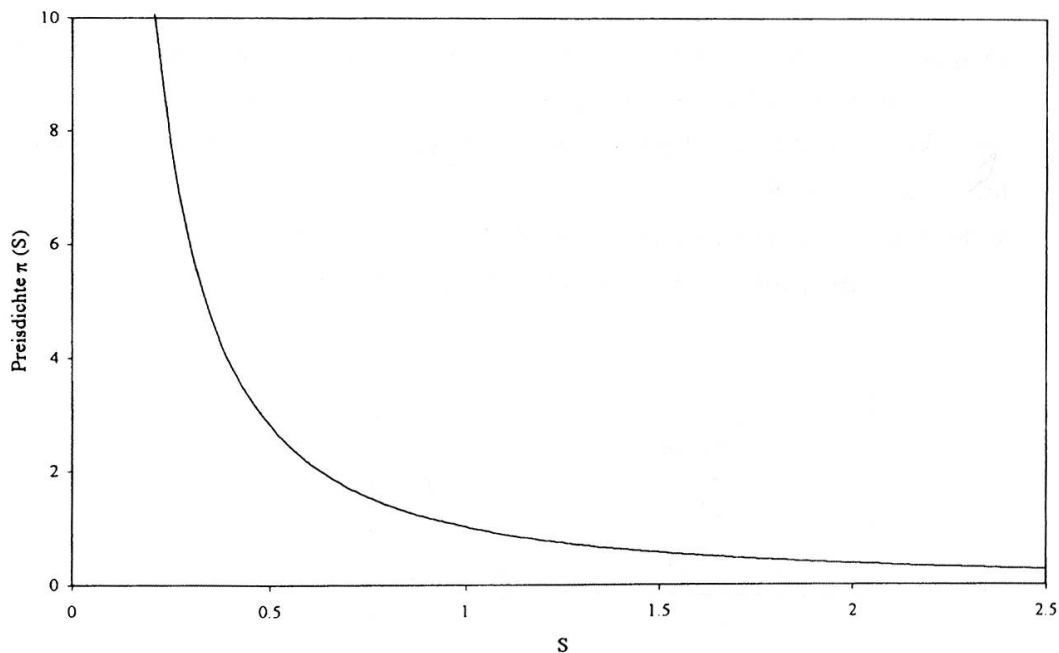


Abb. 4: Preisdichte $\pi(S)$

Die monoton fallende Preisdichte hat beispielsweise zur Folge, dass bei Investitionen in Calls ein höherer Ausübungspreis zu einem höheren Erwartungswert der Rendite führt.

Als nächstes betrachten wir das Risikoaustauschmodell für Finanzmärkte, welches von CONSTANTINIDES (1982) entwickelt wurde. Auch hier spielt die Preisdichte eine zentrale Rolle.

2.1.c Marktmodell für die Risikoallokation

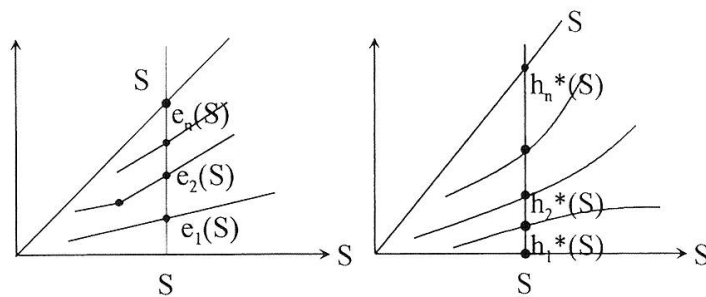
Die Analyse der Risikoallokation auf Finanzmärkten geht auf DEBREU (1959), ARROW (1964) und CONSTANTINIDES (1982) zurück. Der Risikoaustausch auf Versicherungsmärkten wurde insbesondere von BORCH (1960) und BÜHLMANN (1984) untersucht. Bezogen auf unsere Problemstellung sieht das Marktmodell für die Risikoallokation wie folgt aus:

- n Investoren $i = 1, \dots, n$ verfügen im Zeitpunkt 0 über Ansprüche auf "Payoffs" $e_i(S)$ im Zeitpunkt 1 und es gilt

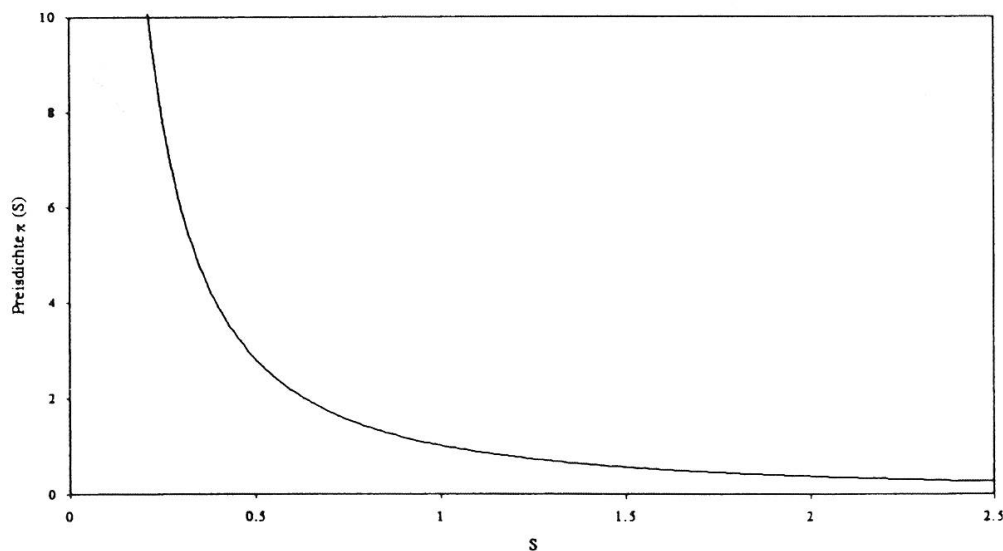
$$\sum_{i=1}^n e_i(S) = S \quad (2)$$

In unserem Problem entspricht die Zufallsvariable S dem Wert des SMIC im Zeitpunkt 1 und Bedingung (2) bringt zum Ausdruck, dass die Investoren über Aktienanteile und Optionsrechte Anspruch auf die gesamte Börsenkapitalisierung S haben.

- Jeder Investor i tauscht seinen Anspruch $e_i(S)$ gegen eine "Payoff"-Funktion $h_i(S)$ und maximiert seinen Erwartungsnutzen $E\{u_i[h_i(S)]\}$.



a) Ansprüche auf "Payoff" b) Gleichgewichtsallokation



c) Preisdichte

Abb. 5: Marktmodell für Risikoallokationen

Ein Marktgleichgewicht (vgl. Abbildung 5) besteht aus "Payoff"-Funktionen $h_1^*(S), \dots, h_n^*(S)$ und einer Preisdichte $\pi(S)$, so dass gilt:

- 1) $h_i^*(S)$ ist Lösung von $\max_{h_i(S)} E\{u_i[h_i(S)]\}$
 unter $E\{\pi(S) \cdot h_i(S)\} = E\{\pi(S) \cdot e_i(S)\}$
- 2) $\sum_{i=1}^n h_i^*(S) = S$

Für risikoaverse Investoren erhält man unter schwachen Annahmen folgende Resultate (siehe z.B. BÜHLMANN (1984) oder CHEVALLIER/MUELLER (1994):

1. Es existiert immer ein Marktgleichgewicht und es gilt
 - Die "Payoff"-Funktionen $h_i^*(S)$, $i = 1, \dots, n$ sind strikt monoton wachsend.
 - Die Preisdichte $\pi(S)$ ist strikt monoton fallend.
2. Im Marktgleichgewicht lassen sich die "Payoff"-Funktionen wie folgt charakterisieren:

$$u'_i[h_i^*(S)] = \text{const} \cdot \pi(S) \quad \text{für alle } S \quad (3)$$

3. Der Markt lässt sich durch einen fiktiven repräsentativen Investor darstellen, dessen Grenznutzen mit der Preisdichte übereinstimmt, d. h.

$$u'_M(S) = \pi(S) \quad \text{für alle } S \quad (4)$$

Beispiel (Black/Scholes-Modell). In 2.1.b wurde für das BLACK/SCHOLES-Modell die Preisdichte

$$\pi(S) = b \cdot e^{-r} \cdot S^{-\frac{\mu-r}{\sigma^2}}$$

ermittelt. Gemäss (4) ist somit die Nutzenfunktion des repräsentativen Investors durch

$$u_M(S) = \text{const} \cdot S^{-\gamma_M}, \quad \text{wobei } \gamma_M = \frac{\mu-r}{\sigma^2} - 1$$

gegeben und seine relative Risikoaversion beträgt $\gamma_M + 1 = \frac{\mu-r}{\sigma^2}$.

Für das Zahlenbeispiel in 2.1.b $r = \ln 1.03 = 2.96\%$, $\mu = \ln 1.075 = 7.23\%$, $\sigma = 17.1\%$ resultiert eine relative Risikoaversion von $\gamma_M + 1 = 1.46$ und die folgende Nutzenfunktion

$$u_M(S) = -\text{const} \cdot S^{-0.46}$$

2.1.d Marktmodell mit repräsentativem Investor

In Analogie zu LELAND (1980) wird in diesem Abschnitt direkt von einem repräsentativen Investor ausgegangen. Seine Nutzenfunktion sei vom Typ

$$u_M(w) = -\frac{1}{\gamma_M} w^{-\gamma_M}, \quad \gamma_M > 0$$

Für den Investor, welcher an einem Kapitalschutzprodukt interessiert ist, unterstellen wir eine Nutzenfunktion

$$u(w) = -\frac{1}{\gamma} (w - a)^{-\gamma}, \quad w > a, \quad a \geq 0, \quad \gamma > 0 \quad (5)$$

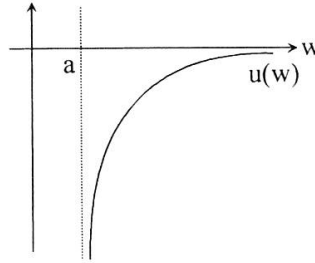


Abb. 6: Nutzenfunktion eines Investors

Eine Parameterwahl von $a > 0$ bringt dabei zum Ausdruck, dass der Investor einen Totalverlust seines Einsatzes nicht verkraften kann. Aufgrund der Resultate (3) und (4) in Abschnitt 2.1.c gilt für die optimale ‘Payoff’-Funktion $h^*(S)$ des Investors

$$u'[h^*(S)] = \text{const} \cdot u'_M(S)$$

respektive

$$[h^*(S) - a]^{-(\gamma+1)} = \text{const} \cdot S^{-(\gamma_M+1)}$$

$$h^*(S) = a + \text{const} \cdot S^{\frac{\gamma_M+1}{\gamma+1}}$$

Wie aus Abbildung 7 hervorgeht, resultiert für $\gamma > \gamma_M$ eine konkave und für $\gamma < \gamma_M$ eine konvexe ‘Payoff’-Funktion $h^*(S)$.

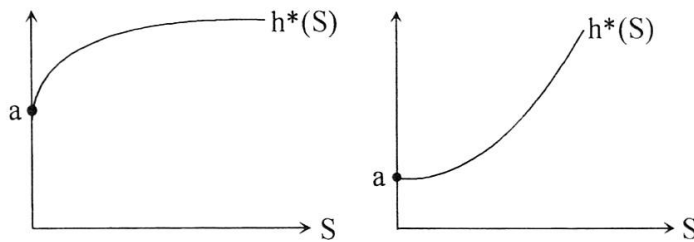


Abb. 7: Konkave und konvexe ‘Payoff’-Funktionen

Zum Abschluss des theoretischen Teils gehen wir kurz auf die Resultate von BENNINGA/BLUME (1985) für ein "Two date"-Modell mit unvollständigem Markt ein.

2.2 "Two date"-Modell: Unvollständiger Markt

In ihrem Artikel gehen BENNINGA/BLUME (1985) unter anderem auf ein "Two date"-Modell ein (pp. 1349–1350), bei dem als Anlagemöglichkeiten der Geldmarkt, ein Aktienindex, sowie eine Put-Option auf den Aktienindex mit wählbarem Ausübungspreis zur Verfügung stehen. Ausgehend von den BLACK/SCHOLES-Annahmen berechnen die Autoren die optimalen Anlagestrategien für Investoren mit Nutzenfunktionen

$$u(w) = -\frac{1}{\gamma} w^{-\gamma}, \quad \gamma > 0$$

für verschiedene Werte von γ . Für alle gewählten γ -Werte war es optimal, beim Put "short"-Positionen einzugehen. Aufgrund dieses Resultates wird häufig argumentiert, dass einfache "Portfolio insurance"-Strategien für Investoren mit normalen Präferenzen unzuweckmässig seien.

Wie wir gesehen haben, führen die BLACK/SCHOLES-Annahmen zu einem repräsentativen Investor, dessen Nutzenfunktion durch (5) gegeben ist. Aus Tabelle II, p. 1350 in BENNINGA/BLUME (1985) geht hervor, dass für die Berechnungen Parameterwerte $\gamma_M \leq 0.25$ und $\gamma \geq 1$ verwendet wurden. Wegen $\gamma > \gamma_M$ würde deshalb beim Modell in Abschnitt 2.1.d immer eine konkave "Payoff"-Funktion $h^*(S)$ gewählt. Somit ist es nicht erstaunlich, dass im Falle eines unvollständigen Marktes für den Put immer eine "short"-Position gewählt wird. Folglich sind die Resultate von BENNINGA/BLUME (1985) auf eine einseitige Parameterwahl zurückzuführen und stellen keinen grundsätzlichen Einwand gegen Kapitalschutzprodukte dar.

3 Optimales Kapitalschutzprodukt auf den SMIC

In diesem Abschnitt geht es um die Gestaltung eines Kapitalschutzproduktes auf den SMIC. Die Konstruktion basiert auf der Strategie "Geldmarktanlage, Kauf Call, Verkauf Call" und es wird von den BLACK/SCHOLES-Annahmen ausgegangen.

3.1 Konstruktion des Kapitalschutzproduktes

Wie bereits in Abschnitt 2 erwähnt, wird der Kurs des SMIC im Zeitpunkt 0 auf $S_0 = 1$ normiert. Es werden folgende Annahmen getroffen:

1. Der Geldmarktzins beträgt $R_0 = e^r - 1$.
2. Der Kurs S des SMIC im Zeitpunkt 1 ist lognormal verteilt und durch

$$\ln(S) \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma\right)$$

gegeben. Somit gilt $E(S) = e^\mu$.

Für die später erfolgenden Simulationsrechnungen werden wir die Szenarien (I) und (II) verwenden:

Szenario	R_0	$e^\mu - 1$	σ
(I)	2 %	6.5 %	17.1 %
(II)	4 %	8.5 %	17.1 %

Durch die Anlage des Betrages 1 im Zeitpunkt 0 ist eine “Payoff”-Funktion $h(S)$ (gemäss Abbildung 8) zu generieren. Die optimale Wahl von k_1, k_2, m, M erfolgt durch Maximierung des Erwartungsnutzens von $h(S)$.

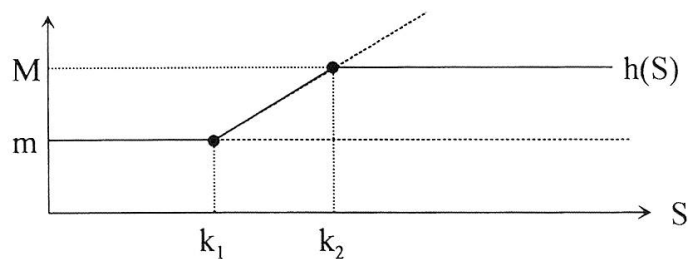


Abb. 8: Konstruktion des Kapitalschutzproduktes durch “Geldmarktanlage, Kauf Call(k_1), Verkauf Call(k_2)

Konstruktion von $h(S)$

1. Geldmarkt: Der Anteil x_{MM} wird in den Geldmarkt investiert.
2. ”Kauf Call(k_1), Verkauf Call(k_2)”: der Anteil $x_{BS} = 1 - x_{MM}$ wird in einen “Bull Spread” investiert, dessen Ertrag $g[S; k_1, k_2] = \max(0, \min(S - k_1, k_2 - k_1))$ beträgt (siehe Abbildung 9).

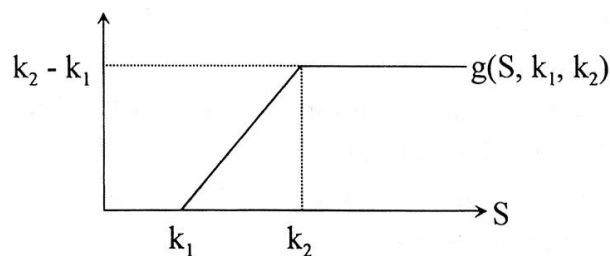


Abb. 9: Ertrag des "Bull Spreads"

Die Rendite des "Bull Spreads" beträgt

$$R_{BS}[S; k_1, k_2] = \frac{g[S; k_1, k_2]}{c(k_1) - c(k_2)} - 1$$

wobei die Preise für die europäischen Calls $c(k_1)$, $c(k_2)$ gemäss der BLACK/SCHOLES-Formel zu berechnen sind.

Die "Payoff"-Funktion lässt sich nun wie folgt darstellen

$$h(S) = x_{MM}(1 + R_0) + (1 - x_{MM})(1 + R_{BS}[S; k_1, k_2])$$

Optimierung. Dem Investor stehen die Entscheidungsvariablen x_{MM} , k_1 , k_2 zur Verfügung, um den Erwartungsnutzen der "Payoff"-Funktion

$$E\{u[h(S)]\} = E\left\{u\left[x_{MM}(1 + R_0) + (1 - x_{MM})(1 + R_{BS}[S; k_1, k_2])\right]\right\}$$

zu maximieren. Dabei werden Nutzenfunktionen vom Typ³

$$u(w) = -\frac{1}{\gamma}w^{-\gamma}, \quad \gamma > 0$$

unterstellt.

In unserer Analyse beschränken wir uns auf "Payoff"-Funktionen, welche einen Mindestertrag garantieren. Dies führt zur Nebenbedingung

$$(R.1) \quad h(S) \geq 1 - \bar{c} \quad \text{für alle } S$$

³ Bei unseren Simulationen wurden auch Nutzenfunktionen vom Typ

$u(w) = -\frac{1}{\gamma}(w - a)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, $a > 0$ verwendet. Weil dabei keine qualitativ neuen Ergebnisse resultieren, betrachten wir hier nur den Fall $a = 0$.

Beispielsweise müssten für $\bar{c} = 0.10$ mindestens 90 % des eingesetzten Kapitals zurückerstattet werden.

Die Simulationsrechnungen und Optimierungen wurden für zwei Modellvarianten durchgeführt. Beim "Standardmodell" werden zusätzliche Bedingungen an die "Payoff"-Funktion $h(S)$ gestellt, während beim "unrestringierten Modell" auf zusätzliche Restriktionen verzichtet wird.

3.2 Modellvarianten

3.2.a Standardmodell

Beim Standardmodell wird zusätzlich verlangt, dass eine Implementierung der "Payoff"-Funktion $h(S)$ durch "Kauf Indexportfolio, Kauf Put, Verkauf Call" zu keiner Geldmarktposition führen würde⁴. Dies führt zur Bedingung, dass

$$\frac{1}{1 + p(k_1) - c(k_2)}$$

"Bull Spreads"⁵ gehalten werden. Folglich muss gelten

$$x_{BS} = 1 - x_{MM} = \frac{c(k_1) - c(k_2)}{1 + p(k_1) - c(k_2)} \quad (6)$$

Aufgrund der europäischen "Put/Call"-Parität gilt

$$1 + p(k_1) - c(k_2) = k_1(1 + R_0)^{-1} + c(k_1) - c(k_2)$$

Einsetzen in (6) führt zur Zusatzrestriktion

$$(R.2) \quad x_{MM} = \frac{k_1(1 + R_0)^{-1}}{k_1(1 + R_0)^{-1} + c(k_1) - c(k_2)}$$

Somit lautet das Optimierungsproblem für das Standardmodell

$$\max_{x_{MM}, k_1, k_2} E \left\{ -\frac{1}{\gamma} \left[x_{MM}(1 + R_0) + (1 - x_{MM})(1 + R_{BS}[S; k_1, k_2]) \right]^{-\gamma} \right\}$$

⁴ Eine solche Restriktion ist in vielen Fällen durch die Fondsgesetze bedingt.

⁵ $p(k_1)$ bezeichnet den Preis eines europäischen Put mit Ausübungspreis k_1

unter

$$(R.1) \quad x_{MM}(1 + R_0) \geq 1 - \bar{c}$$

$$(R.2) \quad x_{MM} = \frac{k_1(1 + R_0)^{-1}}{k_1(1 + R_0)^{-1} + c(k_1) - c(k_2)}$$

3.2.b Unrestringiertes Modell

Beim unrestringierten Modell wird auf zusätzliche Restriktionen verzichtet und das Optimierungsproblem ist somit gegeben durch

$$\max_{x_{MM}, k_1, k_2} E \left\{ -\frac{1}{\gamma} \left[x_{MM}(1 + R_0) + (1 - x_{MM})(1 + R_{BS}[S; k_1, k_2]) \right]^{-\gamma} \right\}$$

unter

$$(R.1) \quad x_{MM}(1 + R_0) \geq 1 - \bar{c}$$

3.3 Wahl der Parameter

Wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt, werden die Simulationsrechnungen und Optimierungen für die beiden Szenarien

Szenario	$1 + R_0$	$E(S)$	$\sigma(\ln S)$	\bar{c}
(I)	1.02	1.065	17.1 %	10 %
(II)	1.04	1.085	17.1 %	10 %

vorgenommen. D. h. beim SMIC wird die Risikoprämie zum Geldmarkt jeweils mit 4.5 % und die Volatilität mit 17.1 % angesetzt.

Bei der Wahl des Parameters γ unterstellen wir, dass Investoren, welche in ein Kapitalschutzprodukt investieren, eine Aktienexposure von mindestens 70 % wünschen. Gemäss einem Modell von MERTON (1969), bei welchem ein kontinuierlicher Handel in einem Aktienindexportfolio und dem Geldmarkt möglich ist, resultiert ein Aktienanteil von

$$x^* = \frac{1}{1 + \gamma} \cdot \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

Verlangt man $x^* \geq 0.70$, so folgt aus dem MERTON-Ansatz

$$\gamma \leq \frac{1}{0.7} \cdot \frac{\mu - r}{\sigma^2} - 1$$

Für unsere Szenarien erhält man als relevanten Bereich $0 \leq \gamma \leq 1.1$.

3.4 Durchführung der Optimierung

3.4.a "Monte Carlo"-Simulation

Die lognormalverteilten Kurse S des SMIC wurden mit Hilfe der "Monte Carlo"-Methode simuliert. Im Detail wurde dabei wie folgt vorgegangen:

- Zuerst wurde mit der BOX/MULLER-Methode eine standardnormalverteilte Zufallsvariable simuliert. Anschliessend erfolgte eine Bereinigung der Ergebnisse mit antithetischen "moment matching"-Techniken.
- Die Standardnormalverteilung wurde in die entsprechende Lognormalverteilung transformiert. Total wurden mit dieser Methode 120 000 Realisationen des SMIC-Kurses $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(120\,000)}$ simuliert.

3.4.b Optimierung mit "Grid Search"-Verfahren

Die Optimierung erfolgte mit Hilfe eines "Grid Search"-Verfahrens. Beim Standardmodell wurde der "Grid" wie folgt angelegt:

$$k_1 \in K_1 = \{0.90, 0.92, 0.94, 0.95, 0.96, 0.97, 0.99, 1.01\}$$

$$k_2 \in K_2 = \{1.10, 1.20, 1.23, 1.26, 1.30, 1.40\}$$

Anschliessend wurden alle Tripel

$$(x_{MM}, k_1, k_2), \quad k_1 \in K_1, \quad k_2 \in K_2$$

ermittelt, welche die Bedingungen R.1, R.2 erfüllen.

Mit Hilfe der simulierten SMIC-Kurse $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(120\,000)}$ wurde für jedes zulässige Tripel (x_{MM}, k_1, k_2) der Wert der Zielfunktion $E\{u[h(S)]\}$ durch

$$\frac{1}{120\,000} \sum_{m=1}^{120\,000} u[h(S^{(m)})]$$

approximiert. Daraus resultierten die optimalen Werte (x_{MM}^*, k_1^*, k_2^*) , welche in Tabelle 1 wiedergegeben sind.

Szenario I: $R_0 = 2\%$						
γ	0.1	0.2	0.4	0.6	1	1.4
k_1^*	0.94	0.94	0.92	0.92	0.92	0.92
k_2^*	1.40	1.40	1.30	1.30	1.30	1.23
x_{mm}^*	89.4 %	89.4 %	88.4 %	88.4 %	88.4 %	88.9 %
Δ	65.5 %	65.5 %	65.0 %	65.0 %	65.0 %	59.0 %
$E[h(S) - 1]$	5.08 %	5.08 %	4.99 %	4.99 %	4.99 %	4.68 %
$c(k_1^*)$	11.2 %	11.2 %	12.5 %	12.5 %	12.5 %	12.5 %
$c(k_2^*)$	0.2 %	0.2 %	0.7 %	0.7 %	0.7 %	1.3 %

Szenario II: $R_0 = 4\%$						
γ	0.1	0.2	0.4	0.6	1	1.4
k_1^*	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92	0.90
k_2^*	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.20
x_{mm}^*	86.8 %	86.8 %	86.8 %	86.8 %	86.8 %	86.8 %
Δ	72.6 %	72.6 %	72.6 %	72.6 %	72.6 %	60.0 %
$E[h(S) - 1]$	7.35 %	7.35 %	7.35 %	7.35 %	7.35 %	6.65 %
$c(k_1^*)$	13.8 %	13.8 %	13.8 %	13.8 %	13.8 %	15.2 %
$c(k_2^*)$	0.3 %	0.3 %	0.3 %	0.3 %	0.3 %	2.1 %

Δ "Delta Exposure" des Kapitalschutzproduktes

$E[h(S) - 1]$ Erwartungswert der Rendite des Kapitalschutzproduktes

Tab. 1: Optimierung für das Standardmodell

Beim unrestringierten Modell wurde als "Grid"

$$x_{MM} \in M = \{0.87, 0.88, \dots, 0.94\}, \quad k_1 \in K_1, k_2 \in K_2$$

gewählt. Anschliessend wurde analog wie im Standardmodell vorgegangen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

Szenario I: $R_0 = 2\%$						
γ	0.1	0.2	0.4	0.6	1	1.4
k_1^*	0.99	0.99	0.95	0.92	0.90	0.90
k_2^*	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40
x_{mm}^*	89.0 %	89.0 %	89.0 %	89.0 %	89.0 %	90.0 %
Δ	77.2 %	77.2 %	69.7 %	64.2 %	60.7 %	55.2 %
$E[h(S) - 1]$	5.69 %	5.69 %	5.27 %	4.99 %	4.80 %	4.55 %
$c(k_1^*)$	8.3 %	8.3 %	10.6 %	12.5 %	13.9 %	13.9 %
$c(k_2^*)$	0.2 %	0.2 %	0.2 %	0.2 %	0.2 %	0.2 %

Szenario II: $R_0 = 4\%$						
γ	0.1	0.2	0.4	0.6	1	1.4
k_1^*	0.99	0.97	0.94	0.92	0.90	0.90
k_2^*	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40
x_{mm}^*	87.0 %	87.0 %	87.0 %	87.0 %	87.0 %	89.0 %
Δ	86.2 %	81.9 %	75.6 %	71.6 %	67.7 %	57.3 %
$E[h(S) - 1]$	8.07 %	7.84 %	7.51 %	7.30 %	7.10 %	6.62 %
$c(k_1^*)$	9.3 %	10.5 %	12.4 %	13.8 %	15.2 %	15.2 %
$c(k_2^*)$	0.3 %	0.3 %	0.3 %	0.3 %	0.3 %	0.3 %

Δ	“Delta Exposure” des Kapitalschutzproduktes					
$E[h(S) - 1]$	Erwartungswert der Rendite des Kapitalschutzproduktes					

Tab. 2: Optimierung für das unrestringierte Modell

3.5 Diskussion der Resultate

Bei beiden Modellvarianten wurde die Optimierung für die Szenarien I und II für verschiedene Werte von γ vorgenommen. Neben den für unsere Problemstellung relevanten Werten $\gamma = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 1.0$ wurde zu Vergleichszwecken auch $\gamma = 1.4$ berücksichtigt.

Insbesondere möchten wir auf folgende Ergebnisse hinweisen:

1. Unabhängig von der Modellvariante resultierten für alle relevanten γ sehr grosse Werte für k_2^* ($k_2^* = 1.30, 1.40$). Dies bedeutet, dass kein Call oder höchstens ein “far out of the money”-Call geschrieben werden sollte.
2. Wie zu erwarten war, hing die optimale Lösung im unrestringierten Modell viel stärker von γ ab⁶ als im Standardmodell.

⁶ Die relative Risikoaversion beträgt $1 + \gamma$

3. Beim unrestringierten Modell resultieren für niedrige Werte von γ ($\gamma = 0.1, 0.2$) entsprechend hohe Werte für k_1^* ($k_1^* = 0.97, 0.99$). Die allgemeinen Eigenschaften der Preisdichte $\pi(S)$ (siehe Abschnitte 2.1.b, 2.1.c) liefern eine theoretische Erklärung für dieses Ergebnis.

4 Möglichkeit zur Verallgemeinerung

Bei allen Berechnungen in Abschnitt 3 wurden die BLACK/SCHOLES-Annahmen unterstellt. Auf den meisten Optionsmärkten und insbesondere bei Optionen auf den SMI hängt aber die aufgrund der BLACK/SCHOLES-Formel berechnete implizite Volatilität sehr stark vom Ausübungspreis ab (siehe Abbildung 10).

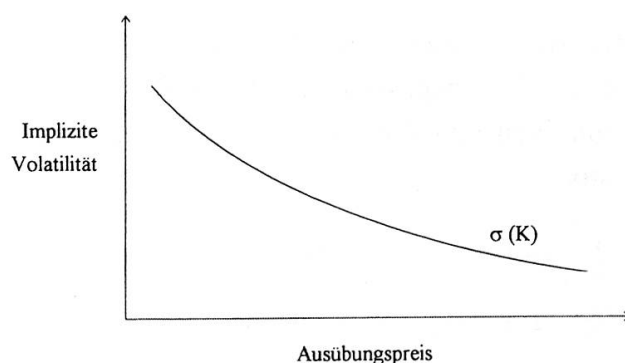


Abb. 10: Implizite Volatilität in Abhängigkeit des Ausübungspreises K

Dieser Sachverhalt lässt sich als empirische Evidenz gegen die BLACK/SCHOLES-Annahmen interpretieren.

Als Alternative zu den BLACK/SCHOLES-Annahmen könnten wir für unser Modell die Methode von SHIMKO (1993) verwenden, bei welcher die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Q(S)$ für den Indexstand S direkt aus den Marktpreisen von Optionen berechnet wird. Im Detail sieht die Methode von SHIMKO (1993) wie folgt aus:

- Für europäische Calls mit einheitlichem Verfallszeitpunkt, aber unterschiedlichen Ausübungspreisen K_1, K_2, \dots, K_N werden die Marktpreise beobachtet.
- Durch Glättung und Interpolation erhält man den Call-Preis $c(K)$ als Funktion des Ausübungspreises K (siehe Abbildung 11).

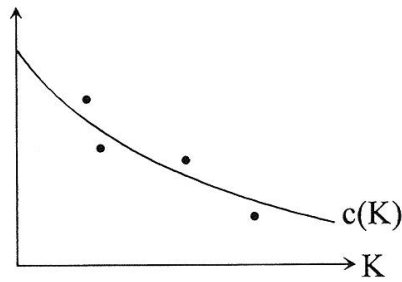


Abb. 11: Call-Preis $c(K)$ als Funktion des Ausübungspreises K

- Gemäss BREEDEN/LITZENBERGER (1978) gilt für die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_Q(S) = \text{const} \cdot \left. \frac{d^2 c}{dK^2} \right|_{K=S}$$

Die Methode von SHIMKO (1993) erlaubt es allerdings nicht, die wahre Wahrscheinlichkeitsdichte $f_P(S)$, respektive die Preisdichte $\pi(S)$ oder die Nutzenfunktion des repräsentativen Investors $u_M(w)$ zu berechnen. Würde man für den repräsentativen Investor

$$u_M(w) = -\frac{1}{\gamma_M} w^{-\gamma_M}$$

ansetzen (siehe auch RUBINSTEIN (1994), S. 797–804), so behielten zumindest die Resultate aus Abschnitt 2.1.d weiterhin ihre Gültigkeit.

5 Schlussbemerkungen

In dieser Arbeit werden zuerst die grundsätzlichen Einwände gegen den Einsatz von Kapitalschutzprodukten für private Investoren entkräftet. Anschliessend wird anhand von Modellrechnungen gezeigt, dass bei Kapitalschutzprodukten kein oder nur ein sehr hoher “Cap” gesetzt werden sollte. Für Kapitalschutzprodukte, welche nur einen Mindestbetrag garantieren müssen (unrestringiertes Modell), stellt sich heraus, dass bei geringer Risikoaversion nur Optionen mit hohen Ausübungspreisen einzusetzen sind.

Literatur

- Arrow, K.J. (1964): "The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing", *Review of Economic Studies* 31, pp. 91-96.
- Benninga, S. and M. Blume (1985): "On the optimality of portfolio insurance", *Journal of Finance* 40, pp. 1341-1352.
- Black, F. and M.J. Scholes (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81, pp. 637-659.
- Borch, K. (1960): "The safety loading of reinsurance premiums", *Skandinavisk Aktuarietidskrift* 43, pp. 163-184.
- Breeden, D. and R. Litzenberger (1978): "State contingent prices implicit in option prices", *Journal of Business* 51, pp. 621-651.
- Brennan, M.J. (1979): "The pricing of contingent claims in discrete time models", *Journal of Finance* 34, pp. 53-68.
- Brennan, M.J. and R. Solanki (1981): "Optimal portfolio insurance", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 16, pp. 279-299.
- Bühlmann, H. (1984): "The general economic premium principle", *ASTIN Bulletin* 14, No. 1, pp. 13-21.
- Chevallier, E. and H.H. Mueller (1994): "Risk allocation in capital markets: portfolio insurance, tactical asset allocation and collar strategies", *ASTIN Bulletin* 24, No. 1, pp. 5-18.
- Constantinides, G. (1982): "Intertemporal asset pricing with heterogeneous consumers and without demand aggregation", *Journal of Business* 55, pp. 253-267.
- Debreu, G. (1959): "Theory of Value", Yale University Press, New Haven.
- Leland, H.E. (1980): "Who should buy portfolio insurance?", *Journal of Finance* 35, pp. 581-596.
- Merton, R.C. (1969): "Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case", *Review of Economics and Statistics* 51, pp. 247-257.
- Rubinstein, M. (1994): "Implied binomial trees", *Journal of Finance* 49, pp. 771-818.
- Shimko, D. (1993): "Bounds of probability", *Risk* 6, No. 3, pp. 33-37.

José Antonio Blanco, Pascal Guillet, Dana Scherer
UBS AG
Postfach
CH-8098 Zürich

Heinz Müller
Mathematik und Statistik
HSG
Bodanstr. 4
CH-9000 St. Gallen

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wird die optimale Gestaltung eines Kapitalschutzproduktes auf den SMI für private Investoren untersucht. Zuerst geht es darum, einen Zusammenhang zwischen der Bewertung von Optionen und den Resultaten über optimale Risikoallokation auf Aktienmärkten herzustellen. Im Gegensatz zu Benninga/Blume (1985) zeigt sich, dass der Einsatz von Kapitalschutzprodukten aus theoretischer Sicht gerechtfertigt ist. Im empirischen Teil wird der Erwartungsnutzen von "Collar"-Strukturen durch eine geeignete Wahl von oberem und unterem Ausübungspreis, sowie der Partizipationsrate optimiert. Die Optimierung basiert auf Nutzenfunktionen vom "Power"-Typ (konstante relative Risikoaversion) und es werden institutionelle Restriktionen eingeführt. Die Berechnung des Erwartungsnutzens erfolgt mittels Monte Carlo-Simulation und zur Ermittlung der optimalen Lösung wird ein "Grid Search"-Verfahren benützt. Als Hauptresultat stellt sich heraus, dass unter unseren Annahmen bei Kapitalschutzprodukten nur ein sehr hoher oder gar kein "Cap" gesetzt werden sollte.

Résumé

Ce travail traite de la structure optimale de produits de protection de capital sur le SMI destinés aux investisseurs privés. Nous établissons d'abord une relation entre l'évaluation d'options et la théorie de l'allocation optimale des risques sur le marché boursier. Contrairement à Benninga/Blume (1985) nous montrons qu'il y a une justification théorique à l'utilisation de produits de protection de capital. Dans la partie empirique l'espérance de l'utilité de tunnels (collars) est optimisée par un choix approprié des prix d'exercice inférieurs et supérieurs et du quota de participation. L'optimisation est basée sur des fonctions d'utilité ayant une aversion au risque relative constante (Power-Typ) et tient compte de contraintes institutionnelles. Le calcul de l'espérance de l'utilité est effectué par des simulations (Monte-Carlo); pour le recherche de la solution optimale nous utilisons un procédé de discrétisation (Grid Search). Comme résultat principal nous obtenons que sous les hypothèses faites les produits de protection de capital comprennent soit une garantie de taux plafond très élevée ou pas de garantie de taux plafond du tout.

Summary

The article deals with the optimal design of a capital protected product on the Swiss Market Index (SMI) for private investors. First some standard results in option pricing are related to the theory of risk sharing in equity markets. In contrast to Benninga/Blume (1985) it is argued that there is a theoretical justification for capital protected products. In the empirical part the expected utility of collar structures is optimized by an appropriate choice of upper and lower strike prices and the participation rate. Utility functions are of the power type (constant relative risk aversion) and some institutional constraints are imposed. Expected utility is calculated by means of Monte Carlo simulation and the optimal solution is obtained by a grid search method. As a main result it turns out that under our assumptions only very high or no caps should be put on capital protected products.