D. Kurzmitteilungen

PHILIPPE CHUARD, Pully

Le cours mathématique rétrospectif

Le cours mathématique d'une obligation d'un emprunt amortissable et la prime unique d'une assurance mixte combinée à une rente temporaire s'expriment l'un et l'autre par des formules dont la construction algébrique est la même[1]. Or cette formule de prime unique est également celle de la réserve mathématique. On sait d'autre part que si une réserve mathématique est ordinairement calculée selon une méthode prospective, elle peut également l'être selon une méthode rétrospective. Il est alors légitime de se demander comment se présente cette dualité de méthodes pour le cours mathématique.

* * *

Désignons, pour un emprunt, par

D_k le nombre d'obligations remboursées lorsque la durée restant à courir est de k années,

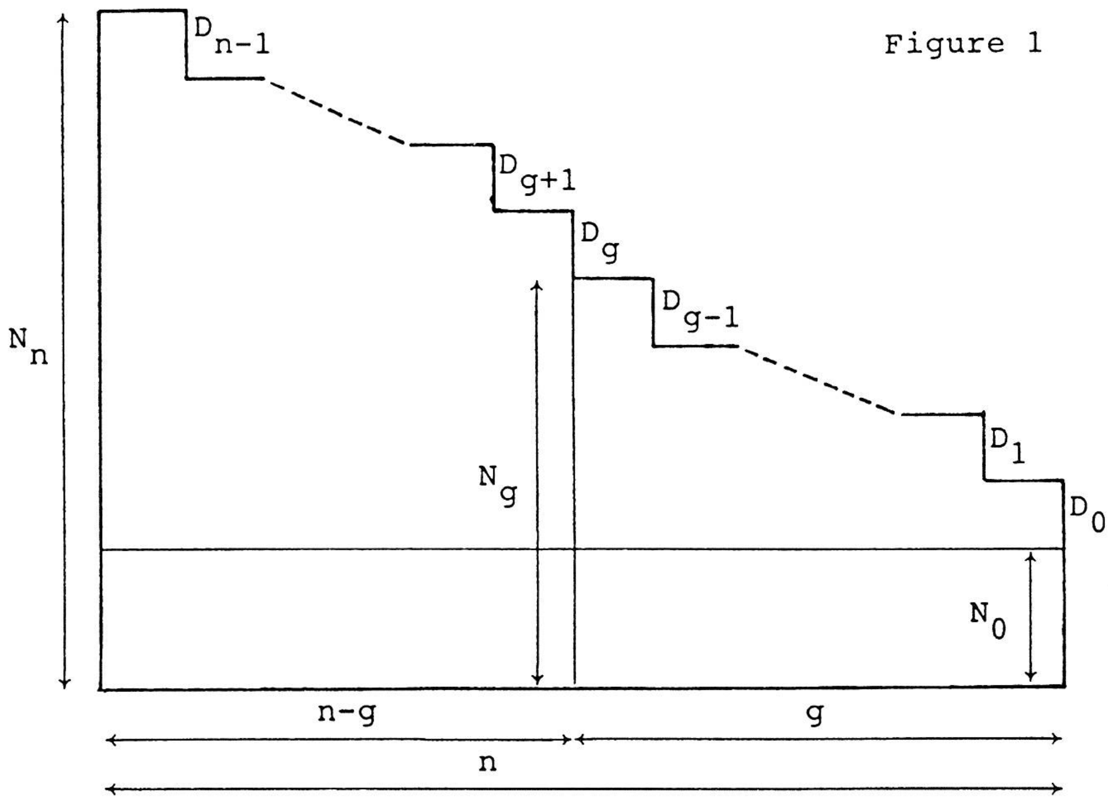
N_k le nombre d'obligations en cours lorsque la durée restant à courir est comprise entre k et $k-1$ années,

k pouvant prendre les valeurs $n, n-1, \ldots, g, \ldots, 1, 0$.

Le schéma de la page suivante représente l'évolution du nombre des obligations durant les n dernières années de l'emprunt. Le cas envisagé est général:

- si les D_k sont tous nuls, l'emprunt est remboursable à échéance fixe;
- si les D_k sont tous égaux, l'emprunt est à amortissement constant;
- lorsque les annuités sont constantes, les D_k varient en progression géométrique;
- si N_0 est nul, l'emprunt est totalement amortissable;
- il est partiellement amortissable dans le cas contraire.

[1] Voir: Analogies actuarielles; Cahier N^0 22 de l'Institut de sciences actuarielles de l'Université de Lausanne, 1987.



Lorsque g années restent à courir le cours mathématique se calcule en additionnant

– la nue-propriété P_g, c.-à-d. la valeur actuelle d'un remboursement futur, et
– l'usufruit U_g, c.-à-d. la valeur actuelle des intérêts futurs.

Il s'agit donc d'un procédé prospectif et la formule du cours mathématique est donnée par

$$K_g^{\text{pro}} = P_g + U_g \tag{1}$$

où

$$P_g = \frac{1}{N_g}\left[v' D_{g-1} + v'^2 D_{g-2} + \cdots + v'^g (D_0 + N_0)\right] \tag{2}$$

$$U_g = \frac{i_0}{N_g}\left(v' N_g + v'^2 N_{g-1} + \cdots + v'^g N_1\right) . \tag{3}$$

Le taux i_0, qui apparaît dans U_g, est le taux nominal de l'emprunt. Le taux i', qui apparaît dans le facteur d'escompte v', est le taux d'évaluation du cours mathématique.

* * *

On établit l'équivalence de la méthode prospective et de la méthode rétrospective, pour calculer une réserve mathématique, en se basant sur le fait que, pendant toute la durée de l'assurance, la valeur actuelle des prestations passées et des prestations futures de l'assuré est égale à la valeur actuelle des prestations passées et des prestations futures de l'assureur. La réserve mathématique prospective est la différence de valeurs actuelles de prestations futures; la réserve mathématique rétrospective est la différence de valeurs actuelles de prestations passées.
Le même raisonnement est utilisable pour le cours mathématique, les deux partenaires étant l'obligataire et l'emprunteur. Admettons qu'au moment où la durée future de l'emprunt est de g années on calcule le cours mathématique d'une obligation achetée $n-g$ années plus tôt.
Au moment de l'achat la valeur de l'obligation est, selon les formules (1) à (3),

$$K_n = P_n + U_n \,. \tag{4}$$

La valeur actuelle de la nue-propriété pendant les $n-g$ années à venir est alors

$$P_{n:\,\overline{n-g|}} = \frac{1}{N_n}\left(v' D_{n-1} + v'^2 D_{n-2} + \cdots + v'^{n-g} D_g\right) \tag{5}$$

et celle de l'usufruit

$$U_{n:\,\overline{n-g|}} = \frac{i_0}{N_n}\left(v' N_{n-1} + v'^2 N_{n-1} + \cdots + v'^{n-g} N_{g+1}\right) \,. \tag{6}$$

Les trois valeurs actuelles définies par les formules (4) à (6) sont calculées à l'époque de calcul où la durée restant à courir de l'emprunt est de n années. Si l'on déplace l'époque de calcul de $n-g$ années, on doit multiplier ces valeurs par

$$r'^{n-g}\,\frac{N_n}{N_g} \,. \tag{7}$$

Ce facteur tient compte de ce que la capitalisation a lieu au taux d'intérêt i' et de ce que le nombre des obligations en cours passe de N_n à N_g. Dans ces conditions on obtient les valeurs actuelles suivantes au moment où la durée future de l'emprunt est de g années :

- prestations passées de l'obligataire: $K_n \, r'^{n-g} \dfrac{N_n}{N_g}$
- prestations futures de l'obligataire: 0
- prestations passées de l'emprunteur: $\left(P_{n:\,\overline{n-g}|} + U_{g:\,\overline{n-g}|}\right) r'^{n-g} \dfrac{N_n}{N_g}$
- prestations futures de l'emprunteur: $P_g + U_g$

D'où l'équation

$$K_n \, r'^{n-g} \frac{N_n}{N_g} = \left(P_{n:\,\overline{n-g}|} + U_{n:\,\overline{n-g}|}\right) r'^{n-g} \frac{N_n}{N_g} + P_g + U_g \,. \tag{8}$$

On en tire la formule (1) du cours mathématique prospectif et la formule

$$K_g^{\text{rétro}} = \left(K_n - P_{n:\,\overline{n-g}|} - U_{n:\,\overline{n-g}|}\right) r'^{n-g} \frac{N_n}{N_g} \tag{9}$$

du cours mathématique rétrospectif.
Les formules qui précèdent, et qui se rapportent au cours mathématique ainsi qu'à ses composantes, sont générales. Elles sont valables quel que soit le type d'emprunt. Pour passer à des applications il faut envisager des cas particuliers. Les deux tableaux qui suivent contiennent, pour trois types d'emprunts, des formules et des exemples numériques servant d'illustration.

	emprunt		
	remboursable à échéance fixe	amortissable par amortissement constant	amortissable par annuité constante
P_g	$v'^{\,g}$	$\dfrac{a'_{\overline{g}\rceil}}{g}$	$\dfrac{i'}{i'-i_0}\left(\dfrac{a'_{\overline{g}\rceil}}{a_{\overline{g}\rceil}(i_0)}-\dfrac{i_0}{i'}\right)$
U_g	$i_0\, a'_{\overline{g}\rceil}$	$\dfrac{i_0}{g}(Da)'_{\overline{g}\rceil}$	$\dfrac{i_0}{i'-i_0}\left(1-\dfrac{a'_{\overline{g}\rceil}}{a_{\overline{g}\rceil}(i_0)}\right)$
K_n	$1-(i'-i_0)a'_{\overline{n}\rceil}$	$1-\dfrac{i'-i_0}{n}(Da)'_{\overline{n}\rceil}$	$\dfrac{a'_{\overline{n}\rceil}}{a_{\overline{n}\rceil}(i_0)}$
$P_{n:\,\overline{n-g}\rceil}$	0	$\dfrac{a'_{\overline{n-g}\rceil}}{n}$	$\dfrac{i'}{i'-i_0}\left(\dfrac{a'_{\overline{n-g}\rceil}}{a_{\overline{n-g}\rceil}(i_0)}-\dfrac{i_0}{i'}\right) \times\left(1-\dfrac{a_{\overline{g}\rceil}(i_0)}{a_{\overline{n}\rceil}(i_0)}\right)$
$U_{n:\,\overline{n-g}\rceil}$	$i_0\, a'_{\overline{n-g}\rceil}$	$\dfrac{i_0}{n}\left[(Da)'_{\overline{n-g}\rceil} + g\, a'_{\overline{n-g}\rceil}\right]$	$\dfrac{a'_{\overline{n-g}\rceil}}{a_{\overline{n}\rceil}(i_0)} - P_{n:\,\overline{n-g}\rceil}$
$r'^{\,n-g}\dfrac{N_n}{N_g}$	$r'^{\,n-g}$	$r'^{\,n-g}\dfrac{n}{g}$	$r'^{\,n-g}\dfrac{a_{\overline{n}\rceil}(i_0)}{a_{\overline{g}\rceil}(i_0)}$

$i_0 = 0,05 \qquad n = 10 \qquad g = 6 \qquad n-g=4$

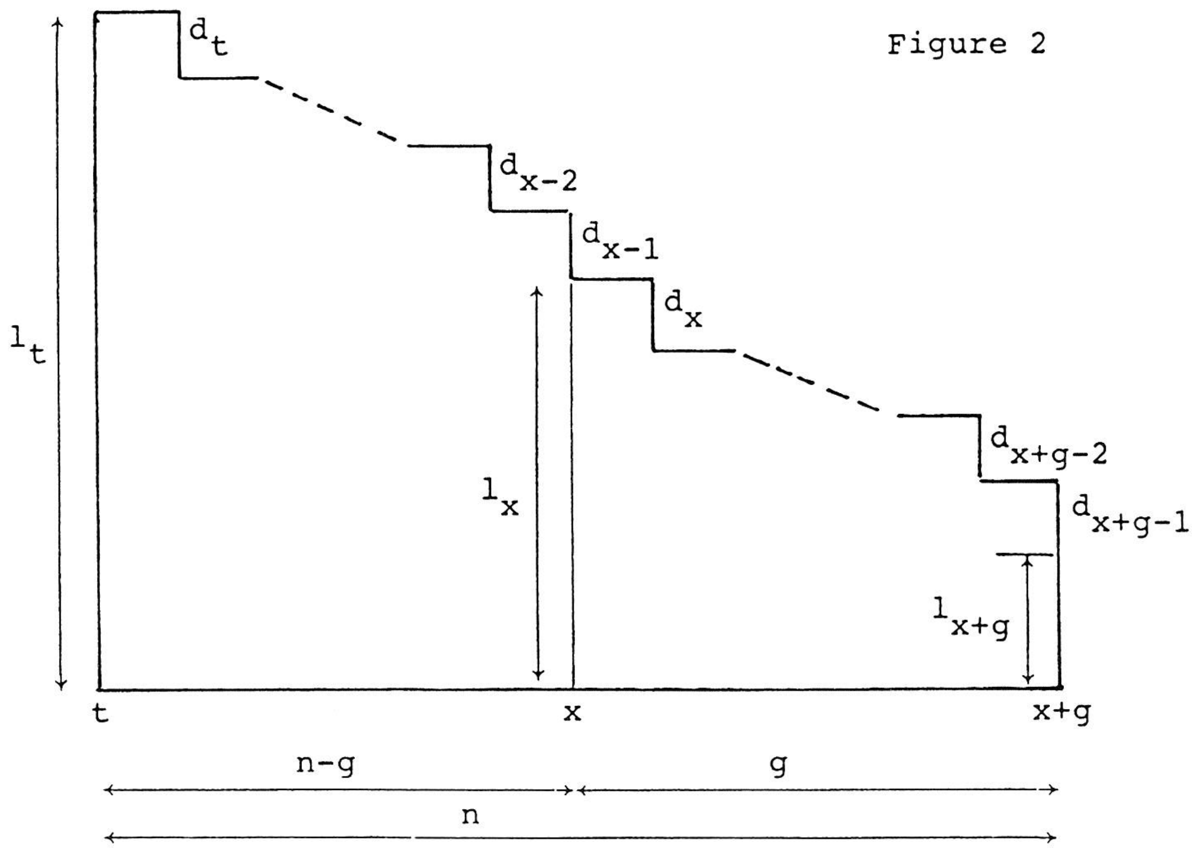
i'	0,04			0,06		
	échéance fixe	amort. const.	annuité const.	échéance fixe	amort. const.	annuité const.
P_6	0,790 31	0,873 69	0,868 83	0,704 96	0,819 55	0,812 79
U_6	0,262 11	0,157 89	0,163 96	0,245 87	0,150 37	0,156 01
K_{10}	1,081 11	1,047 23	1,050 40	0,926 40	0,956 00	0,953 16
$P_{10:\,\overline{4}\rceil}$	0	0,362 99	0,310 23	0	0,346 51	0,295 80
$U_{10:\,\overline{4}\rceil}$	0,181 49	0,155 16	0,159 86	0,173 26	0,148 53	0,152 95
$r'^{4}\dfrac{N_{10}}{N_6}$	1,169 86	1,949 76	1,779 73	1,262 48	2,104 13	1,920 63
K_6	1,052 42	1,031 58	1,032 79	0,950 83	0,969 92	0,968 80

Il est intéressant de revenir à la comparaison, mentionnée en début d'article, entre le cours mathématique d'une obligation d'un emprunt amortissable et la réserve mathématique d'une assurance mixte combinée à une rente temporaire, à prime unique. Admettons que l'assurance a été conclue à l'âge t, pour une durée n. La réserve mathématique, calculée $n-g$ années plus tard à l'âge x est, selon la méthode prospective,

$$V^{\text{pro}}(x) = A_{x:\,\overline{g}|} + v\,L\,\ddot{a}_{x:\,\overline{g}|}\,; \tag{10}$$

dans cette formule,

- le capital de l'assurance mixte est 1,
- L est le terme annuel de la rente temporaire, payé à la fin de l'année si l'assuré est en vie un an plus tôt,
- le taux d'intérêt est i.



La correspondance entre l'évolution du nombre N_g des obligations en cours et l'ordre l_x des vivants apparaît dans la comparaison des figures 1 et 2. La voie est ainsi ouverte à d'autres analogies. En comparant les formules (1) et (10) on fait correspondre la nue-propriété P_g à la valeur actuelle $A_{x:\,\overline{g}|}$ de l'assurance mixte, et l'usufruit U_g à la valeur actuelle $v\,L\,\ddot{a}_{x:\,\overline{g}|}$ de la rente temporaire (i_0 correspond à L). Ces correspondances en entraînent une autre entre deux relations classiques:

$$\left.\begin{array}{r} P_g = 1 - \dfrac{i'}{i_0}\,U_g \qquad \text{et} \\ A_{x:\,\overline{g}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\,\overline{g}|}\,. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Quant au cours mathématique rétrospectif, donné par la formule (9), on le met en relation avec

$$V^{\text{rétro}}(x) = \left(A_{t:\,\overline{n}|} + v\,L\,\ddot{a}_{t:\,\overline{n}|} - {}_{|n-g}A_t - v\,L\,\ddot{a}_{t:\,\overline{n-g}|}\right) r^{n-g}\,\frac{l_t}{l_x} \tag{12}$$

ce qui conduit aux correspondances

- entre K_n et $A_{t:\,\overline{n}|} + v\,L\,\ddot{a}_{t:\,\overline{n}|}$
- entre $P_{n:\,\overline{n-g}|}$ et ${}_{|n-g}A_t$
- entre $U_{n:\,\overline{n-g}|}$ et $v\,L\,\ddot{a}_{t:\,\overline{n-g}|}$ (où i_0 correspond à L)
- entre $r'^{\,n-g}\,\dfrac{N_n}{N_g}$ et $r^{n-g}\,\dfrac{l_t}{l_x}$

On peut enfin mentionner la correspondance entre

$$\left.\begin{array}{r} P_{n:\,\overline{n-g}|} + v'^{\,n-g}\,\dfrac{N_g}{N_n} = 1 - \dfrac{i'}{i_0}U_{n:\,\overline{n-g}|} \qquad \text{et} \\ {}_{|n-g}A_t + {}_{n-g}E_t = 1 - d\,\ddot{a}_{t:\,\overline{n-g}|} \end{array}\right\} \tag{13}$$

* * *

Les développements qui précèdent permettent de constater que l'analogie algébrique entre cours mathématique et réserve mathématique, en méthode prospective comme en méthode rétrospective, conduit à plusieurs autres analogies de valeurs actuelles. C'est une illustration des liens existant entre les mathématiques financières et les mathématiques actuarielles de l'assurance sur la vie.

Philippe Chuard
av. de Lavaux 93
CH–1009 Pully