Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Aktuarvereinigung

Band: - (1996)

Heft: 1

Artikel: Lösungsverfahren eines Risikomodells bei exponentiell fallender Schadensverteilung

Autor: Siegl, Thomas

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-551100

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THOMAS SIEGL, ROBERT F. TICHY, Graz

Lösungsverfahren eines Risikomodells bei exponentiell fallender Schadensverteilung*

1 Modell

Ein guter Überblick über verschiedene Risikomodelle wird in [Tho 82] und [Ger 79] gegeben. Im folgenden sei der Gesamtschadensprozess $\mathcal{S}_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ mit $N(t) \sim \text{Poisson}\,(\lambda t)$ $(N(0) = 0)$ und $\mathcal{S}_0 = 0$ ein zusammengesetzter Poisson Prozess mit positiven unabhängig identisch verteilten Einzelschadenshöhen X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ mit Verteilungsfunktion $F(y)$ und endlichem Erwartungswert μ. Des weiteren bezeichne c die Prämiendichte, wobei $c > \lambda \int_0^\infty y\, dF(y)$, damit die Überlebenswahrscheinlichkeit der Versicherung positiv ist. Das klassische Modell wird nun so modifiziert, dass wenn das Kapital eine gewisse Barriere erreicht, Dividenden ausbezahlt werden und das Kapital auf der Barriere bleibt, bis der nächste Schaden auftritt. Wir betrachten den Fall, in dem die Einzelschadenshöhen gemischt-exponential-, bzw. gammaverteilt sind, und die Dividenden-Barriere eine lineare Funktion $b + at$ der Zeit t ist, wobei $b \geq 0$, $0 < a < c$. Das heisst, wenn $\mathcal{R}_t$ das Kapital zur Zeit t bezeichnet:

$$d\mathcal{R}_t = c\, dt - d\mathcal{S}_t \quad \text{wenn} \quad \mathcal{R}_t < b + at \tag{1}$$

$$d\mathcal{R}_t = a\, dt - d\mathcal{S}_t \quad \text{wenn} \quad \mathcal{R}_t = b + at \tag{2}$$

Zusammen mit dem Ursprungs-Kapital, $\mathcal{R}_0 = x$, $0 \leq x \leq b < \infty$ bestimmt dies den Prozess $\{R_t\}$. In einem infinitesimalen Zeitraum dt kommt es zu keinem Schaden mit Wahrscheinlichkeit $1 - \lambda\, dt$, und zu einem Schaden mit Wahrscheinlichkeit $\lambda\, dt$. Mehr als ein Schaden tritt mit Wahrscheinlichkeit proportional zu dt^2 auf, kann also im folgenden vernachlässigt werden. Für die Überlebenswahrscheinlichkeit $U(x, b)$ kann nun die folgende Beziehung gewonnen werden:

$$\begin{aligned} U(x,b) &= (1 - \lambda\, dt) U(x + \eta\, dt, b + a\, dt) \\ &\quad + \lambda\, dt \int_0^{x+\eta\, dt} U(x + \eta\, dt - y, b + a\, dt)\, dF(y) + o(dt) \end{aligned} \tag{3}$$

* Die Autoren wurden durch das Projekt 10223-PHY des Fonds zur Förderung der Wissenschaftlichen Forschung unterstützt.

Für $x = b$ ist $\eta = a$, sonst $\eta = c$. Indem wir U in (x, b) entwickeln, $U(x, b)$ auf beiden Seiten der Gleichung abziehen und durch dt dividieren erkennen wir, dass

$$cU_x(x,b) + aU_b(x,b) - \lambda U(x,b) + \lambda \int_0^x U(x-y,b)\, dF(y) = 0 \tag{4}$$

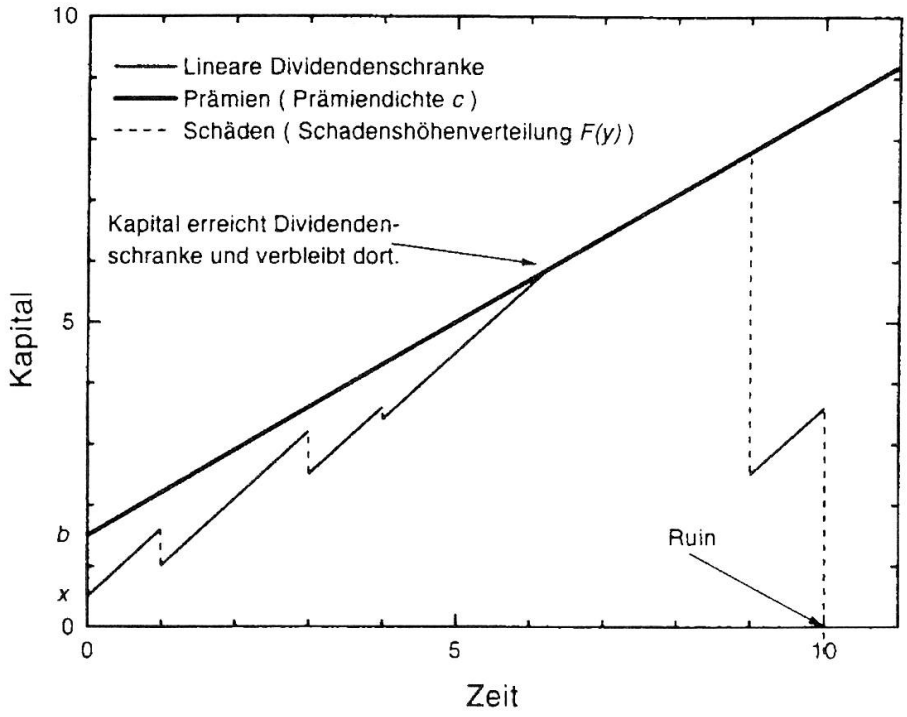

Abb. 1: Darstellung des Risikoprozesses $\mathcal{R}_t$

ist. Weitere Überlegungen (siehe [Ger 81]) liefern die Nebenbedingungen

$$U_x(b,b) = 0\,, \tag{5}$$

sowie

$$\lim_{b \to \infty} U(x,b) = U(x)\,, \tag{6}$$

wobei $U(x)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit in Abwesenheit der Dividendenschranke bezeichnet.

Die Dividenden sind Zahlungen mit Intensität $c - a$, die bei Erreichen der Schranke beginnen und mit einem Schaden enden bis das nächste Mal die Schranke erreicht wird. Die Dividenden werden mit der konstanten Intensität δ abgezinst. In analoger Weise zu (3) kann folgende Beziehung gewonnen werden. Der Erwartungswert der Dividenden mit Zahlungen nach dem Ruin $V(u)$ genügt der Gleichung:

$$(c-a)V'(u) + (\delta+\lambda)V(u) - \lambda \int_0^\infty V(u+y)\,dF(y) = 0 \tag{7}$$

Hierbei bezeichnet u den Abstand zur Dividendenschranke, also $b - x$. Es muss folgende Nebenbedingung gelten:

$$V'(0) = -1\,. \tag{8}$$

Wir bezeichnen den Erwartungswert der Dividendenzahlungen, die mit dem Ruin aufhören mit $W(x,b)$. Analog zu (3) erhalten wir eine Gleichung für $W(x,b)$:

$$\begin{aligned} &cW_x(x,b) + aW_b(x,b) - (\lambda+\delta)W(x,b) \\ &\quad + \lambda \int_0^x W(x-y,b)\,dF(y) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\lim_{b\to\infty} W(b-y,b) = V(y) \tag{10}$$

und

$$W_x(b,b) = 1\,. \tag{11}$$

In dieser Arbeit sollen nun weitgehend explizite analytische Lösungen für die Überlebenswahrscheinlichkeit sowie für den Erwartungwert der Dividenden angegeben werden. Zuerst wird der Fall untersucht, dass die Verteilung der Schadenshöhen die Gammaverteilung mit Verteilungsfunktion $F_\gamma(y) = \gamma(y) := \int_0^y \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} e^{-\frac{z}{\beta}}\,dz$ ist. Anschliessend wird angenommen,

dass die Einzelschäden gemischt-exponentialverteilt sind mit Verteilungsfunktion $F_\nu(y) = \nu(y) := 1 - \sum_{j=1}^{\alpha} C_j e^{B_j y}$, wobei natürlich $\sum_{j=1}^{\alpha} C_j = 1$ gelten muss. Der Parameter α muss ganzzahlig sein. Unter diesen Bedingungen wird für die Lösung eine Reihendarstellung angegeben, deren Auswertung ein Programm unter dem Symbolic Computation Paket MAPLE übernimmt.

2 Analytische Lösung für die Überlebenswahrscheinlichkeit

2.1 Die Gammaverteilung

Die Modellgleichung aus dem vorausgegangenen Abschnitt wird nun gelöst. Zunächst stellen wir die Gleichung auf und setzen die Gamma-Verteilung für $F(x)$ ein

$$\begin{aligned} &cU_x(x,b) + aU_b(x,b) - \lambda U(x,b) \\ &\quad + \lambda \int_0^x \frac{U(y,b)(x-y)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-y}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\, dy = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Um die nachfolgenden Schritte zu vereinfachen, multiplizieren wir mit $e^{\frac{x}{\beta}}$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} &ce^{\frac{x}{\beta}} U_x(x,b) + ae^{\frac{x}{\beta}} U_b(x,b) - \lambda e^{\frac{x}{\beta}} U(x,b) \\ &\quad + \lambda \int_0^x \frac{U(y,b)(x-y)^{\alpha-1} e^{\frac{y}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\, dy = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Um diese Gleichung zu lösen, lassen wir zunächst das Integral durch Differentiation verschwinden. Dazu beachten wir, dass die Ableitung von

$$I_\alpha = \int_0^x \frac{U(y,b)(x-y)^{\alpha-1} e^{\frac{y}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)}\, dy \tag{14}$$

nach x gleich

$$\frac{\partial}{\partial x} I_\alpha = \int_0^x \frac{U(y,b)(x-y)^{\alpha-2} e^{\frac{y}{\beta}}}{\Gamma(\alpha-1)}\, dy = I_{\alpha-1} \tag{15}$$

ist. Daher gilt:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} I_\alpha = U(x,b) e^{\frac{x}{\beta}} \tag{16}$$

Somit leiten wir nun die Integro-Differentialgleichung (13) α-mal nach x ab:

$$\begin{aligned} & c e^{\frac{x}{\beta}} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta^{\alpha-i}} \binom{\alpha}{i} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x^{i+1}} U(x,b) + a e^{\frac{x}{\beta}} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta^{\alpha-i}} \binom{\alpha}{i} \frac{\partial^{i+1}}{\partial b\, \partial x^i} U(x,b) \\ & - \lambda e^{\frac{x}{\beta}} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta^{\alpha-i}} \binom{\alpha}{i} \frac{\partial^i}{\partial x^i} U(x,b) + \lambda \frac{1}{\beta^\alpha} e^{\frac{x}{\beta}} U(x,b) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Daraus ergibt sich folgende symbolische Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta^\alpha} e^{\frac{x}{\beta}} \Bigg(c \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right)^\alpha U(x,b) + a \frac{\partial}{\partial b} \left(\beta \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right)^\alpha U(x,b) \\ & - \lambda \left(\beta \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right)^\alpha U(x,b) + \lambda U(x,b) \Bigg) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten der Ordnung $\alpha + 1$ in den zwei Variablen x und b. Wir wählen einen Produktansatz $U(x,b) = \Phi(x)\Psi(b)$. Da alle Koeffizienten Konstanten sind, wählen wir für Φ und Ψ Exponentialansätze. Wir nehmen dabei an, dass die Wurzeln der dazugehörenden Gleichung paarweise verschieden sind.
Da die Ableitung nach b in (18) nur erster Ordnung ist, und die Ableitung nach x in der Ordnung $\alpha + 1$ vorkommt, ergibt sich folgender Ansatz:

$$U(x,b) = C e^{Sb} \left(\sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{R_i x} \right) \tag{19}$$

Der Koeffizient C für den Exponentialanteil e^{Sb} ist redundant, da der Wert in die Koeffizienten A_i einbezogen werden kann. Daher setzen wir im folgenden $C := 1$. Wenn wir diesen Ansatz (19) in die partielle Differentialgleichung (18) einsetzen, können wir durch Koeffizientenvergleich (die Gleichung gilt unabhängig von x und b) folgende Beziehung für die Exponenten R_i und S gewinnen: Da diese Gleichung für alle Exponenten R_i gilt, benutzen wir $R = R_i$ als Platzhalter für die $\alpha + 1$ Lösungen.

$$cR(\beta R + 1)^\alpha + aS(\beta R + 1)^\alpha - \lambda(\beta R + 1)^\alpha + \lambda = 0 \tag{20}$$

Um Gleichungen für die A_i aufzustellen, müssen wir den Ansatz in die Integro-Differential-Gleichung (12) einsetzen. Wir betrachten zunächst den Differentialteil

$$\begin{aligned} &cU_x(x,b) + aU_b(x,b) - \lambda U(x,b) \\ &= e^{Sb} \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i(aS - \lambda + cR_i)e^{R_i x} \end{aligned} \tag{21}$$

und den Integralteil

$$\begin{aligned} \int_0^x U(x-y,b)\,d\gamma(y) &= \int_0^x e^{Sb} \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{R_i(x-y)}\,d\gamma(y) \\ &= e^{Sb} \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{R_i x} \int_0^x e^{-R_i y} \frac{y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\,dy \\ &= \frac{e^{Sb}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{R_i x} \int_0^x e^{-(R_i + \frac{1}{\beta})y} y^{\alpha-1}\,dy \end{aligned} \tag{22}$$

getrennt. Der Integralanteil ist von der Form $\int x^n e^{ax}\,dx$. Dies können wir durch partielle Integration auflösen und zwar:

$$\begin{aligned} \int x^n e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} n!}{i!\,a^{n-i+1}} x^i e^{ax} + C \end{aligned} \tag{23}$$

Eingesetzt in (22) ergibt sich:

$$\int_0^x U(x-y,b)\,d\gamma(y)$$

$$= \frac{e^{Sb}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{R_i x}\left(-\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{(\alpha-1)!}{j!\,(R_i+\frac{1}{\beta})^{\alpha-j}}x^j e^{-(R_i+\frac{1}{\beta})x} + \frac{(\alpha-1)!}{(R_i+\frac{1}{\beta})^\alpha}\right)$$

$$= e^{Sb}\sum_{i=1}^{\alpha+1}\left(e^{-\frac{x}{\beta}}\left[\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{A_i\beta^j}{j!\,(\beta R_i+1)^{\alpha-j}}x^j\right] + \frac{A_i e^{R_i x}}{(\beta R_i+1)^\alpha}\right) \tag{24}$$

Dies gilt für alle x. Wir können also durch Koeffizientenvergleich in der Gleichung $(21)+\lambda(22)=0$ feststellen, dass die Koeffizienten A_i

$$\sum_{i=1}^{\alpha+1}\frac{A_i}{(1+\beta R_i)^j} = 0, \qquad \forall j = 1,\ldots,\alpha \tag{25}$$

genügen. Die A_i sind also Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit α Gleichungen und $\alpha+1$ Unbekannten. Ein Koeffizientenvergleich von $(21)+\lambda(22)=0$ zeigt ausserdem, dass

$$aS + cR_i - \lambda + \lambda\frac{1}{(1+\beta R_i)^\alpha} = 0. \tag{26}$$

Diese Gleichung ist identisch zur Bestimmungsgleichung (20) für die R_i. Im folgenden wollen wir eine Reihendarstellung für die Lösung der Integro-Differential-Gleichung (12) unter Beachtung der Nebenbedingungen (5) und (6) angeben.

Bemerkung: *In der folgenden Reihendarstellung erhalten die Exponenten und Koeffizienten einen Index k, der die Nummer des Reihentermes angibt. Die Gleichungen (20) und (25) gelten unabhängig vom Reihenindex k. In diesem Sinne sind die Variablen S, A_i und R_i Platzhalter für S_k, $A_{i,k}$ und $R_{i,k}$.*

$$U(x,b) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[e^{S_k b}\sum_{i=1}^{\alpha+1} A_{i,k}e^{R_{i,k}x}\right] \tag{27}$$

Zunächst erfüllen wir die zweite Nebenbedingung (6)

$$\lim_{b\to\infty} U(x,b) = U(x)\,,$$

indem der erste Reihenterm so gewählt wird, dass er diese Bedingung erfüllt: Durch $S_0 := 0$ wird (6) erfüllt. Damit wird $R_{1,0} = 0$, wobei die $R_{i,0}$ Lösungen der Bestimmungsgleichung (20) für R sind. Das Polynom in (20) hat genau $\alpha + 1$ komplexe Nullstellen, somit sind die Exponenten eindeutig bestimmt. Wir wollen nun die erste Nebenbedingung (5)

$$U_x(b,b) = 0$$

erfüllen, indem wir für beliebiges k für jeden Summanden $e^{S_k b} A_{i,k} e^{R_{i,k}}$ $(i = 2, \ldots, \alpha{+}1)$, dessen Ableitung nach x in (b,b) ungleich 0 ist, einen Term einführen, sodass die Summe beider Terme null ergibt. Sei die Ableitung des j-ten Summanden des k-ten Terms $\neq 0$, so suchen wir ein noch nicht besetztes k'. Um Auslöschung für alle b zu erreichen, setzen wir

$$R_{1,k'} + S_{k'} = R_{j,k} + S_k\,, \tag{28}$$

woraus zusammen mit der Bestimmungsgleichung (20) für R der Exponent $S_{k'}$ bestimmt wird. Dafür verwenden wir jene Lösung der Gleichung, für die $\Re(S) < 0$ minimal wird. Durch solche Terme wird die Gültigkeit der zweiten Nebenbedingung (6) erhalten. Dieses S setzen wir dann wieder in die Bestimmungsgleichung (20) für R ein, und errechnen die Exponenten $R_{i,k'}$ die als komplexe Nullstellen eines Polynoms vom Grad $\alpha{+}1$ eindeutig bestimmt sind. Des weiteren setzen wir

$$A_{1,k'} R_{1,k'} = -A_{j,k} R_{j,k}\,, \tag{29}$$

um die Terme, die nun gleiche Exponenten in (b,b) haben, in Summe zu eliminieren. Zusammen mit der Bestimmungsgleichung (25) für A können wir dadurch die Koeffizienten, die nunmehr als Lösung einer linearen Gleichung mit $\alpha{+}1$ Unbekannten und ebensovielen Gleichungen eindeutig bestimmt sind, errechnen. Dies gilt nur, wenn die dadurch erzeugte Matrix vollen Rang hat. Man kann sich leicht überlegen, dass dies für $R_i \neq R_j$ bei $i \neq j$ gilt. Dies ist aber gerade die Voraussetzung, die wir für unsere Lösung und insbesondere für die Gültigkeit des Ansatzes in (19) verwenden. Für

jeden Term müssen wir daher α neue Terme erzeugen, um $U_x(b,b) = 0$ zu erfüllen.

Bemerkung: *Die Auswertung der Reihe. sowie die Bestimmung der Exponenten und Koeffizienten wurde in* MAPLE *implementiert.*

2.2 *Die gemischte Exponentialverteilung*

Das Integral in (4) kann durch wiederholtes Differenzieren im allgemeinen nicht zum Verschwinden gebracht werden. Eine Linearkombination der Ableitungen bis zur Ordnung α, wie dies in [DG 84] beschrieben wird, führt auf eine partielle Differentialgleichung der Ordnung $\alpha + 1$ mit konstanten Koeffizienten.
Wir verwenden daher den Ansatz (19), den wir in die Integro-Differential-Gleichung (4) einsetzen, und erhalten

$$\begin{aligned} & ce^{Sb} \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i R_i e^{R_i x} + aSe^{Sb} \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{R_i x} - \lambda \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{R_i x} \\ & - \lambda \int_0^x \sum_{i=1}^{\alpha+1} (A_i e^{R_i y}) \sum_{j=1}^{\alpha} (C_j B_j e^{B_j (x-y)})\, dy = 0\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Durch Auflösen des Integrals und Koeffizientenvergleich ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die R_i als

$$cR + aS - \lambda - \lambda \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{C_j B_j}{R - B_j} = 0\,. \tag{31}$$

Wir erhalten die zusätzliche Forderung, dass $R_i \neq B_j$ sein muss. Nach Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner ergibt sich ein Polynom in R, das genau $\alpha+1$ Nullstellen besitzt. Ausserdem ergibt der Koeffizientenvergleich die Forderung an die A_i

$$\sum_{i=1}^{\alpha+1} \frac{A_i}{R_i - B_j} = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, \alpha\,. \tag{32}$$

Bei einer Vorgangsweise analog zum vorangegangenen Kapitel ergibt sich wieder eine Reihe für die Lösung, deren Koeffizienten und Exponenten eindeutig bestimmt sind.

3 Analytische Lösung für den Erwartungswert der Dividenden

3.1 Zahlungen auch nach dem Ruin

3.1.1 Die Gammaverteilung

Die Gammaverteilung wird zunächst in (7) eingesetzt und es werden die Integrationsgrenzen verändert:

$$\begin{aligned}&(c-a)V'(u)+(\delta+\lambda)V(u)\\&\quad-\lambda\int_u^\infty \frac{V(y)(y-u)^{\alpha-1}e^{-\frac{y-u}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\,dy=0\end{aligned}\tag{33}$$

Multiplikation mit $e^{-\frac{u}{\beta}}(-\beta)^\alpha$ sowie α-malige Ableitung der Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}&(c-a)\frac{\partial}{\partial u}\left(1-\beta\frac{\partial}{\partial u}\right)V(u)+(\lambda+\delta)\left(1-\beta\frac{\partial}{\partial u}\right)V(u)\\&\quad-\lambda V(u)=0\end{aligned}\tag{34}$$

Wenn wir den Ansatz $V(u)=\sum_{i=1}^{\alpha+1}A_ie^{-R_ix}$ verwenden, ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für R:

$$-(c-a)R(1+\beta R)^\alpha+(\delta+\lambda)(1+\beta R)^\alpha-\lambda=0\,.\tag{35}$$

Wenn wir nun den Ansatz in (33) einsetzen, ergibt sich in Analogie zu (22):

$$\int_0^\infty V(u+y)\,d\gamma(y)=\int_0^\infty\sum_{i=1}^{\alpha+1}A_ie^{-R_i(u+y)}\,d\gamma(y)$$

$$= \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{-R_i u} \int_0^\infty e^{-R_i y} \frac{y^{\alpha-1} e^{\frac{y}{b}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{-R_i u} \int_0^\infty e^{-(R_i + \frac{1}{\beta})y} y^{\alpha-1} \, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{-R_i u} \frac{\Gamma(\alpha)}{(R_i + \frac{1}{\beta})^\alpha} \tag{36}$$

Ein Koeffizientenvergleich bestätigt (35). Damit $\lim_{u\to\infty} V(u) = 0$, müssen die Koeffizienten zu den Exponenten mit $\Im(R_i) \neq 0$, bzw. $\Re(R_i) \leq 0$ zu null werden. Dies ist möglich, da aus (36) keine Bedingungen für A_i abgeleitet werden können. Im folgenden werden uns die positiven Lösungen der Gleichung (35) interessieren. Es lässt sich zeigen, dass genau eine positive, reelle Lösung ϱ existiert. Damit ist die Lösung unter Beachtung von (8) eindeutig bestimmt durch

$$A_1 = \frac{1}{\varrho}, \quad A_i = 0 \quad \forall i > 1, \quad R_1 = \varrho. \tag{37}$$

Nachdem $\delta > 0$, ist die linke Seite von (35), die wir im folgenden mit $p(R)$ bezeichnen, an der Stelle $R = 0$ positiv, da $p(0) = \delta$. Des weiteren ist

$$\lim_{R\to\infty} p(R) = -\infty \tag{38}$$

Daher existiert zumindest eine positive reelle Nullstelle. Nun ist

$$p'(R) = (1 + \beta R)^{\alpha-1}[-(c-a)(1+\beta R) - (c-a)R + (\delta + \lambda)]$$

die Ableitung von $p(R)$ ein Polynom des Grades α, von dem wir $\alpha - 1$ negative, reelle Nullstellen kennen. Es verbleibt höchstens eine positive reelle Nullstelle der Ableitung. Das heisst, die einzige Möglichkeit, dass $p(R)$ mehr als eine positive Nullstelle hat, wäre gegeben, wenn eine doppelte Nullstelle auftritt. Dies ist jedoch aufgrund der Voraussetzung, dass alle Wurzeln verschieden sind, ausgeschlossen.

3.1.2 Die gemischte Exponentialverteilung

Nach einer analogen Vorgangsweise ergibt sich die Bestimmungsgleichung für R als

$$-(c-a)R + (\lambda+\delta) + \lambda \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{C_j B_j}{B_j - R} = 0\,. \tag{39}$$

Nach ähnlichen Betrachtungen wie im vorigen Kapitel zeigt sich, dass es genau eine positive Lösung ϱ gibt, deren Koeffizient $\frac{1}{\varrho}$ ist. Alle anderen Koeffizienten sind null, da sie zu einer unbeschränkten Lösung führen würden.

3.2 Zahlungen enden mit dem Ruin

3.2.1 Die Gammaverteilung

Wie in Kapitel 2 muss hier die Integro-Differential-Gleichung (9) unter den Nebenbedingungen (10) und (11) gelöst werden. Nachdem in (9) die Gammaverteilung für $F(y)$ eingesetzt wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} &cW_x(x,b) + aW_b(x,b) - (\lambda+\delta)W(x,b) \\ &+ \lambda \int_0^x \frac{W(x-y,b)(x-y)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-y}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\, dy = 0\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Es wird wieder der Exponentialansatz (19) gewählt, wobei sich in Analogie zu (20) ergibt:

$$cR(\beta R+1)^\alpha + aS(\beta R+1)^\alpha - (\lambda+\delta)(\beta R+1)^\alpha + \lambda = 0 \tag{41}$$

Die Bestimmungsgleichung (25) für A gilt auch hier. Des weiteren kann auch hier die Lösung als Reihe angegeben werden:

$$W(x,b) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{S_k b} \sum_{i=1}^{\alpha+1} A_{i,k} e^{R_{i,k} x} \right] \tag{42}$$

Um die Nebenbedingung (10) zu erfüllen, wird $S_0 = -\varrho$, $R_{1,0} = \varrho$, $A_{1,0} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt. Die restlichen Exponenten $R_{i,0}$ sind als Lösung von (41) eindeutig bestimmt, und die übrigen $A_{i,0}$ sind durch $R_{i,0}$ und $A_{1,0}$ als Lösungen von (25) eindeutig bestimmt. Damit ist die Nebenbedingung (10) erfüllt. Die Nebenbedingung (11) wird durch die Beziehungen (28) $R_{1,k'} + S_{k'} = R_{j,k} + S_k$, sowie (29) $A_{1,k'}R_{1,k'} = -A_{j,k}R_{j,k}$ erfüllt.

3.2.2 Die gemischte Exponentialverteilung

Die Gleichung (9) wird wieder durch eine Linearkombination der Ableitungen bis zur Ordnung α auf eine partielle Differentialgleichung der Ordnung $\alpha + 1$ zurückgeführt. Wir verwenden daher den Ansatz (19), den wir in die Integro-Differential-Gleichung (9) einsetzen, und erhalten

$$\begin{aligned} &ce^{Sb}\sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i R_i e^{R_i x} + aSe^{Sb}\sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{R_i x} - (\lambda+\delta)\sum_{i=1}^{\alpha+1} A_i e^{R_i x} \\ &- \lambda \int_0^x \sum_{i=1}^{\alpha+1}(A_i e^{R_i y}) \sum_{j=1}^{\alpha}(C_j B_j e^{B_j(x-y)})\, dy = 0\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Durch Auflösen des Integrals und Koeffizientenvergleich ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die R_i als

$$cR + aS - (\lambda+\delta) - \lambda \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{C_j B_j}{R - B_j} = 0\,. \tag{44}$$

Nach Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner ergibt sich ein Polynom in R, das genau $\alpha + 1$ Nullstellen besitzt. Ausserdem ergibt der Koeffizientenvergleich die Forderung an die A_i

$$\sum_{i=1}^{\alpha+1} \frac{A_i}{R_i - B_j} = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, \alpha\,. \tag{45}$$

Bei einer Vorgangsweise analog zum vorangegangenen Kapitel ergibt sich wieder eine Reihe für die Lösung, deren Koeffizienten und Exponenten eindeutig bestimmt sind.

4 Numerische Ergebnisse

4.1 Exakte Werte

Im allgemeinen werden die Koeffizienten sowie die Exponenten in den Reihenentwicklungen komplex sein. Dies stört bei der Berechnung nicht, wenn man beachtet, dass das Ergebnis reell sein muss, und eventuelle komplexe Anteile der Lösung nur aufgrund der begrenzten Rechengenauigkeit auftreten. Für grosses α sind die Nullstellen des Polynoms in der Bestimmungsgleichung (20) für R möglicherweise mit einem zu grossen numerischen Fehler behaftet, um in der Lösung verwendbar zu sein. In diesem Falle sind Abschätzungen nützlich, wie sie z.B. in [Ger 73] durch Martingale gewonnen werden.
Die obigen Rechenvorgänge wurden unter MAPLE V, Release 3 implementiert, der dazugehörige Code ist vom ersten Autor erhältlich. Für eine Einführung in Maple sei auf [Hec 92] verwiesen. Es zeigt sich, dass für $\alpha < 10$ eine effiziente Berechnung mit nur 100-Termen in der Reihenentwicklung möglich ist. In Tabelle 3 ist die Überlebenswahrscheinlichkeit $U(x,b)$ für die Gammaverteilung und $\alpha = 6$ in Prozent angegeben, wobei die restlichen Parameter wie folgt definiert wurden: $\beta = \frac{1}{\alpha}$, $c = 1.5$, $a = 1.1$, $\lambda = 1$. Eine Fehlerabschätzung für $W(x,b)$ könnte durch Einsetzen der Lösung in die Integralgleichung erfolgen.

4.2 Simulation

Das in Kapitel 1 definierte Modell wird simuliert. Der Schadenszählprozess ist ein Poissonprozess. Daher sind die Zwischenschadenszeiten exponentialverteilt. Ausgehend von der Zeit $t_0 := 0$ wird eine exponentialverteilte Zufallsvariable ε erzeugt, und anschliessend $t_{i+1} := t_i + \varepsilon$ gesetzt. Das Kapital zur Zeit t_i ist x_i, wobei $x_0 := x$ das Anfangskapital x der Versicherung ist. Die Schadensfälle y_i werden erzeugt für $i > 0$. Sie sind gamma- bzw. gemischt-exponentialverteilt. Danach gilt: $x_i := x_{i-1} + c\varepsilon - y_i$, wenn $x_{i-1} + c\varepsilon < b + at_i$, ansonsten gilt $x_i := b + at_i - y_i$.

4.2.1 Simulation der Überlebenswahrscheinlichkeit

Wir berechnen die Überlebenswahrscheinlichkeit $U(x,b) \approx \frac{m}{n}$ wobei m die Anzahl der überlebten Versuche, und n die Anzahl der Versuche bezeichnet. Gilt für ein i: $x_i < 0$, dann tritt Ruin ein, der Prozess wird beendet. Gilt für ein i: $x_i > x_{\max}$, wobei $x_{\max}$ eine durch die gewünschte Simulationszeit und Genauigkeit bestimmte obere Grenze ist, so wird der Prozess abgebrochen, aber Ruin ist nicht eingetreten. Dieser Fall wird als günstiger Fall gewertet. Bei endlichem $x_{\max}$ endet der Prozess offenbar mit Wahrscheinlichkeit 1. Der Schätzer $\frac{m}{n}$ kann für Verteilungen mit hohem Tail zu systematischen Fehlern führen, die sich als grosse Überschätzungen von $U(x,b)$ auswirken würden. Besonders in diesen Fällen wäre auch die Wahl von $x_{\max}$ sehr sensibel. Ein systematischer Bias durch hohe Tails muss bei den hier verwendeten Verteilungen nicht befürchtet werden.

4.2.2 Erwartungswert der Dividenden

Um den Erwartungswert der Dividenden zu berechnen, kann so vorgegangen werden: An allen Schadenszeitpunkten t_i, für die $x_{i-1} + c\varepsilon \geq b + at_i$ wird

$$\sigma_i := \sigma_{i-1} + \frac{c-a}{\delta}\left(e^{-\delta t_i} - e^{-\delta(t_{i-1} + \frac{b_{i-1} - x_{i-1}}{c-a})}\right)$$

gerechnet, wobei $\sigma_0 = 0$ ist. Das Abbruchkriterium wird $t_i > t_{\max} \vee x_i < 0$ gesetzt, wobei $t_{\max}$ eine Näherung für den Zeitpunkt ist, ab dem die abgezinsten Dividenden verschwinden oder genügend klein werden, um vernachlässigt zu werden. Der Endwert von σ_i wird mit σ bezeichnet. Dann ist

$$E[W(x,b)] \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma(j)\,. \tag{46}$$

4.2.3 Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

Für Kapitel 4.2.4 und 4.2.6 wird der von Afflerbach in [Aff 90] empfohlene Zufallszahlengenerator für gleichverteilte Zufallszahlen $\varepsilon(0,1)$ benutzt. Es ist der einfachrekursive gemischte Kongruenzgenerator

$$\textit{uniform} : x_i := 532393 x_{i-1} + 1 \pmod{268435456}. \tag{47}$$

Im folgenden bezeichnet $\mathcal{U}(a,b)$ eine durch *uniform* erzeugte Zufallszahl im Intervall (a,b).

4.2.4 Erzeugung exponentialverteilter Zufallszahlen

Ausgehend von einer gleichverteilten Zufallszahl $\mathcal{U}(0,1)$ wird durch Inversion der Verteilungsfunktion die exponentialverteilte Zufallsvariable

$$\mathcal{E} : \lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda} \ln(\mathcal{U}(0,1)) \tag{48}$$

erzeugt. Für eine allgemeinere Beschreibung der Methode sei auf Afflerbach [Aff 90] und Devroye [Dev 86] verwiesen.

4.2.5 Erzeugung gemischt-exponentialverteilter Zufallszahlen

Ausgehend von einer gleichverteilten Zufallszahl $\mathcal{U}(0,1)$ wird die Zufallszahl durch Inversion der tabellarisch gegebenen Verteilungsfunktion erzeugt, wie dies in [Dev 86] beschrieben wird.

4.2.6 Erzeugung gammaverteilter Zufallszahlen

Die gammaverteilten Zufallszahlen werden über Annahme-Verwerfung (A-V) und Inversion der Verteilungsfunktion erzeugt. Es wird der A-V-Algorithmus von Best verwendet: XG (1978) (siehe [Dev 86, Seite 410]).

4.3 *Integralgleichung*

In [Ger 81] wird gezeigt, dass die Lösung der Integro-Differentialgleichung (9) unter der Nebenbedingung (10) und (11) gleich der Lösung der Fixpunktgleichung $g(x,b) = Ag(x,b)$ ist, wobei A der Integraloperator

$$\begin{aligned} Ag(x,b) = & \int_0^{\frac{b-x}{c-a}} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} g(x+ct-y, b+at)\, dF(y)\, dt \\ & + \int_{\frac{b-x}{c-a}}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b+at} g(b+at-y, b+at)\, dF(y)\, dt \\ & + \frac{c-a}{\lambda+\delta} e^{-(\lambda+\delta)\frac{b-x}{c-a}} \end{aligned} \tag{49}$$

ist. Dies ist ein kontrahierender Operator, die Folge $g_i(x,b) = Ag_{i-1}(x,b)$ konvergiert also gegen den Fixpunkt von A, die Funktion $W(x,b)$. Zahlentheoretische Lösungsmethoden werden in [Tic 84] besprochen. So kann die Lösung z.B. auf folgende Arten gewonnen werden.

4.3.1 Iterative Lösung der Integralgleichung

Die Funktion g^i wird durch ein adaptives Gitter $[x_j, b_k]$ diskretisiert. In jedem Punkt (j,k) des Niveaus $i \leq i_{\max}$ wird die diskretisierte Lösung $\widehat{g}^i_{j,k}$ mit $\widehat{g}^0_{j,k} \equiv \frac{1}{2}$ gespeichert. Von dieser Lösung ausgehend, wird durch Monte-Carlo Integration mit jeweils $N+2$ Versuchen die Lösung im Niveau $i+1$ durch

$$\begin{aligned} \widehat{g}^{i+1}_{j,k} = & w_1 \sum_{n=1}^{N^1_{j,k}} e^{-(\lambda+\delta)t^i_n} I(\widehat{g}^i, x_j + ct^i_n - y^i_n, b_k + at^i_n) f(y^i_n) \\ & + w_2 \sum_{n=N^1_{j,k}+1}^{N+2} e^{-(\lambda+\delta)t^i_n} I(\widehat{g}^i, b_k + at^i_n - y^i_n, b_k + at^i_n) f(y^i_n) \\ & + \frac{c-a}{\lambda+\delta} e^{-(\lambda+\delta)\frac{b_k - x_j}{c-a}} \end{aligned} \tag{50}$$

berechnet. Es bezeichnet

$$w_1 = \frac{\lambda u_{j,k}(x_j + \frac{cu_{j,k}}{2})}{N^1_{j,k}} \quad \text{sowie} \quad w_2 = \frac{\lambda(\widehat{u} - u_{j,k})(b_k + \frac{a\widehat{u}}{2})}{N^2_{j,k}}.$$

Ausserdem ist $I(g, x, b)$ die lineare Interpolationsfunktion, die den Wert der Funktion g im Punkt (x, b) interpoliert. Die Variable $\widehat{u}$ ist der Zeitpunkt, ab dem die unter Abzinsung berechneten Dividenden sich mit fortschreitender Zeit nur mehr in vernachlässigbarem Masse ändern. Die Annahme eines endlichen Wertes für die Variable $\widehat{u}$ kann mit der begrenzten Rechengenauigkeit sowie der Endlichkeit des Gitters motiviert werden.
Die Funktion $g^0 \equiv \frac{1}{2}$ wird als Ausgangsfunktion verwendet. Die Variablen t^i_n sind gleichverteilte Zufallszahlen, die in jedem Schritt $i > 1$ und für jeden Summanden n erzeugt werden. Hierbei wird für $n \leq N^1_{j,k}$ die Variable $u_{j,k}$ durch $\min(\widehat{u}, \frac{b_j - x_k}{c-a})$ berechnet, und $t^i_n = \mathcal{U}(0, u_{j,k})$, $y^i_n = \mathcal{U}(0, x_k + cu_{j,k})$ wird nur angenommen, wenn $y^n_i \leq x_k + ct^i_n$ ist. Für $n > N^1_{j,k}$ wird $t^i_n = \mathcal{U}(u_{j,k}, \widehat{u})$, $y^i_n = \mathcal{U}(0, b_j + a\widehat{u})$ nur angenommen, wenn $y^n_i \leq b_j + at^i_n$ ist. Die Variablen N^1 und N^2, werden durch $N^1_{j,k} = N\lceil \frac{u_{j,k}}{\widehat{u}} + 1 \rceil$ und $N + 2 = N^1_{j,k} + N^2_{j,k}$ berechnet.

4.3.2 Doppeltrekursive Lösung der Integralgleichung

Im Gegensatz zum vorausgegangenen Kapitel soll hier die Lösung in einem einzelnen Punkt, ohne die Einschränkung eines Gitters berechnet werden. Der Näherungswert von $g(x, b)$ auf Niveau i wird durch

$$\begin{aligned} g^i(x,b) := {} & I_{u>0}\lambda e^{-(\delta+\lambda)t_1} f(y_1) g^{i-1}(x + ct_1 - y_1, b + at_1) u\left(x + \frac{cu}{2}\right) \\ & + \lambda e^{-(\delta+\lambda)t_2} f(y_2) g^{i-1}(x + ct_2 - y_2, b + at_2) \\ & \times (\widehat{u} - u)\left(b + \frac{a\widehat{u}}{2}\right) + \frac{c-a}{\lambda+\delta} e^{-(\lambda+\delta)\frac{b-x}{c-a}} \end{aligned} \tag{51}$$

für $i > 0$ und $g^{i_{\max}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g_k^{i_{\max}}$ berechnet, wobei $g^0 \equiv \frac{1}{2}$. Die genaue Darstellung der Indizes der Zufallsvariablen t sowie y ist durch die Natur

der Berechnung zu umständlich, so sei nur darauf verwiesen, dass mit jedem Aufruf von (51) die Zufallsvariablen t_1, t_2, y_1 sowie y_2 erzeugt werden. Das Paar t_1, y_1 wird durch AV gleichverteilt im Trapez $0 \leq t_1 \leq u$, $0 \leq y_1 \leq x + ct_1$ erzeugt, wenn $u = \frac{b-x}{c-a} > 0$. Die Zufallszahlen t_2, y_2 werden gleichverteilt im Trapez $u \leq t_2 \leq \widehat{u}$, $0 \leq y_2 \leq b + at_2$ erzeugt.

4.3.3 Rekursive Lösung der Integralgleichung

Das Problem der obigen Näherungsmethode liegt in der relativ hohen Anzahl von Funktionsauswertungen, die tief in der Rekursion stattfinden. Die folgende einfach rekursive Methode kann daher schneller durchgeführt werden

$$\begin{aligned} g_k^i(x,b) &:= e^{-\delta t_k^i} f(y_k^i) \\ &\times \begin{cases} g_k^{i-1}(x + ct_k^i - y_k^i, b + at_k^i) e^y (1 - e^{-x-ct_k^i}) & \text{für } t_k^i \leq u \\ g_k^{i-1}(b + at_k^i - y_k^i, b + at_k^i) e^y (1 - e^{-b-at_k^i}) & \text{sonst} \end{cases} \\ &+ \frac{c-a}{\lambda+\delta} e^{-(\lambda+\delta)\frac{b-x}{c-a}} \end{aligned} \tag{52}$$

für $i > 0$ und $g^{i_{\max}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} g_k^{i_{\max}}$ berechnet, wobei $g^0 \equiv \frac{1}{2}$. Die Variable $t_k^i := \mathcal{E}(\lambda)$ ist exponentialverteilt mit Parameter λ. Hierdurch kann die Multiplikation mit $\lambda e^{-\lambda t}$ entfallen, da

$$\int g(t)h(t)\,dt = \int g(t)\,dH(t) = E(g(T))\,, \tag{53}$$

wie dies z.B. in [HFZ 81] beschrieben wird. Wir setzen $y_{\max} := \min(x + ct_k^i, b + at_k^i)$. Die Variable $y_k^i := \mathcal{E}_{\text{cut}}(y_{\max})$ ist abgeschnitten-exponentialverteilt. Im Sinne von (53) muss daher mit $e^y(1 - e^{-y_{\max}})$ multipliziert werden, um der Nicht-Gleichverteilung Rechnung zu tragen. Diese Methode hat im Vergleich zur Methode aus (4.3.1) folgende Vor- bzw. Nachteile:

- Durch die Verwendung der Exponentialverteilung für t und y entfällt die Notwendigkeit, ein $\widehat{u}$ zu definieren, das den Integrationsbereich beschränkt.

- Es kann gezielt ein einzelner Funktionswert berechnet werden. Dies gilt auch für die doppelt-rekursive Lösung.
- Es entfällt die Notwendigkeit einer Diskretisierung und der damit verbundenen Interpolationsfehler.
- Das Verfahren ist im Vergleich zu dem doppelt-rekursiven Verfahren schneller und eleganter.
- Wird eine hohe Anzahl von Rekursionen erforderlich, so versagt die doppelte Rekursion, weil die Anzahl der Funktionsauswertungen exponentiell mit der Rekursionstiefe steigt.

4.4 Vergleiche

Die exakten und approximierten Werte wurden auf einem Gitter berechnet ($b = 0..[0.1]..1$, $x = 0..[0.1]..b$). Das Gitter beinhaltet aufgrund der Wahl der Parameter die Teile der Funktion, die der stärksten Änderung unterliegen bei Veränderungen von b bzw. x. Für jeden Gitterpunkt $i = 1..M$ wird der Unterschied Δ_i zwischen exaktem Wert und approximiertem Wert berechnet. Der maximale absolute Fehler ist dann $\|\Delta\|_\infty$ und der mittlere absolute Fehler ist durch $\frac{1}{M}\|\Delta\|_1$ definiert. In der Tabelle 4.4 findet sich ein Vergleich der exakten und simulierten Werte der Überlebenswahrscheinlichkeit.

Die verschiedenen in diesem Artikel besprochenen Näherungsverfahren für die Berechnung des Erwartungswertes der Dividenden werden in der Tabelle 4.4 bezüglich ihrer Approximationsgüte verglichen. Die Einzelschadenshöhen sind gammaverteilt mit Parameter $\alpha = 6$.

Die simulierten Werte wurden mit $n = 10.000$ sowie $x_{\max} = 40$, $t_{\max} = 80$ gerechnet. Für die exakten Werte wurden 100 Reihenelemente gerechnet. Die Approximation durch Simulation liefert gute Näherungen und ist besonders für komplexe Schadenshöhenverteilungen geeignet. Soll $U(x_i, y_i)$ für wenige i berechnet werden, so ist die Simulation auch was die Dauer der Berechnung betrifft interessant. Ein weiterer Vorteil der Simulation liegt darin, dass das dazugehörige Programm schnell an andere Verteilungen angepasst werden kann. Zur Überprüfung von analytisch gewonnenen Lösungen liefert die Simulation daher einen wertvollen Beitrag.

Um den Erwartungswert der Dividenden zu berechnen, sollte das einfachrekursive Verfahren verwendet werden, wenn Wert auf minimale absolute

Fehler gelegt wird. Die Fehlerabschätzung der Integralgleichung wirkt auf absolute Fehler, wohingegen die Simulation den Ausgleich im Mittel zum Ziel hat und daher kleinere Durchschnittsfehler produziert. Ein weiterer Vorteil der rekursiven Methode ist die Verwendbarkeit von Quasi-Monte-Carlo Verfahren zur numerischen Approximation [Tic 84]. Diese garantieren bessere Fehlerschranken als einfachrekursive Zufallszahlengeneratoren. Beide Verfahren sind etwa gleich schnell bei gleicher Anzahl der Iterationen.

Literatur

[Aff 90] Lothar Afflerbach. Die Gütebewertung von Pseudo-Zufallszahlen-Generatoren aufgrund theoretischer Analysen und algorithmischer Berechnungen. *Grazer Mathematische Berichte* (309), 1990.

[Dev 86] Luc Devroye. *Non-Uniform Random Variate Generation.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986.

[DG 84] D.C.M. Dickson and J.R. Gray. Exact solutions for ruin probability in the presence of an absorbing upper barrier. *Scand. Actuarial J.*, pages 174–186, 1984.

[Ger 73] Hans U. Gerber. Martingals in risk theory. *Mitteilungen schweiz. Versicherungsmathematiker,* pages 205–216, 1973.

[Ger 79] Hans U. Gerber. *An Introduction to mathematical risk theory.* S.S. Huebner Foundation, Philadelphia, 1979.

[Ger 81] Hans U. Gerber. On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier. *Scand. Actuarial J.*, pages 105–115, 1981.

[Hec 92] Andre Heck. *Introduction to Maple.* Springer-Verlag, New York, 1992.

[HFZ 81] E. Hlawka, F. Firneis, and P. Zinterhof. *Zahlentheoretische Methoden in der Numerischen Mathematik.* Schriftenreihe der Österreichischen Computer Gesellschaft. R. Oldenbourg Verlag Wien München, 1981.

[Tho 82] O. Thorin. Probabilities of ruin. *Skand. Actuarial J.*, pages 65–102, 1982.

[Tic 84] R.F. Tichy. Über eine Zahlentheoretische Methode zur numerischen Integration und zur Behandlung von Integralgleichungen. *Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften* (193), 1984.

Thomas Siegl
Robert F. Tichy
Institut für Mathematik A
Steyrergasse 30/2
A-8010 Graz

Vergleich	$\Gamma_{\alpha=3}$	$\Gamma_{\alpha=4}$	$\Gamma_{\alpha=5}$	$\Gamma_{\alpha=6}$	$\nu_{\alpha=2}$
$\|\Delta\|_\infty$	1,11	1,20	1,15	1,26	1,46
$\frac{1}{M}\|\Delta\|_1$	0,37	0,39	0,42	0,38	0,40

Tabelle 1: Vergleich der exakten und approximierten Werte für $U(x, b)$

Approximations-Verfahren	$\Gamma_{\alpha=6}$		$\nu_{\alpha=2}$			
	$\frac{1}{M}\|\Delta\|_1$	$\|\Delta\|_\infty$	$\frac{1}{M}\|\Delta\|_1$	$\|\Delta\|_\infty$	N	$i_{\max}$
Simulation (4.2)	0,0027	0,0084	0,0036	0,0156	10.000	n.A.
Iteration (4.3.1)	0,0043	0,0149	0,0359	0,1135	500	60
Doppelte Rekursion (4.3.2)	0,0034	0,0173	0,1121	1,1416	1.000	15
Einfache Rekursion (4.3.3)	0,0046	0,0129	0,0071	0,0147	1.000	80
	0,0049	0,0109	0,0032	0,0054	10.000	80

Tabelle 2: Vergleich der exakten und approximierten Werte für $W(x, b)$

b \ x	0,0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,00	24,29										
0,10	26,66	26,65									
0,20	28,93	29,20	29,23								
0,30	30,59	31,48	31,95	32,04							
0,40	31,63	33,05	34,19	34,87	35,07						
0,50	32,27	34,03	35,67	37,04	37,95	38,25					
0,60	32,67	34,64	36,59	38,43	40,02	41,13	41,52				
0,70	32,92	35,01	37,15	39,29	41,33	43,09	44,34	44,80			
0,80	33,08	35,25	37,51	39,82	42,13	44,31	46,19	47,53	48,03		
0,90	33,17	35,39	37,73	40,16	42,63	45,07	47,34	49,26	50,63	51,15	
1,00	33,23	35,48	37,86	40,36	42,94	45,54	48,05	50,34	52,26	53,61	54,13

Tabelle 3: Überlebenswahrscheinlichkeit $U(x, b)$ in % (exakt) für Gammaverteilung mit $\alpha = 6$

b \ x	0,0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,00	23,40										
0,10	26,87	25,99									
0,20	30,01	29,21	29,17								
0,30	31,04	32,10	32,64	32,37							
0,40	31,91	33,03	33,85	34,38	35,42						
0,50	32,08	34,01	35,49	37,57	37,63	38,09					
0,60	32,38	34,52	36,03	38,21	39,74	41,04	42,09				
0,70	33,00	35,07	37,40	38,90	41,34	43,20	44,28	44,99			
0,80	32,52	35,41	37,08	39,30	42,50	43,89	45,92	48,03	47,44		
0,90	33,52	35,43	37,66	39,65	42,53	44,62	47,74	49,58	51,07	51,15	
1,00	32,22	35,83	38,36	39,85	42,43	44,50	49,31	51,01	52,81	54,04	54,64

Tabelle 4: Überlebenswahrscheinlichkeit $U(x, b)$ in % (simuliert) für Gammaverteilung $\alpha = 6$

Zusammenfassung

In [Ger 81] untersucht H. Gerber folgendes Risikomodell: Es finden stetige Prämienzahlungen mit konstanter Intensität c statt. Die Schadensanzahl ist poissonverteilt mit Parameter λ, und die Verteilungsfunktion der Schadenshöhen $F(y)$ ist $1 - e^{-y}$. Erreicht das Kapital eine Schranke $b+at$ verbleibt es bis zum nächsten Schaden dort. Angelehnt an Dickson und Gray, die in [DG 84] die Lösung des Modells für den Fall einer horizontalen, absorbierenden Schranke betrachten, wird in der vorliegenden Arbeit die Überlebenswahrscheinlichkeit und der Erwartungswert der Dividenden für gemischt-exponential-, sowie gammaverteilte Schadenshöhen unter Verwendung des Softwarepaketes MAPLE analytisch berechnet. Ausserdem wird gezeigt, wie dieses Modell simuliert, sowie mit Hilfe einer Integralmethode gelöst werden kann. Durch ausführliche Tests werden alle diese Verfahren miteinander verglichen.

Résumé

H. Gerber étudie le modèle actuariel suivant [Ger 81]: Les primes sont payées à intensité constante c; le nombre des sinistres possède une distribution de Poisson de paramètre λ; le montant des sinistres une distribution exponentielle. Lorsque la réserve atteint la barrière $b + at$ elle reste à la barrrière jusqu'au prochain sinistre. S'inspirant de Dickson et Gray [DG 84], qui considèrent ce modèle dans le cas d'une barrière absorbante horizontale, les auteurs déterminent de manière analytique, à l'aide du logiciel MAPLE, la probabilité de survie et l'espérance mathématique des dividendes, lorsque le montant des sinistres suit une loi exponentielle mixte ou une loi gamma. Ils montrent également comment ce modèle peut être simulé et comment il peut être résolu à l'aide d'une méthode d'intégration. Ces procédés sont comparés à l'aide de nombreux tests.

Summary

H. Gerber investigates the following actuarial model [Ger 81]: The premium flow is continuous with a constant intensity c. The claim number variable is Poisson-distributed with parameter λ; the claim size distribution is given by $F(y) = 1 - e^{-y}$. If the capital reaches a barrier $b + at$, it stays on the barrier up to the next claim. Guided by Dickson and Gray [DG 84], who consider the solution of the model in case of a horizontal barrier, the authors compute the survival probability and the expected value of the dividends for mixed-exponential- and gamma-distributed claimsizes, using the software package MAPLE. Furthermore they demonstrate how this model can be simulated and how a solution can be found by an integration-method. All these procedures are compared with the help of detailed tests.