Die Mathematik : ein universales Denkprinzip

Autor(en): **Loeffel, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): **- (1996)**

Heft 1

PDF erstellt am: **31.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-550932

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

HANS LOEFFEL, St. Gallen

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.
Georg Cantor

Die Mathematik – ein universales Denkprinzip[1]

Einleitung

Christian Wolff (1679–1754), Mathematiker, Philosoph und Begründer des deutschen Rationalismus, schrieb vor rund 250 Jahren im Vorwort eines seiner zahlreichen Lehrbücher:

> *"Ich pflege die Mathematik aus zwei Gründen zu recommendieren: Einmal wegen der unvergleichlichen Ordnung, in welcher sie ihre Sachen gründlich ausführet, darnach wegen ihrer Lehren, welche sowohl in gründlicher Erkenntnis der Natur und Kunst, als im menschlichen Leben vielfältig genutzet werden."*

In dieser Charakterisierung der Mathematik fallen die Begriffe *Ordnung, Natur, Kunst* und *Nutzen* auf. Ordnung als Arbeitsprinzip der mathematischen Denkweise ist uns allen vertraut. Aber auch sonst ist der Begriff Ordnung in der Mathematik häufig anzutreffen. Besonders erwähnt sei die *Ordnungsstruktur* als eine von drei Grundstrukturen, nach denen das *"Unternehmen Bourbaki"* (streng axiomatisch konzipierte Darstellung des mathematischen Wissens unserer Zeit) gegliedert ist.

Schon in der griechischen Antike finden wir Zeugnisse für die enge Verwandtschaft zwischen *Natur* und Mathematik.
Im ersten Buch der Weltharmonik bringt *Johannes Kepler* (1571–1630) das einleitende Zitat des griechischen Philosophen und Neuplatonikers *Proklos Diadochos* (411–485 n. Chr.):

> *"Für die Betrachtung der Natur leistet die Mathematik den grössten Beitrag, indem sie das wohlgeordnete Gefüge der Gedanken enthüllt, nach dem das All gebildet ist."*

[1] Text der Abschiedsvorlesung

In der historischen Rückblende finden wir grosse Mathematiker, die entscheidende Beiträge zur Mathematisierung der Naturwissenschaften geleistet haben. Es sind dies u.a. *Archimedes von Syrakus* (ca. 287–212 v. Chr.), *Galilei* (1564–1642), *Newton* (1642–1727), *Euler (1707–1783)* und *Einstein* (1879–1955). Von Galilei stammt die Aussage *'Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben'*, und Newton hat mit seiner Fluxionsrechnung (bewegungsorientierte Form der Infinitesimalrechnung) ein universales mathematisches Instrument für die ganze Physik geschaffen. Der geniale Basler Mathematiker *Leonhard Euler* ist mit seinen zahlreichen Anwendungen in Mechanik, Optik, Hydrodynamik, Astronomie, Schiffsbau etc. berühmt geworden. *David Hilbert* (1862–1943), als Vater des modernen *Formalismus* bekannt, äussert sich 1930 zur Beziehung zwischen Naturwissenschaft und Mathematik wie folgt:

> *"Die Natur kann nur der verstehen, der ihre Sprache und die Zeichen kennengelernt hat, in der sie zu uns redet; diese Sprache aber ist die Mathematik und ihre Zeichen sind die mathematischen Figuren."*

Im weiteren ist Hilbert überzeugt, dass sich Astronomie und Physik in ihren theoretischen Teilen geradezu in Mathematik auflösen. Eine solch enge Verknüpfung von Mathematik (als Geisteswissenschaft) mit der Naturwissenschaft wird aus grundsätzlichen Ueberlegungen stets umstritten bleiben. *Albert Einstein* nimmt zu dieser Problematik kategorisch Stellung mit den Worten:

> *"Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit."*

Im eingangs erwähnten Zitat von Wolff wird auch die Verwandtschaft von Mathematik und *Kunst* erwähnt. In Brechts *'Leben des Galilei'* bemerkt der Kurator der Universität Padua:

> *"Die Mathematik ist eine brotlose Kunst sozusagen. Sie ist nicht so nötig wie die Philosophie, noch so nützlich wie die Theologie, aber sie verschafft den Kennern doch so unendliche Genüsse."*

Albrecht Dürer (1471–1528), der geniale Maler und Zeichner, empfiehlt dem angehenden Künstler in seiner *'Unterweysung der Messung mit Zirckel und Richtscheyt'* das Studium der Grundlagen der Euklid'schen Geometrie.

In unserem Jahrhundert finden wir beim holländischen Maler und Zeichner *M.C. Escher* (1898–1972) eine faszinierende Durchdringung von graphischer Kunst und mathematischen Strukturen. Bei Escher treten Begriffe wie Symmetrie, Unendlichkeitsannäherungen, Möbiusbänder auf, die auch in der Mathematik anzutreffen sind. Nach seinen eigenen Worten *'fühlte er sich oft mehr den Mathematikern als seinen eigenen Berufskollegen verwandt'.*

Offensichtliche Strukturgemeinsamkeiten zeigen sich im Vergleich von Mathematik und *Musik.* Die historischen und musiktheoretischen Wurzeln dieser Verwandtschaft gehen auf den Philosophen und Religionsstifter *Pythagoras von Samos* (ca. 580–500 v. Chr.) zurück, der den Wohlklang von Tonintervallen mit einfachen Verhältnissen von ganzen Zahlen in Verbindung gebracht hat. Eine der vier pythagoreischen Wissenschaften ist die *Harmonielehre,* die auf spätere Generationen von Wissenschaftlern grossen Einfluss ausgeübt hat, so u.a. auf Johannes Kepler und Hermann Hesse.
Leibniz (1646–1716) bezeichnete die *Musik* als *verborgene arithmetische Uebung der Seele,* welche dabei nicht wisse, dass sie mit *Zahlen* umgehe. Der Schweizer Dirigent, Musiktheoretiker und Mathematiker *Ernest Ansermet* (1883–1969) schreibt in seinem Werk *'Die Grundlagen der Musik im menschlichen Bewusstsein':*

> *"Es ist dieselbe sogenannte 'Vernunft', die in der Logik, in der Mathematik und in der Musik wirkt; in der Logik und Mathematik gewinnt sie Gestalt als Gedanke, in der Musik als Gefühl."*

In besonderem Masse überraschend und bewegend ist die Tatsache, dass der bedeutendste Vertreter der Frühromantik, *Friedrich von Hardenberg* (1772–1801), bekannt unter dem Dichternamen *Novalis,* in tiefgründiger Weise *das mathematische Denken und seine Sprache als Teil eines umfassenden geistigen Kosmos* verstanden hat. Für ihn galt die Losung:

> *"Alle Kunst ist Wissenschaft und alle Wissenschaft ist Kunst."*

Armand Borel, geboren 1923, Professor am Institute of Advanced Studies in Princeton und früher Mitglied der bereits erwähnten *Gruppe Bourbaki,* hat 1982 in seinem Vortrag zum Thema *'Mathematik: Kunst und Wissenschaft'* Stellung genommen. Der weltweit bekannte Forscher weist darauf hin, dass die Tätigkeit eines Mathematikers mit der eines Künstlers viel Gemeinsames hat:

> *"Ein Maler kombiniert Farben, ein Musiker Töne, ein Dichter Wörter und ein Mathematiker Ideen besonderer Art."*

Obschon die 'Gedichte' der Mathematik in einer sehr speziellen und abstrakten Sprache geschrieben sind, ist die Rede von *intellektueller Eleganz und Schönheit.* Als Beispiel sei aufgeführt die 'mystische Gleichung'

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad \text{mit} \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

ein Spezialfall der sogenannten *Euler'schen Relation.*

Zum Abschluss unserer Einleitung möchten wir noch darauf hinweisen, dass *Wolff* in seiner Empfehlung auf den vielfältigen *Nutzen* der Mathematik hinweist. Der Polyhistor *Leibniz* – mit Wolff befreundet – hat den folgenden Grundsatz aufgestellt:

> *"... immer bei den Worten und übrigen Zeichen die Klarheit, bei den Dingen aber den Nutzen sehen."*

'Vom Nutzen der höheren Mathematik' ist der Titel einer Abhandlung, die von *Euler* stammt und mit den Worten beginnt:

> *"Heute bezweifelt niemand den grossen Nutzen der Mathematik, denn vielen Wissenschaften und Künsten, deren wir uns täglich bedienen, ist sie unentbehrlich."*

Diese Worte stammen aus der Mitte des 18. Jahrhunderts und haben sich entwicklungsgeschichtlich mehr als erfüllt, wenngleich im Zusammenhang mit der Ausdehnung der Anwendungsbereiche neuartige Probleme aufgetaucht sind, von denen im folgenden Kapitel zum Teil die Rede ist.

"Die Mathematik der Theorie der Spiele ist völlig anderer Art. In ihr tauchen Probleme und Theoreme auf, die weder in der Physik noch in der klassischen Mathematik vorkommen."

Oskar Morgenstern

Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Die ersten Anwendungen einfachster Mathematik auf wirtschaftliche Fragestellungen finden wir im Bereich der *kaufmännischen Arithmetik* schon beim Minoritenpater *Luca Pacioli* (ca. 1445–1514), dem Erfinder der doppelten Buchhaltung. Die systematische Anwendung gehobener mathematischer Methoden in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist in die Mitte des 18. Jahrhunderts zu datieren. So hat – um ein Beispiel zu nennen – der Basler Mathematiker *Jakob Bernoulli* (1654-1705) mit seinem *'Gesetz der grossen Zahlen'* die Grundlage zur induktiven Statistik (oder mathematische Statistik) gelegt. Diese hat sich in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts, besonders gefördert durch *R.A. Fisher, J. Neyman* und *A. Wald,* zu einem universalen Instrument experimenteller Forschung entwickelt.

An dieser Stelle ist noch ein besonderer Zweig der Volkswirtschaft zu nennen, der auch von erheblicher sozialer Bedeutung ist, nämlich die *Versicherungswissenschaft.* Sie ist herausgewachsen aus der *Seefahrtsversicherung* und aus einfachen *Sterbe- und Witwenkassen,* die im allgemeinen über keine zuverlässigen technischen Grundlagen verfügten. Der aus Frankreich stammende Hugenotte *Abraham de Moivre* (1667–1754) hat die *Leibrentenrechnung* mit Hilfe der schon früher erwähnten Fluxionsrechnung von Newton auf solide mathematische Grundlagen gestellt. Zudem hat *Euler* um 1750 das sogenannte *Aequivalenzprinzip* der *Lebensversicherungsmathematik* mustergültig formuliert.

Unter dem immer stärker werdenden Einfluss von *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik* hat sich die Versicherungswissenschaft in verschiedenen Richtungen stark entwickelt. Zu nennen wäre etwa die sogenannte *Risikotheorie,* die in der Schweiz vorab von *H. Ammeter* und *H. Bühlmann* entwickelt und wesentlich gefördert wurde. Ganz neueren Datums ist die Tatsache, dass sich die Versicherungsmathematiker auch mit der modernen *Finanzmarktanalyse (Portfoliotheorie, Optionen etc.)* beschäftigen

und dabei sehr anspruchsvolle Methoden aus der Stochastik zum Einsatz bringen.

Eine grundsätzliche *Wende* in der Beziehung Mathematik und Wirtschaftswissenschaften auf breiter Front vollzog sich gegen Ende des 2. Weltkrieges. Unter dem Druck der prekären strategischen Verhältnisse schloss sich in England eine Gruppe von Wissenschaftlern – darunter auch Mathematiker – zusammen, um sich der *militärischen Operationsforschung zu widmen.* Daraus entwickelte sich durch Erweiterung des Anwendungsfeldes bald das sogenannte *Operations Research* oder die *Angewandte Mathematik in den Wirtschaftswissenschaften.* Verschiedene Optimierungsverfahren, Simulationstechniken und entscheidungstheoretische Methoden stehen dabei im Mittelpunkt.

Zur gleichen Zeit wurde in den USA der erste vollautomatische Grossrechner *ENIAC* gebaut, mit dessen Hilfe anspruchsvolle mathematische *Modelle* und komplizierte *Algorithmen* effizient behandelt werden konnten. Führend in diesem Unternehmen war der Mathematiker *John von Neumann* (1903–1957), Professor am Institute of Advanced Studies in Princeton (USA). Er war Schüler von *Hermann Weyl* (1885–1955) und wurde mit Recht als 'säkulare Erscheinung' bezeichnet. Mit Kompetenz und Brillanz betätigte er sich in der mathematischen Grundlagenforschung, der Automatentheorie und der theoretischen Physik.

Bei den mathematisch interessierten Oekonomen unserer Zeit dürfte *von Neumann* eher als Begründer eines ganz neuartigen Zweiges der Mathematik bekannt sein, nämlich der *Theorie der strategischen Spiele,* kurz *Spieltheorie* genannt.

Den Anfang machte 1928 eine Publikation mit dem Titel *'Zur Theorie der Gesellschaftsspiele',* erschienen in den Mathematischen Annalen, Bd. 100, die ihres abstrakten Gehaltes wegen kaum beachtet wurde. Zum Durchbruch der neuen Ideen kam es erst 1943, dem Erscheinungsjahr des umfangreichen Gemeinschaftswerkes *'Theory of Games and Economic Behavior'* des Mathematikers *J.v. Neumann* und des Oekonomen *Oskar Morgenstern.* Unter *Spieltheorie* versteht man eine Sammlung von mathematischen Modellen zum Studium der *Entscheidungsbildung in Konfliktsituationen,* die z.B. bei den sogenannten strategischen Spielen, wie etwa Schach und Jassen, in Erscheinung treten. Von Bedeutung ist jedoch die Tatsache, dass spieltheoretische Methoden auch *Anwendung* finden in den Bereichen statistische Entscheidungstheorie, Marketing, Politik- und Militärwissenschaft,

Soziologie und Psychologie und vor allem in den *Wirtschaftswissenschaften.* In diesem letztgenannten Bereich ist die Analyse von Konfliktsituationen besonders wichtig, weil wirtschaftliches Handeln immer auch in Interessengegensätze eingebettet ist.

Morgenstern äusserte sich über den Stellenwert der Spieltheorie wie folgt:

> *"Die Entstehung der Spieltheorie bedeutet einen klaren Bruch in der Entwicklung des wirtschaftswissenschaftlichen Denkens, sie berührt die Grundlagen dieser Wissenschaft."*

Nach einer anfänglichen Euphorie ist es um die Spieltheorie etwas still geworden. Doch seit Anfang der achtziger Jahre hat sie sich zusehends an den besten Universitäten etabliert. Als Höhepunkt in der Entwicklungsgeschichte der Spieltheorie ist die kürzliche Verleihung des *Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften* zu bezeichnen. Mit dieser renommierten Auszeichnung wurden die beiden Amerikaner *John Nash* und *John Harsanyi* sowie der Deutsche *Reinhard Selten* bedacht für ihre *Beiträge zur nicht kooperativen Spieltheorie.*

Ein einfaches Beispiel mit militärpolitischer Einkleidung soll die genannte Theorie illustrieren.

Wir betrachten 2 Spieler A (z.B. Nato) und B (z.B. Russland), die je über 2 Strategien a_1 und a_2 resp. b_1 und b_2 verfügen, welche sie *gleichzeitig* und *unabhängig* voneinander wählen.

A: a_1 = abrüsten a_2 = aufrüsten
B: b_1 = abrüsten b_2 = aufrüsten

Die nachstehende Bi-Matrix zeigt uns die Gewinne an, die den beiden Spielern zukommen und zwar in Abhängigkeit ihrer eigenen Strategie und derjenigen ihres Gegners.

$A \backslash B$	b_1	b_2
a_1	$(5,5)$	$(0,6)$
a_2	$(6,0)$	$(1,1)$

Wählt beispielsweise A die Strategie a_1 (1. Zeile) und B die Strategie b_2 (2. Kolonne), so resultiert für A der Gewinn 0 und für B der Gewinn 6.

Gesucht ist nun ein *Paar optimaler Strategien* (a_0, b_0) unter der Voraussetzung, dass jeder Spieler seinen Gewinn zu maximieren versucht. Achtet jeder Spieler nur auf seinen Gewinn, und ist er dem Gegner misstrauisch gesinnt, so resultiert daraus als 'optimales' *Strategienpaar* $(1, 1)$ ein sogenannter *Gleichgewichtspunkt* im Sinne von J. Nash. Dieser ist dadurch charakterisiert, dass kein Spieler einen Anreiz verspürt, von seiner GG-Strategie abzuweichen, wenn sein Gegner dies auch nicht tut.

Nash hat im Jahre 1951 gezeigt:

> *"Jedes nicht-kooperative 2-Personen-Spiel mit endlich vielen reinen Strategien besitzt mindestens ein Paar von gemischten Gleichgewichtsstrategien."*

(Unter einer gemischten Strategie versteht man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der reinen Strategien.)
Bemerkenswert ist übrigens die Tatsache, dass der GG-Punkt $(1, 1)$ in obiger Spielmatrix vom sogenannten *Pareto-Optimum* $(5, 5)$ stark dominiert wird. Diese 'beste' Lösung wird aber offenbar nur dann realisiert, wenn *kooperatives* Handeln möglich ist. Es sei noch kurz darauf hingewiesen, dass im Zuge der Entwicklung der Spieltheorie die moderne *Nutzentheorie nach Neumann-Morgenstern* entstanden ist. *Abraham Wald* (1902–1950), einer der bedeutendsten Statistiker unseres Jahrhunderts hat gezeigt, dass die *induktive Statistik* als strategisches Spiel zwischen dem Statistiker und der 'Natur' interpretiert werden kann.

Wie wird sich die Spieltheorie in Zukunft entwickeln? Im Zentrum wird die Frage der adäquaten *Modellbildung* sein, besonders was den *Widerspruch* zwischen theoretischen Prognosen und experimentellen Resultaten betrifft. Zu prüfen wäre auch, ob die aktuellen *mathematischen Instrumente* (Kombinatorik, Mengenlehre, mathematische Logik und Topologie) ausreichen. In letzter Zeit wird oft von einer neuen Mathematik gesprochen, z.B. der *fuzzy set theory* (Theorie unscharfer Mengen) oder der *Entscheidungstheorie bei unvollständiger Information,* Methoden, die den Gegebenheiten in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften vermehrt Rechnung tragen.

Mathematische Ausbildung und Bildung an einer Wirtschaftshochschule, im besonderen der Hochschule St. Gallen (HSG)

Naturgemäss wird an einer Wirtschaftshochschule die Mathematik *praxis-* und *anwendungs*-orientiert gelehrt. Schon im Gründungsjahr 1899 der heutigen HSG (damals hiess sie *Städtische Handelsakademie*) wurde kaufmännische Arithmetik, politische Arithmetik (Frühform der beschreibenden Statistik) angeboten, und wenige Jahre später folgten sogar Infinitesimalrechnung sowie Finanz- und Versicherungsmathematik.

Unterstützende mathematische Vorlesungen für die Vertiefungsgebiete *Operation Research* und *Oekonometrie* (z.B. Spieltheorie, Entscheidungstheorie bei Unsicherheit etc.) sind ab ca. 1960 im Vorlesungsverzeichnis zu finden.

Erst ab 1970 haben *alle* Studenten eine mathematische *Grundvorlesung* zu besuchen. Sie umfasst die einfachsten *Methoden* und *Techniken,* die heutzutage in den verschiedenen Zweigen der Wirtschaftswissenschaft eingesetzt werden. Im *Grundsatz* ist die Vermittlung von Mathematik nicht Selbstzweck sondern *Schule des Denkens* und ausgerichtet auf vielfältige *Anwendungen* in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. Dem didaktischen Aspekt wird grosse Aufmerksamkeit geschenkt, indem der Abstraktionsgrad zugunsten von *Anschauung* und *Intuition* in Grenzen gehalten wird.

Eine *fundamentale Erweiterung* des geistigen Horizontes in der Wissensvermittlung von Mathematik erfolgt meiner Ansicht nach durch Einbezug von *historisch-philosophischen Aspekten.* Diese Erweiterung von der Ausbildung zur *Bildung* erfolgte 1976 durch Eingliederung der Mathematik in den Kreis der sogenannten *Kulturfächer* (Philosophie, Psychologie, Literatur etc.).

Das *Kulturfach Mathematik* soll die Brücke schlagen zu anderen Disziplinen und Erkenntnisquellen und uns erlauben, aus der Sicht der *Mathesis universalis* (im Sinne von Leibniz und Novalis) eine ganzheitliche Betrachtung des geistigen Universums anzustreben.

Zum Abschluss dieses Kapitels möchte ich noch einige *lokal-historische* Bemerkungen betreffend St. Gallen einstreuen. Die St. Galler Kantonsbibliothek *Vadiana* (benannt nach dem Humanisten und ehemaligen Bürgermeister von St. Gallen, *Vadian,* der von 1484 bis 1551 lebte) verfügt über einige sehr seltene und äusserst wertvolle *mathematisch-astronomische Erstlingswerke,* so u.a.:

a) Von *Nikolaus Kopernikus* (1473–1543) das Grundlagendokument des heliozentrischen Weltsystems *'Von der Umdrehung der Himmelskörper'*, erschienen im Todesjahr 1543.
b) Von *Galileo Galilei* (1564–1642) *'Dialog über die Weltsysteme'*, erschienen 1635.
c) Von *René Descartes* (1596–1650) das Gründungsdokument des französischen Rationalismus *'Abhandlung über die Methode, die Vernunft richtig zu leiten und die Wahrheit in den Wissenschaften zu erforschen'*, erschienen 1637.

Schliesslich seien noch drei Mathematiker genannt, die mit St. Gallen direkt oder indirekt in Beziehung standen:

1.) *Jost Bürgi* (1552–1632), geboren in Lichtensteig (Kt. St. Gallen). Der sehr begabte Mathematiker und Instrumentenbauer arbeitete in Prag zusammen mit Kepler am Aufbau des Kopernikanischen Weltsystems.
2.) *Paul Guldin* (1577-1643) wurde in St. Gallen geboren und trat später in den Jesuitenorden ein. Die Mathematiker kennen ihn nach der sogenannten *Guldin'schen Regel.* Seine Versuche, Kepler zum Katholizismus zu bewegen, blieben erfolglos.
3.) *Leonhard Euler* hat sich 1733 mit der St. Gallerin *Katharina Gsell* verheiratet. Sie war die Tochter von Georg Gsell, Maler am Hofe Peters des Grossen in St. Petersburg.

> Als Mathematik können wir das Gebiet bezeichnen, auf dem wir nie wissen, wovon wir eigentlich reden und ob das, was wir sagen auch wahr ist.
>
> Bertrand Russell

Die Mathematik als Teil des geistigen Universums – ein Epilog

Wir haben in den beiden vorangegangenen Kapiteln viel von den Anwendungen der Mathematik gesprochen, denen sie ihr Ansehen bei einem weiten Publikum verdankt. Trotzdem haben es fast alle Mathematiker abgelehnt, die Anwendungen als Wertmesser für die Mathematik gelten zu

lassen. Der grosse Königsberger Mathematiker *C.G. Jacobi* (1804–1851) spricht sich deutlich aus, wenn er sagt:

> *"Die Ehre des menschlichen Geistes ist der einzige Zweck aller Wissenschaft."*

Wie passt dieses Hohelied auf die Mathematik zum Eingangszitat von Russell, das den mathematischen Aussagen ein solch unsicheres Fundament zuschreibt und die Wahrheitsfrage völlig offenlässt?
Hier drängt sich wohl die Frage auf, *was Mathematik* eigentlich *ist* und auf welches Fundament sie sich abstützt. Wenn man von der empirisch-materialistischen Interpretation absieht, gibt es im wesentlichen *zwei* Antworten.
Die erste bezieht sich auf die *pythagoreische Zahlenmystik* und die *Ideenlehre von Platon* (ca. 429–348). Diese nimmt an, dass die Elemente der Mathematik (z.B. Zahl, Punkt, Gerade etc.) und die Gesetze, die sie miteinander verbinden, seit Urbeginn und unabhängig vom menschlichen Geist als sogenannte *Archetypen* (im Sinne von *C.G. Jung* (1875–1961) und *W. Pauli* (1900–1958)) *existieren.* Berühmte Mathematiker und Mathematiker-Theologen haben diesen Standpunkt vertreten.
Der an der Wende zwischen Humanismus und Renaissance stehende Kardinal *Nikolaus von Cues* (1401–1464) – berühmt geworden durch seine *'De docta ignorantia'* (*Von der wissenden Unwissenheit*) – äussert sich wie folgt:

> *"Können wir uns dem Göttlichen auf keinem anderen Wege als durch Symbole nähern, so werden wir uns am passendsten der mathematischen Symbole bedienen, denn diese besitzen unzerstörbare Gewissheit."*

Johannes Kepler (1571–1630), Mathematiker-Theologe und Entdecker der Gesetze der Planetenbahnen schreibt:

> *"Die geometrischen Figuren sind ewig, die geometrischen Sätze von ewig her wahr im Geiste Gottes. Ergo quanta sunt mundi archetypus."*

Schliesslich zitieren wir noch den bedeutenden Mathematiker-Philosophen *René Descartes,* Begründer einer radikal neuen Philosophie, auf der letztlich unser heutiges Wissenschaftsverständnis beruht. Im ersten Kapitel seiner

schon oben erwähnten *'Abhandlung über die Methode des richtigen Vernunftgebrauchs'* analysiert Descartes die verschiedenen Wissenschaften und bekennt:

> *"Ganz besonders gefielen mir die mathematischen Wissenschaften wegen der Sicherheit und Klarheit ihrer Gründe."*

Die aufgeführten Zeugnisse widerspiegeln einen festverankerten Glauben an eine *einzige, wahre und ewiggültige Mathematik.* Dieser Glaube wurde in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zum ersten Male stark erschüttert. Um 1830 haben die Mathematiker *C.F. Gauss* (1777–1855), *Joh. Bolyai* (1802-1860) und *N.I. Lobatschewsky* (1793–1856) fast gleichzeitig die Existenz von sogenannten *Nicht-Euklid'schen Geometrien* nachgewiesen, in denen das umstrittene *Parallelenpostulat* von Euklid (Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden gibt es genau eine Parallele) nicht mehr gültig ist. Diese neue Art von Geometrie, die der 'Realität' des Raumes scheinbar widerspricht, fand rund achtzig Jahre später Eingang in die *Relativitätstheorie* von *Einstein* (1879–1955). Das Phänomen, wonach sehr *abstrakte* und angeblich *nutzlose* mathematische Theorien früher oder später eine ganz *konkrete* Anwendung finden, ist typisch für die Entwicklungsgeschichte der Mathematik.
In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts hat *Georg Cantor* (1845–1918) die transfinite *Mengenlehre* begründet und u.a. gezeigt, dass das *Unendliche hierarchisch gegliedert* ist. Geradezu dramatisch verlief sein Kampf – im Verbunde mit bekannten Theologen – um die Legitimität des sogenannten *Aktual-Unendlichen;* ein in sich *festes, konstantes,* jedoch jenseits aller endlichen Grössen liegendes Quantum.
Die von *B. Russell (1872–1970)* formulierte *'Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten'* führte zu einer *Antinomie* und bewirkte eine *Grundlagenkrise* der Mathematik.
Im Kontext mit den oben erwähnten erkenntnistheoretischen und logischen Schwierigkeiten drängt sich die zweite Antwort auf die Frage nach dem Wesen der Mathematik auf. Nach heutiger, moderner Auffassung ist die Mathematik die *Wissenschaft von den formalen Systemen,* streng *axiomatisch* aufgebaut und geordnet nach gewissen *Strukturen.* Die Natur der betrachteten Elemente spielt dabei keine Rolle, und vom System wird in erster Linie die *Widerspruchsfreiheit* gefordert. *David Hilbert* gilt als Vater dieses strengen *Formalismus,* der auch im bereits erwähnten *Unternehmen Bourbaki*

(nach Strukturen geordnete, enzyklopädische Darstellung der Mathematik unserer Zeit) als Leitlinie dient.
Eine mathematisch-logische Sensation brachte der Satz von *Kurt Gödel* (1906–1978), formuliert im Jahre 1931:

> *"Falls das zahlentheoretische System S widerspruchsfrei ist, kann man die Widerspruchsfreiheit nicht mit den Mitteln des Systems beweisen."*

Nach dem Philosophen *W. Stegmüller* (geb. 1923) ist damit eine Selbstgarantie menschlichen Denkens, auf welchem Gebiet auch immer, ausgeschlossen.

Unberührt von den dargelegten Grundlagenproblemen wird sich die Mathematik – in klassischer Form oder in abstrakter Ausprägung – auch in Zukunft und im Gleichschritt mit der *Informatik* weiter entwickeln. Hierbei wird auch die *Spezialisierung* in beschleunigtem Masse zunehmen und 'Wissensinseln' schaffen, die kaum mehr miteinander in Beziehung kommen.
Friedrich Dürrenmatt (1921-1990), einer der wenigen Schriftsteller, die für die Mathematik ein vitales Interesse zeigten, bezeichnete diese Wissenschaft *als exaktesten Ausdruck menschlicher Phantasie und unbeschränkt in ihrer Fähigkeit zur Fiktion.* Mein ehemaliger akademischer Lehrer *Beno Eckmann* (geb. 1917) *von der ETHZ* hat die verschiedenen Erscheinungsformen mathematischer Reflexion mit Präzision und Eleganz umschrieben:

> *"Mathematik ist eh und je in ihren simultanen Rollen Kunst und unsichtbarer Teil kultureller Tradition, Werkzeug in unserer Welt und Muster objektiver Wahrheitsfindung."*

In dieser Formulierung wird die *Universalität* der mathematischen Methoden offenbar. Das wird den kritischen Wissenschaftler aber nicht davon abhalten, sich Gedanken zu machen über den *Sinn* und die *Grenzen* der *Mathematisierung* in den verschiedenen Anwendungsbereichen und offen zu sein gegenüber *anderen Quellen* der Erkenntnis.
Es waren immer wieder Physiker, die sich für solche Grenzüberschreitungen interessiert haben. So finden wir etwa bei *Einstein* das Bekenntnis:

> *"Die Erkenntnis der Wahrheit ist herrlich, aber als Führerin ist sie so ohnmächtg, dass sie nicht einmal die Berechtigung unseres Strebens nach Wahrheit zu begründen vermag. Hier stehen wir einfach den Grenzen der rationalen Erfassung unseres Daseins gegenüber."*

Die Schlussbetrachtung richten wir nach dem grossen Mathematiker, Philosophen und Schriftsteller *Blaise Pascal* (1623–1662) aus, der in seiner Person die Welt der *Ratio (l'esprit de géometrie)* und die Welt der *Intuition (l'esprit de finesse)* vereinigt hat. Als genialer Forscher und Denker hat er die *Grenzen rationaler Argumentation* (im Sinne von Descartes) erkannt und in seinen berühmten, heute noch aktuellen *'Pensées'* mit den Worten formuliert:

> *"Le coeur a ses raisons, que la raison ne connaît pas."*
> *(Das Herz hat seine Gründe, die der Verstand nicht kennt.)*