Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1995)

Heft: 2

Artikel: Messung von Konzentration und Ungleichgewicht, angewandt auf die schweizerischen Pensionskassen

Autor: Vogt, Arthur / Eichenberger, Markus

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967274

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ARTHUR VOGT und MARKUS EICHENBERGER, Bern

Messung von Konzentration und Ungleichheit, angewandt auf die schweizerischen Pensionskassen

1 Was ist Konzentration und erste Versuche, sie zu messen

Ist die Konzentration in einem Wirtschaftszweig oder etwa bei den Pensionskassen anzugeben, so können Konzentrationsmasse verwendet werden. Als naives Konzentrationsmass könnte man einfach deren Anzahl vorschlagen. Dieses Konzentrationsmass, das wir K^{Anzahl} nennen wollen, nimmt jedoch nicht Rücksicht auf die Grösse der Kassen. Seien ursprünglich 6 Kassen mit je 5000 Versicherten, eine wird aufgelöst und gleichmässig auf die verbleibenden 5 aufgeteilt, die dann je 6000 Versicherte haben. In diesem Fall wäre K^{Anzahl} noch sinnvoll: Das Konzentrationsmass hat sich von 6 auf 5 verändert. Um zu zeigen, dass das Konzentrationsmass K^{Anzahl} nicht zweckmässig ist, nehmen wir im obigen Beispiel an, dass die sechste Kasse sich nicht vollständig auflöst. Es soll ihr ein Versicherter verbleiben. Wir haben also nach dem Konzentrationsprozess 6 Kassen mit den Versichertenzahlen

$$6000,\ 6000,\ 6000,\ 6000,\ 5999,\ 1\,.$$

Das Konzentrationsmass K^{Anzahl} ergibt vor und nach dem Konzentrationsprozess den gleichen Wert 6, obwohl intuitiv klar ist, dass ein Konzentrationsprozess stattgefunden hat.
Natürlich ist K^{Anzahl} als grobes "Konzentrationsmass" verwendbar. Sicher kann man z.B. bei den schweizerischen Krankenkassen von zunehmender Konzentration sprechen anhand der Information, dass deren Anzahl in den letzten 30 Jahren von über 1000 auf weniger als 200 abgenommen hat. Aber z.B. bei den schweizerischen Pensionskassen ist nicht so eindeutig, in welcher Richtung der Konzentrationsprozess geht. Da ist es sinnvoll und notwendig, subtilere Konzentrationsmasse zu verwenden, wie sie in Ziffer 3 vorgestellt werden. Allerdings ist mit der Einführung des Obligatoriums der beruflichen Vorsorge ab 1.1.1985 und mit der zunehmenden Bedeutung der Sammel- und Gemeinschaftseinrichtungen eine zunehmende Konzentration

plausibel. Es wird sich in Ziffer 6 insbesondere zeigen, dass der Konzentrationsprozess bei den nichtregistrierten Versicherungseinrichtungen stärker war als bei den registrierten, obwohl deren Anzahl weniger abnahm. Aber auch bei eindeutigen Situationen sind diese Masse sinnvoll, um z.B. internationale Vergleiche oder Vergleiche zwischen verschiedenen Branchen vorzunehmen.
Sigma (1989) stellt Vergleiche der Konzentration der Versicherungsbranche in verschiedenen Ländern durch Graphiken dar: Es werden die kumulierten Marktanteile der 15 grössten Versicherer in abnehmender Grösse aufgetragen. Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Methode hat demgegenüber den Vorteil, dass eine Konzentrationssituation in *eine* Masszahl abgebildet wird.

2 Allgemeine Bemerkungen zur Konzentrations und Ungleichheitsmessung

Konzentration bzw. Ungleichheit lassen sich u.E. bei allen *extensiven* Grössen bestimmen. Vereinfacht gesagt, sind extensive Grössen solche, die man addieren darf und die bei doppelt so grossen statistischen Einheiten in etwa doppelt so gross sind. Dazu gehören Grössen wie Anzahl Versicherte oder alle Grössen der Bilanz und der Gewinn- und Verlustrechnung. Denn z.B. die Prämieneinnahmen einer doppelt so grossen Pensionskasse sind in etwa doppelt so gross wie diejenigen der ursprünglichen Kasse. Nicht zu den extensiven Grössen gehören alle Fragen zum Reglement einer Pensionskasse. Denn z.B. der Koordinationsabzug oder das Rücktrittsalter einer doppelt so grossen Kasse ist in etwa *gleich* dem Koordinationsabzug der ursprünglichen Kasse. Statistisch ausgedrückt handelt es sich bei diesen Grössen um sogenannte intensive Grössen. Das Paradebeispiel einer intensiven Grösse ist die Temperatur: Temperaturen dürfen nicht addiert werden. Die Temperatur einer Wohnung ist nicht gleich der Summe der Temperaturen ihrer Zimmer.
Verschiedene Autoren schränken die Gültigkeit der hier behandelten Masse ein, z.B. des Ginimasses (4.4) auf Einkommensverteilungen. U.E. ist das zu vergleichen mit einem Lehrer, der das arithmetische Mittel "Zeugnis-Mittel" nennt und auf Zeugnisnoten beschränkt wissen will. Abgesehen davon, dass dies eigentlich falsch ist, weil als Lageparameter der rangskalierten Noten der empirische Zentralwert adäquat wäre, ist das arithmetische Mittel bei

allen Verteilungen von intervallskalierten Daten sinnvoll. *Nermuth* (1993) formuliert unseren Standpunkt (Meier und Vogt 1994) wie folgt:

> The purpose of such an undertaking is to make results obtained in one area available to workers in other areas, simply through a re-interpretation of the underlying formal structure.

In diesem Sinn empfehlen wir die hier behandelten Masse (3.6), (3.7), (3.8) und (4.4), (4.5), (4.6) und (4.10) für die Beurteilung von Konzentration bzw. Ungleichheit von *allen* extensiven Grössen.
Wir wollen nun zur Vereinfachung der Schreibweise annehmen, dass wir n Kassen haben und dass wir Konzentration bzw. Ungleichheit anhand der extensiven Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ messen wollen, wobei der Wert x_i der i.ten Kasse zugeordnet ist. Ein Konzentrationsmass ist dann eine Funktion

$$K: \; R_+^n \;\rightarrow\; \left[\frac{1}{n}, 1\right] \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto K(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

und ein Ungleichheitsmass eine Funktion

$$I: \; R_+^n \;\rightarrow\; \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto I(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.2}$$

die gewissen Tests genügt, wie wir sie in Ziffer 5 behandeln werden. R_+ sind dabei die nichtnegativen reellen Zahlen. *Vogt* (1987, S. 3647) ging bei den Preisindexfunktionen P davon aus, dass sie für alle natürlichen n definiert sind. *Eichhorn* und *Krtscha* (1993) führen stattdessen eine Folge K_n von Funktionen ein. Dann sind K_n und K_m, $n \neq m$, nicht mehr unbedingt vom gleichen Typ, K_n z.B. das Herfindahlsche Konzentrationsmass (3.6) und K_m die Entropie (3.8). Somit hat man z.B. bei der Formulierung der Tests (5.1) und (5.4) zu unterstellen, dass es sich links und rechts des Gleichheitszeichens um eine Funktion K bzw. I "vom gleichen Typ" handelt, dass sich also der Funktionstyp K bzw. I beim Übergang von n zu $n+1$ "nicht ändert".

3 Einige Konzentrationsmasse

Die Formel für das obige naive Konzentrationsmass lautet nun

$$K^{\text{Anzahl}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n\,. \tag{3.1}$$

Um das naive Konzentrationsmass (3.1) die obgenannte Forderung erfüllen zu lassen, dass es den Wert 1 annehmen soll bei vollständiger Konzentration und mit abnehmender Konzentration gegen $1/n$ abnehmen soll, kann man sein Reziprokes vorschlagen:

$$K^{\text{reziproke Anzahl}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}. \tag{3.2}$$

Damit ergibt sich in den obigen beiden Beispielen der Wert $\frac{1}{6}$, nämlich

$$K^{\text{reziproke Anzahl}}(5000,\ 5000,\ 5000,\ 5000,\ 5000,\ 5000) = \frac{1}{6} \tag{3.3}$$

und

$$K^{\text{reziproke Anzahl}}(6000,\ 6000,\ 6000,\ 6000,\ 5999,\ 1) = \frac{1}{6}. \tag{3.3'}$$

Das Konzentrationsmass (3.2) hat den genannten Nachteil, dass der Konzentrationsprozess von (3.3) zu (3.3′) nicht zum Ausdruck kommt.
Als weitere "naive" Konzentrationsmasse kann man sogenannte Beziehungszahlen oder Dichten (*Vogt* 1979, S. 5–8) verwenden. Dabei sind die beiden Dichten "Versicherte pro Kasse" oder "Kassen pro Versicherten" im Prinzip gleichwertig, nämlich

$$K^{\text{Dichte I}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{3.4}$$

und die reziproke Funktion

$$K^{\text{Dichte II}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{3.5}$$

So heisst es in BFS (1995):

> Hatte eine Vorsorgeeinrichtung 1978 durchschnittlich nur 92 Versicherte, so stieg diese Zahl nach Einführung des gesetzlichen Obligatoriums auf 215 (Befragung 1987) und bis 1992 weiter auf 250. *Dieser Konzentrationsprozess* ...

Wie das Beispiel des Konzentrationsprozesses von (3.3) zu (3.3′) zeigt, kann es eine Zunahme der Konzentration geben, ohne dass die durchschnittliche

Zahl von Versicherten pro Vorsorgeeinrichtung steigt. Umgekehrt kann die durchschnittliche Zahl der Versicherten pro Vorsorgeeinrichtung steigen, wie im nachstehenden Beispiel

$$17\,996,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \rightarrow\ 6000,\ 6000,\ 6000,\ 6000,\ 6000,$$

bei dem man aber unmöglich von "zunehmender Konzentration" sprechen kann.

Dichten sind eben im Zusammenhang mit Konzentrationsmessung nur bei "homogenen" statistischen Massen, d.h. wenn alle x_i gleich sind, problemlos (etwa bei einer chemischen Lösung). In der ökonomischen Konzentrationsmessung sind jedoch gerade Inhomogenitäten, d.h. ungleiche x_i, von Interesse. Im folgenden werden Konzentrationsmasse vorgestellt, die "inhomogene" statistische Massen adäquat beschreiben.

Nach *Menges* und *Skala* (1973, S. 362) ist das nach Herfindahl benannte Konzentrationsmass

$$K^{\text{Herfindahl}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \right)^2 \tag{3.6}$$

das bekannteste und älteste Konzentrationsmass. Es drückt den Konzentrationsprozess von (3.3) zu (3.3′) tatsächlich aus, denn

$$K^{\text{Herfindahl}}(5000,\ 5000,\ 5000,\ 5000,\ 5000,\ 5000) = \frac{1}{6} = 0,166\,667 \tag{3.6'}$$

und

$$K^{\text{Herfindahl}}(6000,\ 6000,\ 6000,\ 6000,\ 5999,\ 1) = 0,199\,987 \tag{3.6''}$$

(3.6′) ist ein Spezialfall der allgemein gültigen Aussage, dass das Herfindahlsche Konzentrationsmass mit $K^{\text{reziproke Anzahl}}$ übereinstimmt, wenn alle Beobachtungen gleich sind. Dies gilt sogar allgemein für Konzentrationsmasse, die dem Normalisationstest (5.5) genügen.

Chakravarty und *Eichhorn* (1991) behandeln das nachstehende von einem Parameter α abhängige Konzentrationsmass[1]

$$K^{(\alpha)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, & \alpha \geq 0, \ \alpha \neq 1 \\ \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)^{\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

mit der Konvention, dass $0^0 = 1$. *Chakravarty* und *Eichhorn* (1991) stellen fest, dass ein (kleiner) Transfer von einer kleinen zu einer grossen Kasse das Konzentrationsmass um so stärker vergrössert, je grösser α ist. Diese Feststellung kann mit Gegenbeispielen falsifiziert werden.

Insbesondere die vier nachstehenden Spezialfälle von (3.7) sind interessant:

$\alpha = 0$ ergibt das naive Konzentrationsmass (3.2). Im Gegensatz zu Chakravarty und Eichhorn (1991) schreiben wir für diesen Fall

$\alpha = 0$ und nicht $\alpha \to 0$ da (3.7) u.E. auch für $\alpha = 0$ definiert ist.

$\alpha = 1$ logarithmiert und mit umgekehrtem Vorzeichen ergibt die Entropie

$$\begin{aligned} &-\log(K^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \log\left(\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{x_i}\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$\alpha = 2$ ergibt das Herfindahlsche Konzentrationsmass (3.6) und

[1] Es geht nach einer persönlichen Mitteilung von Prof. W. Piesch von der Universität Hohenheim bei Stuttgart auf Arbeiten von Adam, Bruckmann (1969) und Jöhnk (1970) zurück.

$\alpha \to \infty$ ergibt die Quote der grössten Kasse

$$K^{(\infty)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{x_i\}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{3.9}$$

Es soll an dieser Stelle noch das als "number equivalent" bezeichnete Mass erwähnt werden[2]. Die üblichen Werte von Konzentrationsmassen liegen normalerweise nahe bei Null und können intuitiv nur schwer auseinandergehalten werden. Deshalb werden die reziproken Werte verwendet

$$K^{\text{number equivalent}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{K(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{3.10}$$

Das (3.6′) entsprechende Äquivalent beträgt genau 6, das (3.6″) entsprechende etwas mehr als 5. Dieser Wert ist leichter zu interpretieren als 0,199987. Er besagt, dass "das Äquivalent bei (3.6″) etwas mehr als 5 Kassen beträgt", was intuitiv sofort einleuchtet.
Es gibt noch viele weitere Konzentrationsmasse. Wir wollen es jedoch an dieser Stelle bloss erwähnen, dass im Bericht der *Kartellkommission* (1974) noch die beiden Masse von Niehans und von Rosenbluth aufgeführt und am Beispiel der schweizerischen Wirtschaft angewandt sind. Im selben Bericht werden noch Masse aufgeführt und angewandt, die eine Zwischenstellung zwischen Konzentrations- und Ungleichheitsmassen einnehmen sollen. Es handelt sich um die Masse von "Gini2", Christen und von Weissker. Es soll an dieser Stelle bloss erwähnt werden, dass das Mass von Christen insofern ein Ungleichheitsmass ist als es den Replikationstest (5.2) erfüllt und *kein* Konzentrationsmass ist, als es den Null-Output-Unabhängigkeitstest (5.4) nicht erfüllt.

4 Einige Ungleichheitsmasse

Konzentrationsmasse sind von der Anzahl Kassen abhängig, d.h. von n. Oft besteht jedoch das Bedürfnis, ein von n unabhängiges Mass, ein Ungleichheitsmass zu haben. Z.B. bei der Gleichverteilung mit $x_i = c$

[2] Diese Anregung verdanken wir Werner Aeberhardt vom Bundesamt für Konjunkturfragen. Nach einer persönlichen Mitteilung von W. Piesch geht dieses "number equivalent" genannte Mass allerdings auf Arbeiten von Adelmann aus 1951, 1969 zurück.

für alle i beträgt das Konzentrationsmass $\frac{1}{n}$, ist also abhängig von n. Ein Ungleichheitsmass soll jedoch in diesem Fall der Gleichverteilung den Wert 0 haben. Daher möchten wir wie folgt zu jedem Konzentrationsmass K ein Ungleichheitsmass I vorschlagen (vgl. auch Menges und Skala (1973, S. 365):

$$\begin{aligned} & I^{\text{aus Konzentration}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & = 1 - \frac{K^{\text{number equivalent}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{n} \\ & = 1 - \frac{1/K(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{n} . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Wenn K den Replikationstest (5.1) erfüllt, genügt $I^{\text{aus Konzentration}}$ dem Replikationstest (5.2) und wenn K den Null-Outputtest (5.4) erfüllt, genügt $I^{\text{aus Konzentration}}$ dem Null-Outputtest (5.4′).
Aus (4.1) folgt auch, dass sich umgekehrt zu jedem Ungleichheitsmass I ein Konzentrationsmass ergibt gemäss

$$K^{\text{aus Ungleichheit}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(1 - I(x_1, x_2, \ldots, x_n))n} . \tag{4.2}$$

Es gilt nun analog zu vorhin: Wenn I den Replikationstest (5.2) erfüllt, genügt $K^{\text{aus Ungleichheit}}$ dem Replikationstest (5.1) und wenn I den Null-Outputtest (5.4′) erfüllt, kann $K^{\text{aus Ungleichheit}}$ dem Null-Outputtest (5.4) genügen. (Im letzten Fall steht nur "kann", da eine Ungleichheit schwächer ist als eine Gleichheit. Mit dem stärkeren Ergänzungstest (5.17) bzw. (5.19) gilt tatsächlich "muss" statt "kann".)
Menges und *Skala* (1973) nennen unsere Ungleichheit "relative Konzentration" im Gegensatz zur "absoluten Konzentration", unserer Konzentration schlechthin. Man spricht von starker Konzentration, wenn auf einige wenige statistische Einheiten ein grosser Teil der extensiven Grösse entfällt und von grosser Ungleichheit, wenn auf einen geringen Prozentanteil der statistischen Einheiten ein Grossteil der extensiven Grösse entfällt.
Das bekannteste Mass, um die "Ungleichheit einer Verteilung" zu messen, beruht auf der Lorenzkurve. Lorenz hat diese Kurve 1905 eingeführt, um zu beurteilen, in welchem von zwei Ländern die Einkommen gleichmässiger verteilt sind oder ob in einem Land mit der Zeit die Verteilung gleichmässiger wird oder nicht (Dagum 1983b, 1987). Diese Kurve stellt prozentuale

Anteile von volkswirtschaftlichen Einkommen und der Bevölkerung zueinander in Bezug. Die Abszisse dieser Kurve gibt den Anteil der ärmsten Personen an der Gesamtbevölkerung an, deren Anteil am gesamten Einkommen der Ordinate entspricht. Die Lorenzkurve ist vor allem beliebt, um Einkommens- und Vermögensverteilungen zu beurteilen. Sie ist jedoch – wie in Ziffer 2 erwähnt – allgemein bei extensiven Grössen anwendbar. Aus der Lorenzkurve lässt sich nun ein Mass für die Ungleichheit der Verteilung errechnen. Im Jahre 1914 hat Gini das nach ihm benannte Ungleichheitsmass eingeführt (Dagum 1983b), das dem doppelten Flächeninhalt zwischen der 45-Grad-Geraden und der Lorenzkurve entspricht (vgl. *Eichhorn* und *Vogt* (1990, S. 64)). Dieses Mass ist 0 bei absolut gleichmässiger Verteilung und 1, wenn z.B. das gesamte Vermögen einem einzelnen gehört. Die Formel für das Gini-Ungleichheitsmass lautet

$$I^{\text{Gini}} = 1 - 2\int_0^1 L(F)\,dF \tag{4.3}$$

mit L als Lorenzkurve und F als Verteilungsfunktion der betrachteten Verteilung. Diese Formel gilt sowohl für stetige wie auch für diskrete Verteilungen. In der Praxis hat man meist geschichtete Daten. Mit der Trapezregel kann man Formel (4.3) in eine solche für geschichtete Daten überführen:

$$I^{\text{Gini}} = 1 - 2\sum_{j=1}^{m}(F_j - F_{j-1})\frac{L_j + L_{j-1}}{2}, \quad F_0 = L_0 = 0\,. \tag{4.4}$$

Der geneigte Leser wird bemerkt haben, dass in (4.3) und (4.4) nicht wie gemäss (2.2) die x-Werte als Argumente aufgeführt sind. Dazu kann man eine Folge von disjunkten Intervallen $[y_0, y_1)$, $[y_1, y_2)$, ..., $[y_{m-1}, y_m)$, $[y_m, \infty)$, mit $y_0 = 0$ einführen. Die Formel für das Gini-Ungleichheitsmass lautet dann

$$I^{\text{Gini}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{\text{Anzahl } x_i \in [y_{j-1}, y_j)}{n} \times \frac{\sum\limits_{x_i \in [0, y_j)} x_i + \sum\limits_{x_i \in [0, y_{j-1})} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}\,. \tag{4.5}$$

Dies ist nur eine Approximation, die von der Feinheit der Intervallüberdeckung abhängt. In der Literatur wird auch die exakte Formel

$$I^{\text{Gini}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2n^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|$$

$$= \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|}{n^2}}{2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \tag{4.6}$$

angegeben, deren numerische Auswertung jedoch viel länger dauert. ((4.5) ergibt mit unseren 15 179 Pensionskassen des Jahres 1987 unter 5 Sekunden dreistellige Genauigkeit, während die exakte Formel (4.6) programmtechnisch optimiert auf einem IBM-Grossrechner über 7 Minuten benötigt.) Auf der rechten Seite von (4.6) wird die mittlere Differenz durch zwei mal den Mittelwert dividiert.

Wir wollen nun noch als weiteres Ungleichheitsmass den Variationskoeffizienten betrachten:

$$I^{\text{Variationskoeffizient}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{4.7}$$

Der Variationskoeffizient erfüllt den Normalisationstest (5.8) nicht. Es gilt der nachstehende funktionale Zusammenhang zwischen dem Variationskoeffizienten und dem Herfindahlschen Konzentrationsmass (3.6):

$$I^{\text{Variationskoeffizient}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \sqrt{\frac{n^2}{n-1} K^{\text{Herfindahl}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{n}{n-1}} \tag{4.8}$$

(in (4.8) wird, im Gegensatz zu (4.7), der erwartungstreue Variationskoeffizient verwendet (vgl. *Monopolkommission* 1985, S. 39)). Der (im relevanten Wertebereich praktisch) lineare Zusammenhang zwischen dem Variationskoeffizienten und dem Herfindahlschen Konzentrationsmass geht auch aus

der graphischen Darstellung in Vogt (1995a oder b) hervor, wobei die statistische Gesamtheit fix zu halten ist, also nur etwa die registrierten VE zu betrachten sind.
Die Tests in Ziffer 5 gelten exakt nur für die nicht erwartungstreue Version (4.7) des Variationskoeffizienten mit n im Nenner des Zählers statt $n-1$.
Der graphische Vergleich des Herfindahlschen Konzentrationsmasses und des Ungleichheitsmasses "Variationskoeffizient" in Vogt (1995a oder b) ergab einen praktisch linearen Zusammenhang. Es ist vorerst überraschend, dass ein linearer Zusammenhang zwischen so verschiedenen Phänomenen wie Konzentration und Ungleichheit besteht. Die Lösung dieses Rätsels besteht nach Piesch (1994) darin, dass das gemäss (4.1) zum Herfindahlschen Konzentrationsmass gehörende Ungleichheitsmass das *normierte* Quadrat des Variationskoeffizienten ist:

$$\begin{aligned} &I^{\text{aus Herfindahl}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad = 1 - \frac{1/K^{\text{Herfindahl}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{n}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

denn man kann zeigen, dass

$$I^{\text{aus Herfindahl}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(I^{\text{Variationskoeffizient}})^2}{(I^{\text{Variationskoeffizient}})^2 + 1} \tag{4.10}$$

gilt. Zwischen $I^{\text{aus Herfindahl}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $K^{\text{Herfindahl}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gilt nun exakt die Beziehung (5.23).

5 Eigenschaften von Konzentrations- und Ungleichheitsmassen

Gunzert (1960) schrieb ein ganzes Buch mit dem Titel "Was ist Konzentration?". U.E. lässt sich dies prägnanter und klarer mit den nachstehenden Tests, vor allem in der Form von Funktionalgleichungen, formulieren. Der Unterschied zwischen Konzentration und Ungleichheit lässt sich am besten mit dem Replikationstest (und dem Null-Output-Unabhängigkeitstest) ausdrücken. Dazu untersuchen wir das Konzentrationsmass K oder das Ungleichheitsmass I im Falle einer Replikation des Argumentvektors. Nehmen wir einmal an, dass jede Kasse einen gleichgrossen Partner bekommt. Dann hat es nach dem Prozess doppelt soviele Kassen. Wir können

dann sagen, dass sich die Konzentration halbiert hat. Doch die Ungleichheit bleibt erhalten. Das ist gerade der wesentliche Unterschied zwischen einem Konzentrationsmass K und einem Ungleichheitsmass I, ausgedrückt in Funktionalgleichungen als

Replikationstests

$$K_{2n}(\vec{x},\vec{x}) = \tfrac{1}{2}K_n(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.1}$$

bzw.

$$I_{2n}(\vec{x},\vec{x}) = I_n(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \tag{5.2}$$

Bei m-facher Replikation steht in (5.1) statt 2 die natürliche Zahl m. Aus (5.1) folgt zusammen mit (5.10), dass sich die Konzentration verdoppelt, wenn jede Kasse mit einem gleichgrossen Partner fusioniert.
Neben dem Replikationstest erwähnen *Chakravarty* und *Eichhorn* (1991) die nachstehenden 5 Tests.

Symmetrietest
Gemäss dem Symmetrietest verändert weder K noch I den Wert bei einer Permutation der n Argumente. Diese Eigenschaft bezeichnen wir mit (5.3).

Null-Output-Unabhängigkeitstest

$$K_{n+1}(\vec{x},0) = K_n(\vec{x}), \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.4}$$

$$I_{n+1}(\vec{x},0) > I_n(\vec{x}), \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.4'}$$

Z.B. das Gini-Ungleichheitsmass wird vergrössert durch die Hinzufügung einer $n+1$.statistischen Einheit mit $x_{n+1} = 0$, was geometrisch leicht einzusehen ist, da sich die Lorenzkurve nach rechts verschiebt.

Normalisationstest
Wenn alle x_i gleich sind $(= x)$, dann beträgt das Konzentrationsmass $\frac{1}{n}$ und das Ungleichheitsmass 0:

$$K_n(x, x, \ldots, x) = \frac{1}{n} \tag{5.5}$$

bzw.

$$I_n(x, x, \ldots, x) = 0\,. \tag{5.6}$$

(5.5) bzw. (5.6) gelten für minimale Konzentration bzw. Ungleichheit. Umgekehrt bei maximaler Konzentration bzw. Ungleichheit gilt

$$K_n(x, 0, \ldots, 0) = 1 \tag{5.7}$$

bzw.

$$I_n(x, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ mal}}) = 1 - \frac{1}{n}. \tag{5.8}$$

Transfertest
Gemäss dem Transfertest soll ein Transfer, dessen Betrag kleiner ist als $x_i - x_j > 0$, an extensiver Grösse von einer grösseren Kasse i zu einer kleineren Kasse j die Konzentration und die Ungleichheit verkleinern. Diese Eigenschaft bezeichnen wir mit (5.9).

Homogenitätstest
Der Homogenitätstest besagt, dass die Konzentration und die Ungleichheit nur von den Quoten an extensiver Grösse abhängen. Er kann auch so ausgedrückt werden, dass die beiden Masse nicht von der Messeinheit der extensiven Grösse abhängen, also davon, ob sie in Franken, Millionen Franken oder Dollars gemessen werden:

$$K(\vec{x}) = K(\lambda\vec{x}), \quad \lambda \in R_+ \tag{5.10}$$

bzw.

$$I(\vec{x}) = I(\lambda\vec{x}), \quad \lambda \in R_+ . \tag{5.11}$$

Dagum (1983a) erwähnt neben den Tests (5.2), (5.3), (5.6) mit (5.8), (5.9) und (5.11) den Additionstest und den Operationalitätstest. Beide Tests sind auch für Konzentrationsmasse sinnvoll.

Additionstest

$$I(\vec{x}) > I(\vec{x} + \vec{c}) \quad \vec{c} = (c, c, \ldots, c), \quad c > 0 \tag{5.12}$$

bzw.

$$K(\vec{x}) > K(\vec{x} + \vec{c}) \quad \vec{c} = (c, c, \ldots, c), \quad c > 0, \tag{5.13}$$

Operationalitätstest
gemäss dem das Ungleichheitsmass (bzw. das Konzentrationsmass) eindeutig und objektiv sein soll.
Der Additionstest folgt nach *Dagum* (1983a) aus dem Homogenitätstest. U.E. braucht man zusätzlich den Transfertest zu fordern. Dann kann man, ausgehend vom Homogenitätstest mit

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + nc}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

durch sukzessive Anwendung des Transfertests den Additionstest (5.12) bzw. (5.13) erhalten. Der Operationalitätstest ist mit (2.1) und (2.2) aufgrund des mathematischen Funktionsbegriffs erfüllt.
Piesch (1994) gibt den

Proportionalitätstest

$$K_{cn}\Big(\underbrace{\frac{x_1}{c}, \ldots, \frac{x_1}{c}}_{c \text{ mal}}, \underbrace{\frac{x_2}{c}, \ldots, \frac{x_2}{c}}_{c \text{ mal}}, \ldots, \underbrace{\frac{x_n}{c}, \ldots, \frac{x_n}{c}}_{c \text{ mal}}\Big)$$
$$= \frac{1}{c} K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.14}$$

bzw.

$$I_{cn}\Big(\underbrace{\frac{x_1}{c}, \ldots, \frac{x_1}{c}}_{c \text{ mal}}, \underbrace{\frac{x_2}{c}, \ldots, \frac{x_2}{c}}_{c \text{ mal}}, \ldots, \underbrace{\frac{x_n}{c}, \ldots, \frac{x_n}{c}}_{c \text{ mal}}\Big)$$
$$= I_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.15}$$

und den

Ergänzungstest

$$K_{cn}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(c-1)n \text{ mal}}) = K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.16}$$

bzw.

$$1 - I_{cn}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(c-1)n \text{ mal}}) = \frac{1}{c}(1 - I_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \tag{5.17}$$

an.[3] Der Proportionalitätstest ist äquivalent zum Replikationstest (5.1) bzw. (5.2), unter der Annahme, dass der Symmetrietest (5.3) und der Homogenitätstest (5.10) bzw. (5.11) gelten. Der Ergänzungstest für Konzentrationsmasse entspricht wegen dem mathematischen Induktionsprinzip dem Null-Output-Unabhängigkeitstest (5.4). Der Ergänzungstest für Ungleichheitsmasse bringt jedoch etwas grundsätzlich neues. In (5.4′) haben wir nur eine Ungleichung, in (5.17) steht jedoch das Gleichheitszeichen. Setzten wir in (5.17) $c = (n+1)/n$, so erhalten wir

$$1 - I_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = \frac{n}{n+1}(1 - I_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \tag{5.18}$$

d.h.

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) &= \frac{n}{n+1} I_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{1}{n+1} \\ &= I_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad + \frac{1}{n+1}(1 - I_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \,. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Durch sukzessives Anwenden von (5.19) erhält man (5.17). (5.19) quantifiziert den Zuwachs an Ungleichheit durch das Hinzufügen einer weiteren statistischen Einheit mit Merkmalswert 0, der gemäss (5.4′) nur qualitativ ausgedrückt ist.
Das Ersetzen von (5.4′) im Axiomensystem von Chakravarty und Eichhorn (1991)

$$\{(5.2),\ (5.3),\ (5.4'),\ (5.6),\ (5.8),\ (5.9),\ 5.11)\} \tag{5.20}$$

durch (5.19) gemäss Piesch (1994) ergibt das Axiomensystem

$$\{(5.2),\ (5.3),\ (5.19),\ (5.6),\ (5.8),\ (5.9),\ (5.11)\}\,. \tag{5.21}$$

Das entsprechende Axiomensystem für Konzentrationsmasse ist

$$\{(5.1),\ (5.3),\ (5.4),\ (5.5),\ (5.7),\ (5.9),\ (5.10)\}\,. \tag{5.22}$$

[3] Dabei bezieht er sich gemäss einer persönlichen Mitteilung auf Arbeiten von Bruckmann, Jöhnk und Piesch aus 1969, 1971 bzw. 1975.

Die beiden Axiomensysteme haben nun die nachstehende schöne Eigenschaft: Jedes gemäss (4.1) zu einem Konzentrationsmass gehörende Ungleichheitsmass genügt (5.21), wenn das Konzentrationsmass (5.22) genügt. Und umgekehrt, jedes gemäss (4.2) zu einem Ungleichheitsmass gehörende Konzentrationsmass genügt (5.22), wenn das Ungleichheitsmass (5.21) genügt. Dieser Sachverhalt erinnert an das Preis- und Mengenindexproblem: Da sucht man nach einem Axiomensystem für Preisindices, das die Eigenschaft hat, dass der entsprechende Mengenindex dem entsprechenden Axiomensystem für Mengenindices genügt (Vogt 1987, p. 3660). Wie in der Preisindextheorie der Faktorumkehrtest

$$\text{Preisindex} \times \text{analoger Mengenindex} = \text{Wertindex}$$

gilt, hier

$$K \cdot (1 - I) = K \cdot Q = \frac{1}{n} \tag{5.23}$$

mit dem "Gleichheitsmass" $Q = 1 - I$.

6 Die Entwicklung von Konzentration und Ungleichheit bei den schweizerischen Pensionskassen zwischen 1987 und 1992

Die Berechnungen wurden mit dem Programmsystem SAS für die 15 179 Vorsorgeeinrichtungen (VE) des Jahres 1987 und die 13 450 VE des Jahres 1992 (Stand der Auswertung von Mitte 1994) durchgeführt. Sie wurden einerseits für alle diese VE vorgenommen, anderseits für die gemäss dem Bundesgesetz über die berufliche Vorsorge (BVG) registrierten VE (4 237 im Jahre 1987 und 3 389 im Jahr 1992) und die nichtregistrierten VE (10 942 im Jahre 1987 und 10 061 im Jahr 1992). Das Herfindahlsche Konzentrationsmass wurde mit Formel (3.6) berechnet, das Gini-Ungleichheitsmass mit Formel (4.5) bzw. (4.6) und der Variationskoeffizient mit Formel (4.7). Wir haben Konzentration und Ungleichheit anhand der nachstehenden extensiven Grössen (vgl. Ziffer 2)

- Anzahl (aktive) Versicherte,
- Anzahl Rentner,
- reglementarische Beiträge der Versicherten,

- Total der Einnahmen,
- Bilanzsumme und
- Altersguthaben nach BVG

berechnet. Die Resultate sind in Vogt (1995a oder b) abgedruckt und sollen hier nur gekürzt bzw. ergänzend wiedergegeben werden. Als Hauptresultat ergab sich, dass die Konzentration der nichtregistrierten Kassen viel stärker zugenommen hat als die der registrierten (14 % gegenüber 8 %), obwohl deren reziproke Anzahl um weniger abgenommen hat (9 % bzw. 25 %). Für den vorliegenden Artikel haben wir nicht mehr den Variationskoeffizienten (4.7) oder (4.8) berechnet, sondern sein normiertes Quadrat (4.10), das mittels (5.23) mit dem Herfindahlschen Mass korrespondiert.
Prima vista zeigt sich, dass die Ungleichheit der Pensionskassen viel grösser ist als etwa diejenige der Lebensdauern (vgl. Eichhorn und Vogt 1993) oder die Krankheitskosten von Individuen (vgl. Huber, Spuhler und Vogt 1994). Da diese Phänomene so verschieden sind, ist dieser Vergleich jedoch "unfair", man müsste zur Beurteilung der erhaltenen Ungleichheits-Masszahlen z.B. mit wirtschaftlichen Branchen vergleichen. Im Bericht der *Kartellkommission* (1974) sind verschiedene Ungleichheits- und Konzentrationsmasse abgehandelt und die entsprechenden Masszahlen berechnet. *Rossi* und *Hänni* (1989) führen diese Untersuchungen – was die Konzentration betrifft – anhand der Betriebszählung 1985 fort. Sie zeigen, dass die Ungleichheit im Pensionskassenbereich vergleichsweise hoch ist.
Zur Beurteilung des *Zusammenhangs zwischen diesen Massen* wurde der Spearmansche Korrelationskoeffizient zwischen den in den untenstehenden Tabellen angegebenen Variablen mit je 17 Beobachtungen (6 für alle VE, 6 für die registrierten VE und 5 für die nichtregistrierten) berechnet. Die Voraussetzungen für den Signifikanztest der Spearmanschen Koeffizienten sind schwach, es braucht bloss näherungsweise Stetigkeit der Zufallsvariablen (Basler 1989, S. 175).

Spearman	HERF87	GINI87	V287	HERF92	GINI92	V292
Formelnr.	(3.6)	(4.6)	(4.10)	(3.6)	(4.6)	(4.10)
HERF87	1	0.335	0.296	0.656	0.224	0.071
GINI87		1	0.853	0.191	0.968	0.873
V287			1	−0.027	0.904	0.876
HERF92				1	0.069	0.086
GINI92					1	0.890
V292						1

Aus der nachfolgenden Tabelle geht hervor, dass die relevanten Korrelationskoeffizienten (HERF87-HERF92, GINI87-V287, GINI87-GINI92, GINI87-V292, V287-GINI92, V287-V293, GINI92-V292) statistisch signifikant sind.

$\Pr ob \mid R \mid > 0$	HERF87	GINI87	V287	HERF92	GINI92	V292
HERF87	0	0.189	0.249	0.004	0.386	0.786
GINI87		0	0.0001	0.462	0.0001	0.0001
V287			0	0.918	0.0001	0.0001
HERF92				0	0.793	0.743
GINI92					0	0.0001
V292						0

Konzentrationsmasse (und Ungleichheitsmasse) messen das Niveau der Konzentration (bzw. der Ungleichheit) *einer* bestimmten "Situation", beschrieben durch den n-komponentigen Vektor der extensiven Grösse. Im Gegensatz dazu messen etwa Preisindices die Veränderung des Preisniveaus zwischen *zwei* Situationen, je beschrieben durch die n-komponentigen

Preis- und Mengenvektoren. Dabei müssen die Vektorenkomponenten "geordnet" sein, d.h. die k.te Preis- bzw. Mengenkomponente in der Basis- und der Beobachtungssituation müssen sich auf dasselbe Gut beziehen (die entsprechenden statistischen Massen müssen koordiniert sein, vgl. Vogt (1979, p. 11)). In Vogt (1995a oder b) wurde versucht, Niveauänderungen der Konzentration zu beschreiben. Dabei stellt sich das "Konzentrationsproblem im Zwei-Situationen-Fall". In der Basissituation hat man einen Vektor $\vec{x}^{\,0}$ und in der Beobachtungssituation einen Vektor $\vec{x}^{\,1}$ von extensiven Grössen. Dabei wird nicht eine "Koordiniertheit" der beiden Vektoren vorausgesetzt. Als Niveauänderungsfunktion wird in Vogt (1995a oder b) einfach

$$DK_{m+n}(\vec{x}^{\,0}, \vec{x}^{\,1}) = \frac{K_n(\vec{x}^{\,1})}{K_m(\vec{x}^{\,0})} \tag{6.1}$$

gesetzt. Man könnte nun versuchen, die "Koordiniertheit" der Vektorkomponenten zu berücksichtigen: Die ersten b Klassen kommen in beiden Situationen vor, zusätzlich gibt es $(n-b)$ neue Klassen und $(m-b)$ sind verschwunden. Anstelle von (6.1) ergibt sich

$$\begin{aligned} &DK_{m+n}(\vec{x}^{\,0}, \vec{x}^{\,1}) \\ &= DK_{m+n}(x_1^0, \ldots, x_b^0, x_{b+1}^0, \ldots, x_m^0, x_1^1, \ldots, x_b^1, x_{b+1}^1, \ldots, x_n^1) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Es stellt sich nun die Frage, ob man (6.2) eine andere Funktion zuordnen soll als die rechte Seite von (6.1), d.h. ob die Kenntnis über bleibende, neue und verschwundene Kassen das Resultat der Konzentrations- (oder Ungleichheits)messung beeinflussen soll. U.E. nicht. Stich (1995) stellt noch andere Masse als Quotienten gemäss (6.1) für die Änderung der Konzentration bzw. der Ungleichheit vor, die er "dynamische Masse" nennt.
In Vogt (1995a oder b) sieht man graphisch, dass die Gesamtkorrelation zwischen dem Herfindahlschen Konzentrationsmass und dem Variationskoeffizienten gering ist, obwohl die entsprechenden gruppenspezifischen Korrelationen sehr hoch sind. Dies ist vorerst ein Rätsel, da die beiden Masse verschiedene Phänomene messen, Konzentrationen einerseits und Ungleichheit anderseits. Mit Formel (5.23) wird das klar.
Die in diesem Artikel verwendeten Masszahlen sind hochaggregierte Kennzahlen zur Beschreibung von Verteilungen (ca. 15 000 Zahlen werden in eine Zahl abgebildet). Die "gesamte Information" haben wir anhand der Histogramme untersucht. Diejenigen für die Bilanzsumme (man hätte auch eine

andere extensive Grösse wählen können) 1987 und 1992 für die registrierten und die nichtregistrierten VE zeigen bei den registrierten VE eine grosse Abnahme der kleinsten Klasse mit einer Bilanzsumme bis zu 1 Mio Fr.: diese Klasse machte 1987 42 % der VE aus gegenüber 22 % im Jahre 1992. Das Beispiel in Ziffer 1 zusammen mit der Formel (3.6″) und

$$K^{\text{Herfindahl}}(6000,\ 6000,\ 6000,\ 6000,\ 6000) = 0,2 \tag{6.3}$$

zeigen, dass das Verschwinden einer kleinen Kasse einen kleinen Einfluss auf das Konzentrationsmass hat. Nun sind eben viele kleine registrierte VE verschwunden. Das erklärt das "Paradoxon", dass die Zunahme der Konzentration der registrierten VE gemäss der Anzahl viel stärker war als bei den nichtregistrierten und dass es gemäss dem Herfindahlschen Konzentrationsmass gerade umgekehrt war.

Bibliographie

Basler, H. (1989): Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und statistischen Methodenlehre, Physica-Verlag, Heidelberg.

BFS (1995): Pensionskassenstatistik 1994, Beilage zur Mai-Nummer der "Schweizer Personalvorsorge".

Chakravarty S. and Eichhorn W. (1991): An Axiomatic Characterization of a Generalised Index of Concentration, The Journal of Productivity Analysis, 2, 103–112.

Dagum C. (1983a): Income Inequality Measures. In: Encyclopaedia of Statistical Sciences.

Dagum C. (1983b): Lorenz Curve: In: Encyclopaedia of Statistical Sciences.

Dagum C. (1987): Gini Ratio. In: The New Palgrave.

Diewert W.E., Spremann, K., Stehling F. (eds.) (1993): Mathematical Modeling in Economics, Essays in Honor of Wolfgang Eichhorn, Springer-Verlag, Berlin etc.

Eichhorn W. ed. (1994): Models and Measurement of Welfare and Inequality, Springer-Verlag, Berlin etc.

Eichhorn W. und Krtscha M. (1993): Informationsmessung und Beziehungen zur Messung von Streuung, Risiko, Entropie, Konzentration und Ungleichheit, in: Informationswirtschaft: Aktuelle Entwicklungen und Perspektiven, Physica-Verlag, Heidelberg.

Eichhorn, W. und Vogt, A. (1990): Gemeinsames bei der Messung von Ungleichheit, Streuung, Risiko und Information, Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung der Versicherungsmathematiker, 149–162.

Eichhorn, W. und Vogt, A. (1993): Corrigenda und Addenda zum Artikel Eichhorn und Vogt (1990), Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung der Versicherungsmathematiker, 273–275.

Encyclopaedia of Statistical Sciences (1983): John Wiley and sons, New York.

Gunzert, R. (1960): Was ist Konzentration? Fritz Knapp Verlag, Frankfurt am Main.

Huber, H., Spuhler, Th. und Vogt, A. (1994): The Age-Adjusted Inequality Measure of Gini Used to Measure Inequality in Health Care Costs, in Eichhorn (1994).

Kartellkommission (1974): Stand und Entwicklung der Betriebs- und Unternehmenskonzentration in der Schweiz, Veröffentlichungen der schweizerischen Kartellkommission, Heft 1/2, 25–250.

Meier, R. and Vogt, A. (1994): Common Structure of Several Measures in Descriptive Statistics, Poster presented at the International Congress of Mathematicians in Zürich, 3.–11. August.

Menges, G. und Skala, H. (1973): Grundriss der Statistik, Teil 2: Daten, Westdeutscher Verlag, Opladen.

Monopolkommission (1985): Hauptgutachten 1984/1985: Gesamtwirtschaftliche Chancen und Risiken wachsender Unternehmensgrössen, Nomos Verlag, Baden-Baden.

Nermuth, M. (1993): Different Economic Theories with the Same Formal Structure: Risk, Income Inequality, Information Structures, etc., in: Diewert et al. (1993).

Olt, B. (1995): Axiom und Struktur in der statistischen Preisindextheorie, Dissertation an der Universität Karlsruhe, Referent: W. Eichhorn.

Piesch (1994): Einige Eigenschaften von gleichmässig normierten Disparitäts- und Konzentrationsmassen, Allgemeines statistischen Archiv, 78, 386–400.

Rossi, A. und Häni, P. (1989): Concentration des entreprises et dépendance économique spatiale Suisse: une analyse basée sur les résultats du recensement fédéral des entreprises de 1985, Bundesamt für Statistik, Bern.

Sigma (1989): Marktanteile von Erstversicherern in 12 Ländern, herausgegeben von der Schweizer Rück, Nr. 2/1989.

Stich (1995): Die axiomatische Herleitung einer Klasse von dynamischen Ungleichheitsmassen, Diskussionsbeiträge zur Statistik und Ökonometrie, Seminar für Wirtschafts- und Sozialstatistik, Universität Köln.

The New Palgrave (1987): Dictionary of Economics. Macmillan Press, London, Stockton Press, New York.

Vogt, A. (1979): Das statistische Indexproblem im Zwei-Situationen-Fall. Dissertation Nr. 6448, ETH Zürich.

Vogt, A. (1987): Some Suggestions Concerning an Axiom System for Statistical Price and Quantity Indices, Commun. Statist.-Theory Meth., 16(12), 3641–3663.

Vogt, A. (1995a): Die Entwicklung von Konzentration und Ungleichheit bei den schweizerischen Pensionskassen, Mitteilungsblatt für Konjunkturfragen, 22–28.

Vogt, A. (1995b): L'évolution du coefficient d'inégalité et du degré de concentration dans les caisses de pension suisses entre 1987 et 1992, Cahiers des questions conjoncturelles, 22–28.

Arthur Vogt
Bundesamt für Sozialversicherung
CH–3003 Bern

Markus Eichenberger
Bundesamt für Informatik
CH–3003 Bern

Zusammenfassung

Zuerst werden die Theorien der Konzentrations- und Ungleichheitsmessung behandelt. Es wird die Ansicht vertreten, dass Konzentrations- und Ungleichheitsmessung im Zusammenhang mit allen sog. extensiven Grössen sinnvoll ist. Anschliessend werden diese Theorien auf die schweizerische Pensionskassenstatistik der Jahre 1987 und 1992 angewandt. Es ergeben sich interessante Resultate, etwa dass die Konzentration anhand der Anzahl bei den registrierten Versicherungseinrichtungen viel stärker zunahm als bei den nichtregistrierten und dass dies anhand der betrachteten, unseres Erachtens die Konzentration adäquat wiedergebenden Masszahlen gerade umgekehrt ist. Prima vista ist die Feststellung überraschend, dass die Korrelation – gruppenweise betrachtet – zwischen dem *Konzentrationsmass* von Herfindahl und dem *Ungleichheitsmass* Variationskoeffizient grösser ist als zwischen diesem und dem *Ungleichheitsmass* von Gini. Die Erklärung dafür ist, dass das Produkt des Konzentrationsmasses mit dem Gleichheitsmass (= 1 minus dem Ungleichheitsmass) die reziproke Anzahl von statistischen Einheiten ergeben soll, was für korrespondierende Masse exakt gilt.

Résumé

L'article présente les théories de la mesure des concentrations et des inégalités. Les auteurs émettent l'avis que les grandeurs extensives sont adéquates pour mesurer concentrations et inégalités. Ces théories sont appliquées aux statistiques des caisses de pensions suisses 1987 et 1992.
Les auteurs obtiennent des résultats intéressants, par exemple que la concentration mesurée au nombre d'assurés croît plus fortement pour les institutions de prévoyance enregistrées que pour les institutions de prévoyance non-enregistrées et que le contraire de cet énoncé est vrai lorsque la concentration est mesurée au moyens de grandeurs adéquates. De prime abord il est étonnant de constater, que la corrélation – considérée par groupe – entre l'indice de concentration de Herfindhal et le coefficient de variation (pris comme mesure de disparité) est plus grande que la corrélation entre ce dernier et la mesure d'inégalité de Gini. Ceci s'explique par le fait, que le produit de l'indice de concentration de Herfindhal avec la mesure d'égalité de Gini (= 1 moins la mesure d'inégalité de Gini) est exactement l'inverse du nombre d'unités statistiques pour les mesures considérées.

Summary

First the theories of concentration and inequality measurement are treated. The authors express the opinion that concentration and inequality measurement makes sense for all so-called extensive magnitudes. Then these theories are applied to the Swiss Pension Fund Statistics of 1987 and 1992. Interesting results are revealed, e.g. that the concentration according to the numbers has increased more for the registered pension funds than for the not registered ones and that the contrary is true according to the measures adequately describing concentration. At first sight it is surprising that the correlation – evaluated by groups – is higher between Herfindahl's *concentration* measure and the *inequality* measure

"coefficient of variation" than between the latter and Gini's *inequality* measure. However, this can be explained as follows: The product of a concentration measure with an equality measure (= 1 minus the inequality measure) should yield the reciprocal number of statistical units, an equation which is exact for corresponding measures.