

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des  
Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

**Herausgeber:** Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

**Band:** - (1993)

**Heft:** 2

**Rubrik:** Kurzmitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## D. Kurzmitteilungen

WOLFGANG EICHHORN, Karlsruhe und ARTHUR VOGT, Bern

### Corrigenda und Addenda zum Artikel Eichhorn und Vogt (1990)

In *Eichhorn und Vogt* (1990, S. 71) wurden Gini-(Ungleichheits)masse für die untenstehenden Überlebensordnungen angegeben. Durch einen Bezug auf “ $i - 2$ ” statt “ $i - 1$ ” in der Tabellenkalkulation hat sich leider ein Fehler eingeschlichen. Die nachstehenden Gini-Masse betreffend Lebensdauern

---

Rentnertafeln				
Einzelversicherung	1990	1980	1970	1953
Männer Gini-Mass $G$	0.1458	0.1476	0.1556	0.1621
Frauen Gini-Mass $G$	0.1361	0.1418	0.1503	0.1461
Gruppenversicherungstafeln	GKM/F80	GRM/F80	GKM/F70	GRM/F70
Männer Gini-Mass $G$	0.1627	0.1582	0.1663	0.1619
Frauen Gini-Mass $G$	0.1573	0.1481	0.1622	0.1536

---

müssen durch die folgenden korrigierten Werte ersetzt werden:

---

Rentnertafeln				
Einzelversicherung	1990	1980	1970	1953
Männer Gini-Mass $G$	0.0916	0.09737	0.1056	0.1121
Frauen Gini-Mass $G$	0.07412	0.08090	0.09254	0.09204
Gruppenversicherungstafeln	GKM/F80	GRM/F80	GKM/F70	GRM/F70
Männer Gini-Mass $G$	0.1144	0.1110	0.1186	0.1114
Frauen Gini-Mass $G$	0.1095	0.09266	0.1149	0.0971.

---

Die im genannten Artikel erhaltene Rangierung: Krankheitskosten sind am “ungleichsten”, Einkommen “mittel” und Lebensdauern am gleichmässigsten verteilt, wird durch die Korrektur nur noch verdeutlicht. Die beiden Aussagen, dass die Lebensdauern von Frauen gleichmässiger verteilt sind als die von Männern und dass die Lebensdauern sich mit der Zeit gleichmässiger verteilen, bleiben erhalten. In *Spuhler et al.* (1993) wurden diese Messungen auf Überlebensordnungen

anderer europäischer Länder angewandt. Dabei wird insbesondere auch die Korrelation zwischen dem Gini-Mass und der Lebenserwartung eines Neugeborenen untersucht. Diese Korrelation ist durchwegs negativ.

In der Zwischenzeit haben wir erfahren, dass das Gini-Mass bereits früher auf Überlebensordnungen angewandt wurde. *Silber* (1988) hat das Gini-Mass für die italienische Bevölkerung von 1871 bis 1970 berechnet. Im Jahre 1871 nahm es für die Männer den sehr hohen Wert von 0,531 an und reduzierte sich bis 1970 auf 0,141 und für die Frauen im gleichen Zeitraum von 0,517 auf 0,111.

In *Huber et al.* (1993) wurde die in *Eichhorn und Vogt* (1990) begonnene Messung der Ungleichheit der Krankheitskosten verfeinert: Es wurde die Altersabhängigkeit der Krankheitskosten in der Ungleichheitsmessung eliminiert. Dasselbe wird in *Vogt* (1992) mit den Einkommen gemacht. Wie die Krankheitskosten steigen auch die durchschnittlichen Einkommen mit dem Alter (leider in geringerem Ausmass). Hier wie dort besteht das Bedürfnis, die Ungleichheit ohne diesen Alterseffekt zu messen. Dabei kann man auf die Erweiterung des Gini-Masses durch *Paglin* (1975) zurückgreifen.

*Eichhorn und Krtscha* (1993) führen die in *Eichhorn und Vogt* (1990) begonnene "ars metiendi" fort, d.h. die Untersuchung der gemeinsamen Grundstruktur der verschiedenen Masse. Es zeigt sich, dass das Gini-Ungleichheitsmass besser nicht als Konzentrationsmass verwendet wird. Der springende Punkt ist die Replikationseigenschaft: Bei einer einmaligen Wiederholung (Replikation mit Faktor 2) der Verteilung soll sich ein Konzentrationsmass halbieren, ein Ungleichheitsmass jedoch unverändert bleiben. Mit anderen Worten: Wenn je zwei gleichgrosse Krankenkassen fusionieren, sodass sich deren Anzahl halbiert, verdoppelt sich die Konzentration, doch die Ungleichheit bleibt erhalten.

## Referenzen

- Eichhorn W. und Krtscha M.* (1993): Informationsmessung und Beziehungen zur Messung von Streuung, Risiko, Entropie, Konzentration und Ungleichheit. Erscheint in: Informationswirtschaft: Aktuelle Entwicklungen und Perspektiven, Physika-Verlag, Heidelberg.
- Eichhorn W. und Vogt A.* (1990): Gemeinsames bei der Messung von Ungleichheit, Streuung, Risiko und Information. Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung der Versicherungsmathematiker, 149–162.
- Huber H., Spuhler Th. und Vogt A.* (1993): The age-adjusted Inequality Measure of Gini used to measure Inequality in Health Care Costs, In Models and Measurement of Welfare and Inequality. Edited by W. Eichhorn. Springer Verlag, Berlin etc.
- Paglin M.* (1975): The Measurement and Trend of Inequality: A Basic Revision. The American Economic Review, 598–609.

*Silber J.* (1988): On Inequality before Death and Life Table Summary Measures. *Genus*, Rivista fondata da Corrado Gini, XLIV, 25–39.

*Spuhler Th., Bader P. and Vogt A.* (1993): Inequality of the duration of life measured by the Gini-coefficient – a useful indicator?, to appear

*Vogt A.* (1992): Messung der Ungleichheit der AHV-Einkommen mit dem Gini-Ungleichheitsmass und dessen Altersbereinigung nach Paglin. *Mitteilungsblatt für Konjunkturfragen*, Nr. 1, 17–19.

Wolfgang Eichhorn  
Institut für Wirtschaftstheorie  
und Operations Research  
Universität Karlsruhe  
Kaiserstr. 12  
D-76128 Karlsruhe

Arthur Vogt  
Bundesamt für Sozialversicherung  
CH-3003 Bern



O. HESSELAGER, Copenhagen

## An Improved Elementary Upper Bound for the Variance of a Stop-Loss Risk: A comment on the article by W. Hürlimann

To the Editors of "Mitteilungen der SVVM"

In a recent issue of your journal, *Hürlimann* (1993) has published a simple upper bound for the variance

$$\sigma(d)^2 = \text{Var}(X - d)_+$$

of a stop-loss risk with mean  $\mu$  and variance  $\sigma^2$ . With

$$\begin{aligned}\pi(d) &= E(X - d)_+, \\ \chi(d) &= E(d - X)_+ = d - \mu + \pi(d),\end{aligned}$$

being the net stop-loss premium and its "complement", respectively, *Hürlimann* shows that

$$\sigma(d)^2 \leq \sigma^2 - 2\pi(d)\chi(d). \quad (1)$$

He also claims that the bound (1) is better than that of *Kremer* (1990) when the retention  $d$  is "large". However, in his proof of this statement *Hürlimann* uses an incorrect expression for the bound of *Kremer*. With  $F(d) = P(X \leq d)$ , we may write the bound of *Kremer* as

$$\sigma(d)^2 \leq \sigma^2 - 2\pi(d)\chi(d) - \chi(d)^2 \frac{1 - F(d)}{F(d)},$$

which shows that this bound is always better. It does, however, also require knowledge of the probability  $F(d)$ .

**References**

- Hürlimann W.* (1993): An improved elementary upper bound for the variance of a stop-loss risk. *Mitteilungen der SVVM. 1993*, 97–99.
- Kremer E.* (1990): An elementary upper bound for the loading of a stop-loss cover. *Scandinavian Actuarial. J. 1990*, 105–108.

Ole Hesselager  
University of Copenhagen  
Laboratory of Actuarial Mathematics  
Universitetsparken 5  
DK-2100 Copenhagen Ø  
Denmark

A.H. SHARIF and H.H. PANJER, Waterloo

## A probabilistic model for Automobile Claims: A comment on the article by M.N. Islam and P.C. Consul

In a recent article published in this journal, *Islam and Consul* (1992) presented a probabilistic model for automobile claims. At different times, various probability models; namely, Poisson, inflated Poisson, negative binomial, mixed Poisson, generalized Poisson, generalized Poisson Pascal and Poisson inverse Gaussian, have been used to fit empirical data of automobile accidents or claims data. The most recent attempts of *Islam and Consul* (1992) of fitting model empirically to several data sets is interesting. Their fitted values and  $p$ -values in most cases appear better than the results of *Panjer* (1987) and *Consul* (1990) with the same data sets. However, serious flaws are found embedded in their fitting of the Consul model. Erroneous results have led to erroneous conclusions.

First, the derivation of the model of *Islam and Consul* (1992) is straightforward and the derived model is very simple having only two parameters  $(m, \theta)$ . Unfortunately, the parameter space is very restricted: (i)  $m \in N^+$ ,  $0 < \theta < 1$  such that  $1 \leq m \leq \theta^{-1}$  or (ii)  $m < 0$ ,  $\theta < 0$  such that  $0 < m\theta \leq 1$ . In real life situations, fitting of such a model to empirical data is not generally easy.

Our second comment deals with their following functions:

$$h_1(\theta) = \theta \ln \left( \frac{f_1}{n} \right) \quad (3.5)$$

$$h_2(\theta) = (1 - (\bar{x})^{-1}) \ln(1 - \theta) \quad (3.6)$$

They claim that: "Since the function  $h_1(\theta)$  and  $h_2(\theta)$  are monotonically decreasing at unequal rates, they must intersect at some point". Their claim is not true in general. Note that  $h_1(\theta)$  is a straight line and both of the functions meet at the origin for any sample. The monotonicity and unequal decreasing rate does not guarantee another intersection unless one can show that  $h_1(\theta)$  is not tangential to  $h_2(\theta)$  at  $\theta = 0$ . In fact one has to show that they are not stochastically tangential, that is in the sample space the two curves must be non-tangential at  $\theta = 0$  with probability 1. Similar comments apply to their following functions:

$$H_1(m) = 1 - \frac{1 - (\bar{x})^{-1}}{m} \quad (3.9)$$

$$H_2(m) = \exp \left[ \frac{-1}{n\bar{x}} \left( \frac{f_1 - n}{m} + \sum_{i=3}^k \sum_{r=1}^{i-2} \frac{if_i}{(mi - r)} \right) \right] \quad (3.10)$$

As before, they claim that: “Since the function  $H_1(m)$  and  $H_2(m)$  are both monotonically increasing at different rates, they must intersect at some value  $\hat{m}$ , which is the ML estimate.” The reasoning is insufficient and their claim is not true in general. In fact for each of the nine data sets, their claims are wrong. We have investigated the graph of  $H_1(m)$  and  $H_2(m)$  for each of their nine data sets, and in each case the graph shows a similar pattern to that shown in Figure 1. As an example, in *Figure 1*, the graph of  $H_1(m)$  and  $H_2(m)$  for the Belgium (1975–76) data clearly reveal the characteristics of the two functions. For the same data set (Belgium (1975–76)), they have MLE  $\hat{m} = 1.05714$ , hence  $H_1(\hat{m}) = 0.9285$  and  $H_2(\hat{m}) = 1.0598$  which are not the same! Similar discrepancies exist in the remaining eight cases they considered. It should be noted that  $H_1(0^+) = -\infty$ ,  $H_2(0^+) = \infty$ , and  $\lim_{m \rightarrow \infty} H_1(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} H_2(m) = 1$  and are true for all samples. For  $m \in (0, 1)$ ,  $H_1(m)$  is monotonically increasing while  $H_2(m)$  is not monotonic at all. Also note that for  $k \in N^+$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \frac{r}{i}} H_2(m^+) = 0$$

and

$$\lim_{m \rightarrow \frac{r}{i}} H_2(m^-) = \infty \quad \text{for } i = 3, 4, \dots, k; \quad r = 1, 2, \dots, i - 2.$$

So  $H_2(m)$  can have at most  $(k-1)(k-2)/2$  zeros and  $(k-1)(k-2)/2 + 1$  poles and all of them are in the interval  $[0, 1]$ . As an example, for Belgium (1975–76) data set  $k = 4$ , and hence  $H_2(m^+) = 0$  for  $m = 1/3, 1/4, 2/4$  and it has four poles at  $m = 0, 1/3, 1/4, 2/4$  as shown in Figure 1. For  $m \in [1, \infty)$ ,  $H_2(m)$  is monotonically decreasing while  $H_1(m)$  is monotonically increasing and both meet at  $m = \infty$ . In the paper of *Islam and Consul (1992)*, their formulation of ML equation for  $m$  is obtained by differentiation even though  $m$  is restricted to be either positive or any negative values, and to be bounded by  $\theta^{-1}$ . It appears that they ignored the restrictions on parameter space in formulating their ML equation: they do not prove that this is justified. One must incorporate the parameter restrictions in setting up the ML estimation; otherwise one is deviating from the original model.

Our third comment is regarding the actual ML estimates of  $m$  and hence the fitted values and  $p$ -values. As we mentioned earlier, the parameters of the model of *Islam and Consul (1992)* are very restrictive. Note that for  $m \in (0, 1)$ , the probability model takes negative value for large  $x$  (e.g.  $P(X = x) < 0$  for  $x > 2/(1 - m)$  and  $m \in (0, 1)$ ). In effect, for positive pure fractional value of

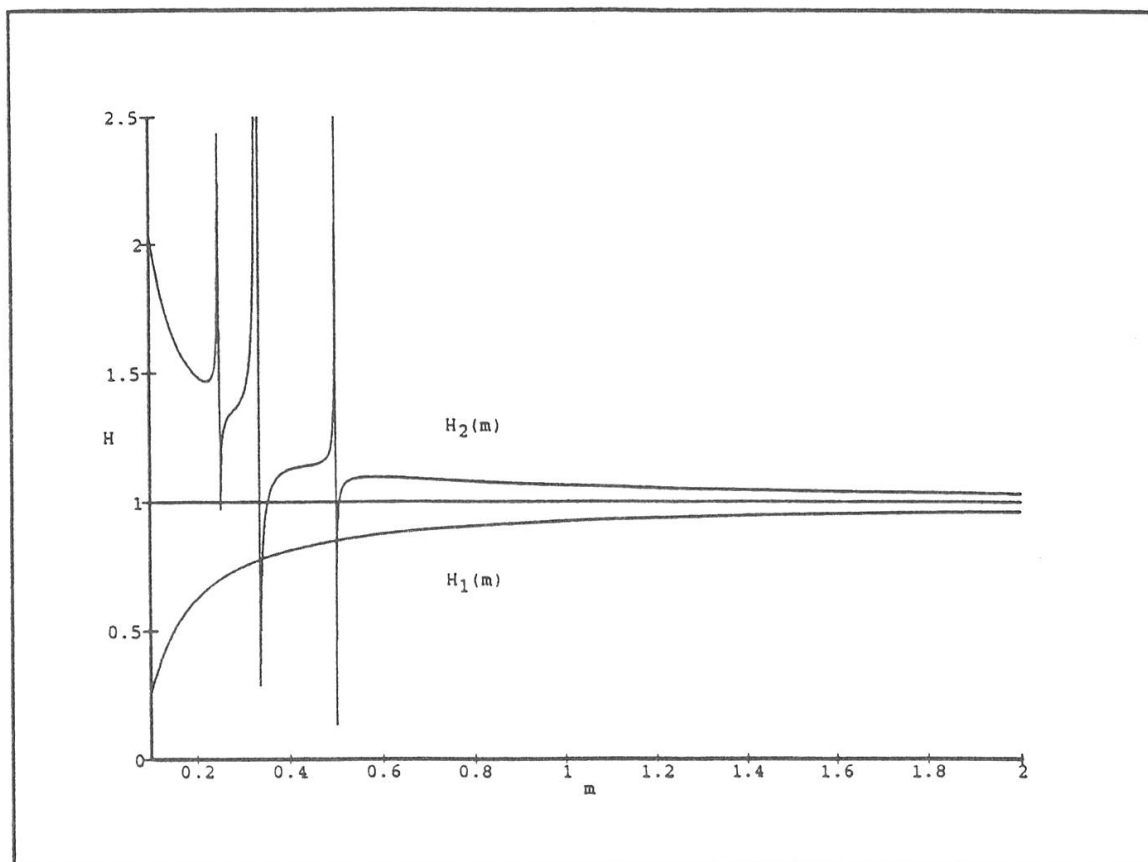


Figure 1: Graph of  $H_1(m)$  and  $H_2(m)$  for Belgium (1975–76) data

$m$ , their model is no longer a probability model. Their ML estimates of  $m$  for the California (1964), *Hossack et al* (1983) and Great Britain (1958) data sets are 0.98951, 0.94602 and 0.95864 respectively. Consequently these fitted models are not proper distributions, as negative probabilities ultimately arise. Of course one could get around this criticism by truncating the range of  $X$  at  $2/(1-m)$ , but that should create additional difficulties in formulating maximum likelihood equation for  $m$ .

Our fourth comment is about their truncation of data. *Panjer* (1987) and *Consul* (1990) both have used complete data (e.g.  $x = 0, 1, 2, \dots$ ) while *Islam and Consul* (1992) have used truncated data (e.g.  $x = 1, 2, \dots$ ). So their comparisons of model fitting are not meaningful.

Finally, there are other simple probability models, namely generalized Poisson Pascal, Poisson Inverse Gaussian that were empirically tested to actual data and

their fit were found quite satisfactory. For further details see *Panjer* (1987), *Willmot* (1987) and *Panjer and Willmot* (1992).

A.H. Sharif and H.H. Panjer  
Department of Statistics and Actuarial Science  
University of Waterloo, Waterloo  
Ontario, Canada N2L 3G1

## References

- Consul P.C.* (1990): A model for distribution of injuries in auto-accidents. Swiss Association of Actuaries – Bulletin 1990, Heft 1, 161–168.
- Hossack I.B., Pollard J.H. and Zehnwirth B.* (1983): Introductory Statistics with Applications in General Insurance. Cambridge University Press, Cambridge.
- Islam M.N. and Consul P.C.* (1992): A probabilistic model for automobile claims. Swiss Association of Actuaries Bulletin, 1992, Heft 1, 85–93.
- Panjer H. and Willmot G.* (1992): Insurance Risk Models. Society of Actuaries, Schaumburg, III.
- Panjer, H.H.* (1987): Models of claim frequency. Advances in the statistical science, Actuarial Science. Edited by I.B. MacNeil and G.J. Umphrey, 5, 115–125.
- Willmot G.* (1987): The Poisson-Inverse Gaussian as an alternative to the negative binomial. Scandinavian Actuarial Journal 1987 113–127.