WERNER HÜRLIMANN, Winterthur

# Absicherung des Anlagerisikos, Diskontierung der Passiven und Portfoliotheorie

## Einführung

Der Schwerpunkt des Interesses der Risikotheorie hat sich auf das Studium der Finanzrisiken verlagert, was zur Gründung der Sektion AFIR der IAA führte. Eine wichtige Aufgabe in diesem Bereich besteht darin, die Erfahrungen der Versicherungsmathematiker mit dem Wissen der modernen Finanzökonomie zu verbinden. Durch einen Konvergenzprozess sollen gemeinsame Modelle aufgezeigt werden, die möglicherweise Anwendungen sowohl in den Versicherungs- als auch in den Finanzmärkten finden.

Dieser Aufsatz behandelt das Problem der Absicherung von Finanzrisiken im Rahmen der Verpflichtungen einer Versicherungsgesellschaft. Die Arbeit beschränkt sich darauf, Hauptkonzepte sowie erste Interpretationen und Folgerungen darzulegen. Auf eine umfassende Darstellung und auf weitere Konsequenzen kann hier nicht eingegangen werden.

Gestützt auf wohlbekannte aktuarielle Techniken wird für stochastische Aktiven und deterministische Passiven in Abschnitt 1 ein Absicherungsmodell für die Rendite der Passiven konstruiert. Das vorgestellte Bewertungsmodell zerlegt den Anlageprozess in einen Absicherungsprozess und einen Prozess, der eine effektive oder realisierte Anlagerendite beschreibt. In Abschnitt 2 wird aus der Sicht der Optionspreistheorie eine finanzökonomische Methode präsentiert, die den "fairen" Preis der Absicherung liefert. Wählt man speziell das *Black-Scholes*-Modell, so ist die Absicherungskonstante nur abhängig von der risikofreien Verzinsung, der garantierten Verzinsung und der Volatilität der Rendite. Anschliessend wird in Abschnitt 3 das Problem der Bestimmung eines geeigneten Zinsfusses zur Diskontierung der Passiven diskutiert. Vorgestellt werden unterschiedliche aktuarielle und finanzökonomische Methoden, deren spezifische Eigenschaften weitere Untersuchungen erfordern.

Die Berücksichtigung der Kapitalanlagestruktur wird möglich durch die Integration des Absicherungsmodells in die moderne Portfoliotheorie. In diesem Zusammenhang wird nur der einfachste Ansatz von *Markowitz* behandelt. In den Abschnitten 4 und 5 wird eine "optimale" Absicherung einer Portfolio-Rendite mit, beziehungsweise ohne Vorhandensein einer risikofreien Anlage präsentiert. Der erste Fall wird ausführlich analysiert und diskutiert. Es ist bemerkenswert, dass abgesicherte Portfolios höhere erwartete Renditen bei kleinerer Varianz im Vergleich zu den klassischen effizienten Portfolios liefern. Insbesondere wird eine absolute Grenze für den Ertrag eines abgesicherten Portfolios aufgezeigt. Ist die erwartete Minimalrendite kleiner als die risikofreie Rendite, so ist mit der vorgestellten Methode im Extremfall höchstens die risikofreie Rendite im Erwartungswert zu erreichen. Die Ergebnisse werden durch einfache numerische Beispiele aus einem typischen Anwendungsbereich, der Absicherung der technischen Rückstellungen einer Versicherungsgesellschaft, illustriert. Schliesslich behandeln wir in Abschnitt 6 das Gleichgewichtsmodell für Aktiven von *Sharpe* und *Lintner*, das sogenannte CAPM (= capital asset pricing model), unter dem Gesichtspunkt der Absicherung. Ein "risikoangepasstes" CAPM besitzt eine lineare Marktlinie, die an das CAPM von *Black* erinnert.

## 1. Ein Absicherungsmodell für das Anlagerisiko

Diese Arbeit nimmt Bezug auf das dynamisch-stochastische Bewertungsmodell für Anlagerisiken, das in Brighton im Rahmen des 2. AFIR Kolloquiums präsentiert worden ist. Zur Vollständigkeit werden die wesentlichen Züge dieses Modells, zusammen mit einigen ergänzenden Eigenschaften, nochmals beschrieben.
Das Problem der Kongruenz zwischen Aktiven und Passiven wird wie folgt behandelt. Gegeben sind *stochastische Aktiven* $A(t)$ zur Zeit $t$, die *deterministische Passiven* $P(t)$ zur Zeit $t$ decken sollen. Zur Vereinfachung wird in dieser Arbeit nur das *statische Modell* diskutiert, d.h. wir beschränken uns auf die zukünftige finanzielle Lage an einem bestimmten Stichtag $t$. Für diese Arbeit wählen wir $t = 1$. In dieser speziellen Situation wird der Index für die Zeitabhängigkeit weggelassen. Somit werden zur Zeit $t = 1$ zufälligen Aktiven $A$ feste Passiven $P$ gegenübergestellt. Es bezeichne weiter

| | |
|---|---|
| $i^P$ | die jährliche Rendite, die zur Diskontierung der Passiven benützt wird |
| $r^P = 1 + i^P$ | der zu $i^P$ gehörige Aufzinsungsfaktor ($= P/A_0$) |
| $A_0 = P/r^P$ | der Wert der Aktiven, die zu Beginn der Anlageperiode auf den Finanzmarkt investiert sind |
| $i^A = E[A]/A_0 - 1$ | die jährliche erwartete Anlagerendite auf den Aktiven, die genügen soll, um die Passiven zu decken |
| $r^A = 1 + i^A$ | der zu $i^A$ gehörige Aufzinsungsfaktor |

$R = A/A_0$ die Zufallsvariable des akkumulierten Renditeprozesses zum investierten Kapital $A_0$

$(A-P)_+$ $= \begin{cases} A-P, & \text{falls } A > P \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Es wird vorausgesetzt, dass $E[A-P] = (r^A - r^P)A_0 > 0$ ist. Dies bedeutet, dass in der Zukunft positive Cash-flows erwartet werden. Diese Situation ist geradezu typisch für Versicherungsunternehmen. Üblicherweise werden die technischen Rückstellungen mit einem Zinsfuss akkumuliert, der kleiner als die erwartete Anlagerendite ausfällt.
Zur Deckung eines möglichen Verlusts $A < P$ am Ende einer Anlageperiode halte der Finanzmanager bei gutem Anlageergebnis einen Betrag $RB = RB(A,P)$ zurück, der bestimmt werden soll. Der *Rückbehalt* $RB$ genügt der Ungleichung $0 \leq RB \leq (A-P)_+$. Die Zufallsvariable $U = U(A,P) = (RB + P - A)_+$ beschreibt den *Finanzüberschaden*, d.h. der mögliche Verlust, der nach Abzug des Rückbehalts vom technischen Anlageergebnis entstehen kann. Die resultierende Zufallsvariable

$$NE := RB - U \tag{1.1}$$

beschreibt das *technische Netto-Finanzergebnis* nach Abzug einer möglichen *Dividende* in der Höhe $D = (A - P - RB)_+$, wobei der Betrag $RB$ zur Deckung des Finanzrisikos reserviert worden ist. Mathematisch ausgedrückt gelten folgende Formeln:

$$NE = (A-P) - D\,, \tag{1.2}$$

$$A = (P+D) + (RB - U)\,. \tag{1.3}$$

Im Durchschnitt ist es angebracht zu verlangen, dass keine Gewinne und Verluste entstehen:

$$E[NE] = E[RB - U] = 0. \tag{1.4}$$

Verschiedene Kandidaten sind für den Rückbehalt $RB$ möglich. Allerdings stellt die Funktion

$$RB = \min\{B, (A-P)_+\}\,, \tag{1.5}$$

wobei $B$ eine *Konstante* ist, die vom stochastischen Renditeprozess abhängt, die *stabilste Wahl des Rückbehalts* dar, in dem Sinne, dass die Varianz des Rückbehalts

$\mathrm{Var}[RB]$ durch diese Wahl minimiert wird. Dieses Resultat soll hier kurz begründet werden (siehe auch *Hürlimann* [1991b]). Aus der Bedingung $0 \le RB \le (A-P)_+$ erhält man die Formel $U = (P - A)_+$ für den Finanzüberschaden. Betrachte die Menge

$$M = \{RB : 0 \le RB \le (A-P)_+ \quad \text{und} \quad E[NE] = 0\} \tag{1.6}$$

aller möglichen Rückbehalte. Da $E[NE] = 0$ folgt

$$E[RB] = E[U] = E[(P-A)_+] = \text{const}\,. \tag{1.7}$$

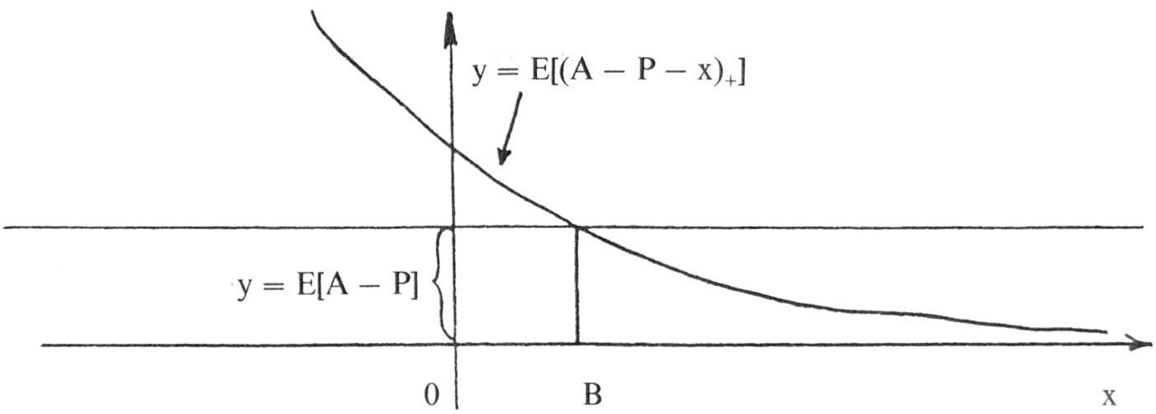
Das stochastische Optimierungsproblem

$$\mathrm{Var}[RB] = \min\,. \tag{1.8}$$

wird nun durch die Wahl (1.5) des Rückbehalts gelöst (siehe hierzu *Beard* et al. [1984], S. 172 – 173). Durch Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingung (1.4) folgt, dass die Konstante $B$ Lösung der Gleichung ist

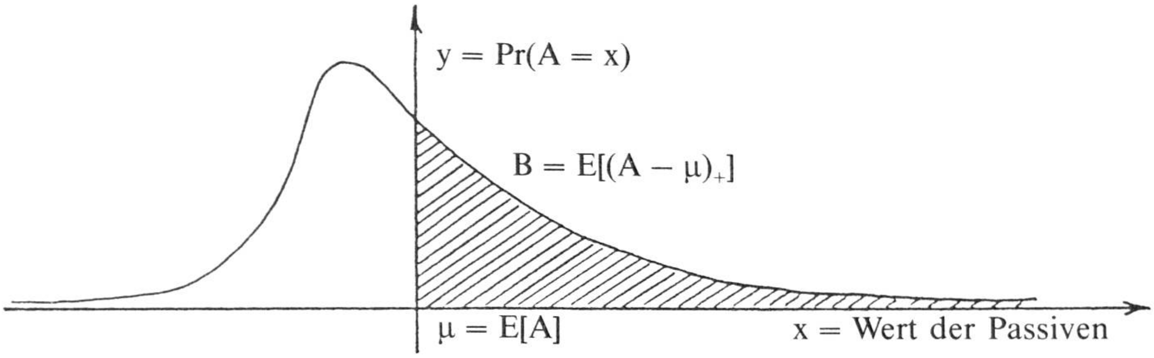
$$E[A-P] = E[(A-P-B)_+]\,. \tag{1.9}$$

Eine zweidimensionale Skizze soll diesen Sachverhalt geometrisch erläutern:




Die Konstante $B$, die den Preis für die Übernahme des Anlagerisikos darstellt, erhält man als Schnittpunkt des Graphen zur "Stop-Loss-Kurve" $y = E[(A-P-x)_+]$ mit der konstanten Geraden $y = E[A-P]$. Gibt man sich als spezielles Ziel die deterministischen Passiven in der Höhe $P = E[A] - B$ vor, so gilt $B = E[(A-\mu)_+]$ mit $\mu = E[A]$ der Erwartungswert der Passiven. In diesem Fall entspricht die

"Risikoprämie" $B$ der schraffierten Fläche rechts unterhalb des Graphen zur Dichte der Zufallsvariable $A$:




**Beispiel.** Ist $A$ normalverteilt mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$, so erhält man $B$ als Lösung der nicht-linearen impliziten Gleichung

$$B\cdot\Big(1-N\Big(\frac{P+B-\mu}{\sigma}\Big)\Big) = (P-\mu)\cdot N\Big(\frac{P+B-\mu}{\sigma}\Big)+e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{P+B-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

wobei $N(x)$ die kumulative Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist. Im Spezialfall $P=\mu-B$ gilt die einfache Formel $B=\sigma/\sqrt{2\pi}$.

Weitere ökonomische Interpretationen dieses Modells, insbesondere betreffend Pareto-optimale Eigenschaften, findet man in *Hürlimann* [1991b]. Aufgrund der Zerlegung (1.3) ist das vorliegende Modell als *Absicherungsmodell für die Rendite der Passiven* zu deuten. Nach (1.3) gilt nämlich die Zerlegung

$$A = A^e + A^a, \quad A^e = P + D, \quad A^a = RB - U, \tag{1.10}$$

wobei $A^a$ der *Absicherungsprozess* und $A^e$ das *effektive* oder *realisierte Anlageergebnis* darstellt. Für diese Prozesse gelten die detaillierteren Formeln

$$\begin{aligned} A^a &= \min\{B,(A-P)_+\} - (P-A)_+ \\ &= A - P - (A-P-B)_+ \\ &= B - (B+P-A)_+ \\ &= [b-(b+r^P-R)_+]A_0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} A^e &= P + D \\ &= A - A^a \\ &= P + (A-P-B)_+ \\ &= [r^P + (R-r^P-b)_+]A_0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

wobei $b = B/A_0$ die konstante *Reserverate für die Deckung des Anlagerisikos per Einheit des investierten Kapitals* darstellt. In (1.12) ist ersichtlich, dass unter den Modellannahmen, insbesondere $r^A > r^P$, die Verzinsung $r^P$ auf den Passiven sichergestellt wird. In Worten ausgedrückt interpretiert das vorliegende *Bewertungsmodell* den Wert der Aktiven Ende der Anlageperiode als

$$\begin{array}{rcl} A & = & \text{Wert der Anlage} \\ & = & \text{garantierter Wert der Passiven} \\ & + & \text{Dividende bei günstigem Verlauf der Rendite} \\ & + & \text{Reserve für die Deckung des Anlagerisikos} \\ & - & \text{Finanzüberschaden} \\ & = & P + D + B - (B + P - A)_+ \end{array}$$

In *invarianter* Darstellung gelten dieselbe Aussagen und Formeln für den akkumulierten Renditeprozess. Insbesondere ist die Konstante $b$ Lösung der Gleichung (siehe (1.9)):

$$r^A - r^P = E[(R - r^P - b)_+] \,. \tag{1.13}$$

**Bemerkungen**

(a) Der Rückbehalt ist keineswegs an die optimale Wahl (1.5) gebunden. Alternative Möglichkeiten definieren ebenfalls attraktive Bewertungsmodelle. Zum Beispiel fragt man nach einer stabilen Dividende, so ist die Varianz der Dividendenformel zu minimieren. In diesem Fall lautet die optimale Wahl

$$D = \min\{B, (A - P)_+\} \,, \tag{1.14}$$

mit zugehörigem Rückbehalt

$$RB = (A - P - B)_+ \,, \tag{1.15}$$

wobei die Konstante B folgende Erwartungswertgleichung erfüllt

$$E[(A - P - B)_+] - E[(P - A)_+] = B - E[A - P] \,. \tag{1.16}$$

Unter der Annahme, dass die Dividendenformeln die Eigenschaft $0 \le D \le (A - P)_+$ besitzen, wird die Formel (1.14) analog wie (1.5) hergeleitet (siehe auch *Hürlimann* [1991b]).

(b) Da am Finanzmarkt Baisse und Hausse für verschiedene Anlagen meistens parallel verlaufen, ist das Konzept des Rückbehalts eigentlich nur über mehrere Perioden sinnvoll definiert. Es muss nämlich die Möglichkeit vorhanden sein, die Schwankungen der Rendite über einen längeren Zeitraum aufzufangen. Das vorliegende Einperiodenmodell setzt somit stillschweigend die Annahme einer stabilen zukünftigen Entwicklung voraus. Die Formulierung eines *Mehrperiodenmodells der Absicherung* benötigt einen Mehraufwand, sollte aber technisch möglich sein.

## 2. Anwendung der Optionspreistheorie

Eine "*Option*" ist ein Vertrag, der das Recht überträgt, spezifisches Eigentum, z.B. Wertpapiere, zu einem festen Preis, genannt *Ausübungspreis*, zu einem festen Preis während oder nach Ablauf einer bestimmten Frist kaufen oder verkaufen zu können. Dabei hat der Abnehmer des Optionsvertrags das Recht, aber nicht die Obligation, das spezifische Eigentum zu kaufen oder zu verkaufen. In den Finanzmärkten werden verschiedene Optionen angeboten, die sich nach der Art des Rechtes unterscheiden. Bei einer *Call-Option* erhält der Käufer das Recht, das spezifische Eigentum zu kaufen. Eine *Put-Option* beinhaltet ein entsprechendes Verkaufsrecht.
Als Ausgangspunkt unserer Betrachtung ziehen wir die Gleichung (1.13) heran. Wir schreiben nun $r^P = r_{\min}$ für die Minimalrendite, die auf den Passiven erzielt werden soll. Die Formel (1.13) identifiziert die Differenz zwischen erwarteter Rendite und Minimalrendite als *aufgezinster Preis einer Call-Option* zum *Ausübungspreis* $K = b + r_{\min}$ für ein *investiertes Kapital* $S = 1$. Unter Verwendung der Identität

$$(R - r_{\min} - b)_+ = R - r_{\min} - b + (b + r_{\min} - R)_+ \tag{2.1}$$

erhält man die äquivalente Gleichung

$$b = E[(b + r_{\min} - R)_+] \,. \tag{2.2}$$

Damit ist die Konstante $b$ implizit als *aufgezinste Put-Option* definiert. Um den "fairen" Preis $P$ dieser Option am Anfang der Anlageperiode zu bestimmen, benütze man das folgende Rezept aus der Optionspreistheorie (falls die mathematischen Bedingungen dafür erfüllt sind). Man diskontiere mit dem Faktor $v_f = 1/r_f$, wobei $r_f$ der Aufzinsungsfaktor der risikofreien Anlage ist, und transformiere das zu $R$

gehörige Mass so, dass der Renditeprozess die *Martingal*-Eigenschaft besitzt. Das transformierte Mass wird *risikoneutrales Mass* genannt und mit * bezeichnet. In Formeln ausgedrückt lautet der Preis der Put-Option

$$P = b \cdot v_f = v_f \cdot E^*[(b + r_{\min} - R)_+] \,. \tag{2.3}$$

Die Anwendung der *Put-Call Parität*

$$P = C - S + K \cdot v_f \,, \tag{2.4}$$

liefert weiter den Preis $C$ der Call-Option, nämlich

$$C = 1 - r_{\min} \cdot v_f = v_f \cdot E^*[(R - r_{\min} - b)_+] \,. \tag{2.5}$$

Damit ist der *"faire" Preis der Absicherungskonstante* $b$, die keine Arbitrage ermöglicht, im Prinzip berechenbar. Konkrete Ergebnisse erhält man durch Anwendung eines spezifischen Optionspreismodells. Zum Beispiel ergibt die *Black-Scholes* [1973]-Formel die implizite Gleichung

$$r_f - r_{\min} = r_f \cdot N(x) - (b + r_{\min}) \cdot N(x - \sigma) \,, \tag{2.6}$$

wobei

$$x = \frac{\ln \frac{r_f}{b + r_{\min}}}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma \,,$$

$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[\ln(R)]}$ die Volatilität,

$N(x)$ die kumulative Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung.

Bemerkenswert für diese *finanzökonomische Methode* ist die Tatsache, dass die gesuchte Konstante $b$ *nicht* von der erwarteten Rendite $r$ abhängt, sondern nur von der Volatilität $\sigma$, der garantierten Verzinsung $r_{\min}$, und von der risikofreien Verzinsung $r_f$. Das Absicherungsmodell aus Abschnitt 1 zeigt, dass die realisierte (stochastische) Rendite gleich ist

$$r_{\min} + (R - r_{\min} - b)_+ \,, \tag{2.7}$$

wobei zu bemerken ist, dass die erwartete Verzinsung im allgemeinen verschieden von $r$ sein wird. Durch obiges Verfahren wird nämlich nicht Gleichung (1.13) gelöst, sondern das Nicht-Arbitrage-Prinzip angewendet. Allerdings stellt die vorgeschlagene Methode nur eine Näherung dar, die auf die Rendite eines Aktienindexes praktisch anwendbar ist. Die explizite Berücksichtigung der Portfoliozusammensetzung,

in der Regel Aktien und Obligationen, verkompliziert das allgemeine Problem aber ganz erheblich.
Zu erwähnen ist ebenfalls das folgende fundamentale Ergebnis der Optionspreistheorie, das als direkte Konsequenz von (2.5) anzusehen ist. Da der Wert der Call-Option immer positiv ist, folgt $r_{\min} \leq r_f$.
Dies bedeutet, dass in allen mathematisch zulässigen Optionspreismodellen nur eine Minimalrendite garantiert werden kann, die höchstens gleich der risikofreien Rendite ist.

## 3. Zinsfuss zur Diskontierung der Passiven

In einer risikobehafteten und unsicheren ökonomischen Umgebung lässt sich eine konstante Rendite auf den Aktiven einer Versicherungsgesellschaft kaum realisieren. Im allgemeinen werden die Renditeschwankungen durch eine reduzierte Rendite auf den Passiven ausgeglichen, als Beispiel sei der traditionelle Zinsfuss in der Lebensversicherung erwähnt. Die Frage nach einem geeigneten *Zinsfuss zur Diskontierung der Passiven* ist am 2. AFIR-Kolloquium in Brighton ergiebig diskutiert worden. Forschungen auf diesem Gebiet sind aus verschiedenen Gründen erwünscht (vgl. hierzu *Wilkie* [1991], S. 3).
Gestützt auf das Absicherungsmodell dieser Arbeit und seine Konsequenzen sind verschiedene Methoden denkbar, um diese Frage zu beantworten. Vorgestellt werden eine *aktuarielle* und eine *finanzökonomische* Methode.
Mit $R^A$ bezeichnen wir den akkumulierten Renditeprozess auf den Aktiven, mit $r^A$ den Aufzinsungsfaktor auf den Aktiven und mit $r^P$ den Aufzinsungsfaktor auf den Passiven, der garantiert werden soll.
Zuerst wird die *aktuarielle Methode* vorgestellt. Laut Gleichung (1.13) genügt es eine Anlage mit erwarteter Rendite

$$r^A = b + r^P \tag{3.1}$$

zu finden. Die Konstante $b$ wird als akkumulierter Preis des Risikos interpretiert, das durch die schwankende Rendite entsteht. Durch Bezahlung dieser "Risikoprämie" erwartet der Anleger eine Rendite, die um $100b\%$ höher ist als die Minimalrendite. Mit dieser Bedingung folgt, dass $r^A$ Lösung der impliziten Gleichung

$$r^A - r^P = E[(R^A - r^A)_+] \tag{3.2}$$

ist. Unter der natürlichen Voraussetzung $r^A > r^P$ besitzt diese Gleichung im allgemeinen eine eindeutige Lösung $r^A$. Ist der Renditeprozess bekannt, so kann man diese Gleichung numerisch mit der *algebraischen Momentenmethode* lösen (vgl. *Hürlimann* [1991a]). Ein offenes Problem ist die Wahl eines geeigneten Renditeprozesses. Dieses Modellierungsproblem oder äquivalent dazu die Festlegung der *Zinssatzstruktur* (= term structure of interest rates) scheint mit erheblichen Schwierigkeiten mathematischer Natur verbunden zu sein. Setzt man voraus, dass $R^A$ lognormal verteilt ist mit Erwartungswert $\mu$ und Standardabweichung $\sigma$, so gilt

$$\begin{aligned} \mu &= \ln(r^A) - \frac{1}{2}\sigma^2 , \\ \sigma^2 &= \mathrm{Var}[\ln(R^A)] , \end{aligned} \tag{3.3}$$

die erste Beziehung wegen $r^A = E[R^A] = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$. Durch Berechnung oder durch Anwendung der *Black-Scholes*-Formel für Call-Optionen erhält man

$$E\Big[(R^A - r^A)_+\Big] = r^A \cdot \Big[2N\Big(\frac{1}{2}\sigma\Big) - 1\Big] . \tag{3.4}$$

Ein Vergleich mit (3.2) ergibt folgende Beziehung zwischen Rendite auf den Passiven und Rendite auf den Aktiven (vgl. Formeln (3.8) und (3.9) in *Hürlimann* [1991a]):

$$r^P = 2 \cdot r^A \cdot \Big[1 - N\Big(\frac{1}{2}\sigma\Big)\Big] . \tag{3.5}$$

Das Absicherungsmodell zeigt, dass die realisierte (stochastische) Rendite auf den Aktiven gleich

$$r^P + (R^A - r^A)_+ . \tag{3.6}$$

ist. Nach (3.2) ist der Erwartungswert der realisierten Rendite gleich $r^A$. Im Spezialfall einer deterministischen Ökonomie ist $\sigma = 0$, d.h. $r^P = r^A$, wie es sein sollte. Die Schwierigkeit bei der praktischen Anwendung dieser Methode liegt darin, dass zur Zeit unbekannt ist, ob der Erwartungswert $r^A$ einer Anlage vorausgesagt werden kann.

Eine mögliche *finanzökonomische Methode* folgt durch Anwendung der Optionspreistheorie wie in Abschnitt 2 auf die transformierte Gleichung (3.2):

$$E^*[R^A] - r^P = E^*[(R^A - r^A)_+] . \tag{3.7}$$

Die Absicherung erfolgt in diesem Fall nicht durch Selbstfinanzierung, sondern durch Kauf einer Call-, Put- oder kombinierten Call-Put-Option auf dem Finanzmarkt. Im *Black-Scholes*-Modell erhält man folgende Beziehung

$$r^P = r^A \cdot \left[1 + \frac{r_f}{r^A} - N(\sigma - x) - \frac{r_f}{r^A} \cdot N(x)\right], \tag{3.8}$$

wobei

$$x = \frac{\ln \frac{r_f}{r^A}}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma .$$

Wie in Abschnitt 2 ist darauf hinzuweisen, dass die explizite Portfoliostruktur dabei unberücksichtigt bleibt. Deshalb kann die Methode vorerst nur für die Rendite eines Aktienindexes praktisch verwendet werden.

Von besonderem Interesse ist der Spezialfall $r^A = r_f$ des risikofreien Aufzinsungsfaktors, der nach Abschnitt 2 die höchste Minimalrendite ist, die in Optionspreismodellen garantiert werden kann. Dabei ist zu beachten, dass der zugrunde liegende Renditeprozess stochastischer Natur ist. Man erhält die Formel

$$r^P = 2 \cdot r_f \cdot \left[1 - N\left(\frac{1}{2}\sigma\right)\right], \tag{3.9}$$

die ebenfalls aus (2.6) folgt, falls man $b + r_{\min} = b + r^P = r_f$ setzt.

Nehmen wir nun an, dass der Diskontierungsfaktor auf den Passiven garantiert werden soll. Aus der erwähnten Tatsache, dass höchstens $r^A = r_f$ auf den Aktiven garantiert werden kann, und aus Gleichung (3.7) folgt, dass dann der garantierte Diskontierungsfaktor auf den Passiven in einer risikobehafteten Ökonomie immer kleiner als der risikofreie Diskontierungsfaktor ist. Dasselbe (qualitative) Ergebnis wird unabhängig in *Kozik* [1991] gezeigt.

Eine mögliche einparametrige Schar von Absicherungsstrategien mit dem Scharparameter $0 \leq w \leq 1$ besteht darin, dass man das investierte Kapital $S = 1$ wie folgt anlegt:

$$\begin{aligned} w \cdot (1 - r^P \cdot v_f) & \quad \text{in einer Call-Option mit Ausübungspreis } r_f\,, \\ (1 - w) \cdot (1 - r^P \cdot v_f) & \quad \text{in einer Put-Option mit Ausübungspreis } r_f\,, \\ r^P \cdot v_f & \quad \text{in der risikofreien Anlage } r_f\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Für diese Absicherungsstrategie lautet die realisierte (stochastische) Rendite auf den Aktiven

$$r^P + w \cdot (R^A - r_f)_+ + (1 - w) \cdot (r_f - R^A)_+ \geq r^P + \min\{w, 1 - w\} \cdot |R^A - r_f| \,. \tag{3.11}$$

Ist $w = 1$, so partizipiert man an dem Aufwärtstrend des Aktienindexes durch die Call-Option. Ist dagegen $w = 0$, so partizipiert man an dem Abwärtstrend durch die Put-Option, und ist $w = \frac{1}{2}$, so profitiert man von den starken Schwankungen der Rendite des Aktienindexes.

Im Fall $r^A = r_f$, $w = 1$ und unter den obigen Modellvoraussetzungen ist die aktuarielle mit der finanzökonomischen Methode gleichwertig. Es ist $r^P$ eindeutig durch dieselbe Formel bestimmt, und die realisierten stochastischen Renditen sind gleich.

## 4. Absicherung der Portfolio Rendite, falls eine risikofreie Anlage verfügbar ist

Die in der Praxis am häufigsten angewendete Methode, um den Kapitalertrag eines gemischten Portfolios von Anlagen unter Berücksichtigung des Risikos zu maximieren, ist der Ansatz von *Markowitz* [1952/59]. Mit dieser Methode werden effiziente Portfolios im folgenden Sinn ermittelt: für eine vorgegebene Rendite wird das Portfolio mit der kleinsten Varianz der Rendite gewählt und für eine vorgegebene Varianz der Rendite wird das Portfolio mit der höchsten erwarteten Rendite gewählt. Unter allen möglichen derart bestimmten Portfolios, den sogenannten *Grenzportfolios*, in der Erwartungswert/Varianz-Ebene, gibt es ein eindeutig bestimmtes Portfolio mit minimaler Varianz der Rendite, nämlich das *Minimum-Varianz-Portfolio*. Grenzportfolios, deren erwartete Rendite streng grösser ist als das Minimum-Varianz-Portfolio heissen *effiziente Portfolios*. Zweckmässige Einführungen zur Portfolio-Analyse von *Markowitz* findet man in den Lehrbüchern *Ingersoll* [1987] oder *Huang* und *Litzenberger* [1988]. Unsere Darstellung folgt den letztgenannten Autoren.

Es stellt sich wie in Abschnitt 3 die Frage, unter welchen Bedingungen ein vorgegebenes Niveau der Passiven erreicht werden kann. Mit anderen Worten:

(a) welche *Portfoliogewichte* sind im Rahmen der *Markowitz* Portfolio Analyse geeignet, um eine Minimalrendite zu erzielen?

(b) wie kann eine Portfolio-Rendite abgesichert werden?

Diese Fragen werden hier unter Berücksichtigung des Absicherungsmodells aus Abschnitt 1 untersucht. Es entstehen neuartige *risikoangepasste effiziente Portfolios* oder *abgesicherte effiziente Portfolios*, deren Eigenschaften weitere Forschungen anregen dürften.

Folgende Notationen werden durchwegs benützt:

| | |
|---|---|
| $r_f$ | der risikofreie Aufzinsungsfaktor, |
| $r_{\min}$ | der Aufzinsungsfaktor zur Minimalrendite, die garantiert werden soll, |
| $\underline{R} = (R_f, \ldots, R_N)$ | der Vektor der zufälligen Aufzinsungsfaktoren zu $N$ verschiedenen risikobehafteten Anlagen, |
| $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_N)$ | der Vektor der erwarteten Aufzinsungsfaktoren der $N$ Anlagen, |
| $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_N)$ | der Vektor der Portfoliogewichte der risikobehafteten Anlagen |
| $\underline{1} = (1, \ldots, 1)$ | der Einheitsvektor, |
| $R = \underline{w}^T \cdot \underline{R}$ | die Zufallsvariable des akkumulierten Renditeprozesses des Portfolios, |
| $r = E[R]$ | der erwartete Aufzinsungsfaktor des Portfolios, |
| $V = (\sigma_{ij})$ | die Varianz/Kovarianzmatrix der |
| $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}[R_i, R_j]$, | Renditen der |
| $i, j = 1, \ldots, N$ | risikobehafteten Anlagen. |

Es wird angenommen, dass Portfoliogewichte negativ sein können, dass also ein unbegrenzter Verkauf erlaubt ist. Weiter wird vorausgesetzt, dass $r_i \neq r_j$ für $i \neq j$ ist, d.h. dass verschiedene Anlagen verschiedene erwartete Aufzinsungsfaktoren haben. Ausserdem sollen die zufälligen Aufzinsungsfaktoren $R_f, \ldots, R_N$ linear unabhängig sein mit einer positiv definiten Varianz/Kovarianzmatrix $V$. Ist keine risikofreie Anlage vorhanden (Abschnitt 5), so wird zusätzlich die *Budgetgleichung* $\underline{w}^T \cdot \underline{1} = 1$ angenommen. Ist eine risikofreie Anlage verfügbar, so kann auf eine Budgetgleichung aus folgendem Grund verzichtet werden. Die residuale Grösse $1 - \underline{w}^T \cdot \underline{1}$ stellt, falls positiv, den investierten Anteil in der risikofreien Anlage, oder, falls negativ, den risikofreien Anteil, der benötigt wird, um die risikobehaftete Anlage zu finanzieren, dar. Kompliziertere Fälle mit Restriktionen der Portfoliogewichte werden numerisch mit Methoden der Operations Research gelöst. Von Interesse sind z.B.

| | |
|---|---|
| $\underline{w} \geq \underline{0}$ | Verkäufe sind ausgeschlossen, |
| $A\underline{w} \leq \underline{b}$ | Restriktionen auf die möglichen Gewichte, z.B. über die maximalen Anteile von Anlagekategorien, usw. ($A$ eine $N \times N$-Matrix, $\underline{b}$ ein $N$-Vektor) |

Um eine vorgegebene minimale akkumulierte Rendite $r_{\min}$ eines Portfolios zu erreichen, genügt es laut Gleichung (1.13) eine Anlage mit erwarteter Rendite

$$r = b + r_{\min} \tag{4.1}$$

zu finden. Mit dieser Bedingung folgt, dass $r$ Lösung der impliziten Gleichung

$$r - r_{\min} = E[(R - r)_+] \tag{4.2}$$

ist. Diese hinreichende Bedingung setzt voraus, dass gewisse stochastische Eigenschaften des Renditeprozesses bekannt sind oder prognostiziert werden können. Ist zum Beispiel die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[R]}$ bekannt, so gilt nach *Benktander* [1977] die Approximation

$$r - r_{\min} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4\sigma\,. \tag{4.3}$$

Diese Formel ist exakt für normalverteilte Renditen und liefert eine vorsichtige Schätzung für viele Verteilungen, insbesondere auch für unendlich teilbare Verteilungen. Nach *Bowers* [1969] gilt folgende beste obere Schranke, die für eine Zweipunkteverteilung angenommen wird:

$$E[(R - r)_+] \le \frac{1}{2}\sigma\,. \tag{4.4}$$

Dies führt zu der verteilungsfreien besten Abschätzung

$$r \le r_{\min} + \frac{1}{2}\sigma\,. \tag{4.5}$$

Die praktische Anwendung der Formel (4.2) bereitet Schwierigkeiten, da der stochastische Renditeprozess und insbesondere die erwartete Rendite einer Anlage nur mit Mühe, wenn überhaupt, prognostiziert werden kann. Trotz Bedenken betreffend die Schätzbarkeit einer erwarteten Rendite werden diese Ergebnisse im Rahmen der Erwartungswert/Varianz Portfolio Analyse von *Markowitz* angewendet. Zur Unterstützung dieses Anliegens beachte man, dass letztlich Relevanz nicht in den Voraussetzungen, sondern in den Implikationen liegt. Hierzu das Zitat von *Sharpe* [1985], Kap. 8, S. 194: "As always, the issue is not the relevance of the assumptions, but the validity of the implications." Darüberhinaus wird die Portfolio-Analyse durch die *Nutzentheorie* untermauert. Beschränkt man sich auf multinormal verteilte Anlagerenditen, oder werden spezielle Nutzenfunktionen verwendet

(HARA-Klasse: Nutzenfunktionen mit der sogenannten **h**yperbolischen **a**bsoluten **R**isiko**a**version), so wird die Gültigkeit von Erwartungswert/Varianz-Analyse anhand des Prinzips der Maximierung des erwarteten Nutzens begründet.
Die Integration der Bedingung (4.1) in der modernen Portfoliotheorie führt somit zu folgendem approximativen Ansatz:

$$r = r_{\min} + c \cdot \sigma, \quad c \geq 0. \tag{4.6}$$

Dabei ergibt die Wahl $c = \frac{1}{2}$ die "verteilungsfreie beste" Sicherheit und $c = 1/\sqrt{2\pi}$ entspricht einer "realistischen" Einschätzung des Anlagerisikos. Im Rahmen der Portfolio-Analyse nach *Markowitz* ist folgendes abgeänderte *Optimierungsproblem* zu lösen:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \underline{w}^T V \underline{w} \right\} \tag{4.7}$$

unter der Nebenbedingung

$$\underline{w}^T \cdot (\underline{r} - \underline{1} r_f) + r_f = r_{\min} + c\sqrt{\underline{w}^T V \underline{w}}$$

Im ursprünglichen Ansatz von *Markowitz* wird lediglich der Fall $c = 0$ behandelt. Die abgeänderte Fassung des Optimierungsproblems modelliert das Bedürfnis, ein "realistisches" Ziel an Stelle eines absoluten Ziels für die Rendite zu verlangen. Als *Spezialfall* diskutieren wir zunächst den Fall $N = 1$ einer einzigen unsicheren Anlage mit Portfoliogewicht $w_u$, erwarteter Aufzinsung $r_u$ und Standardabweichung der Rendite $\sigma_u$. Die Nebenbedingung lautet

$$w_u r_u + (1 - w_u) r_f = r_{\min} + \operatorname{sgn}(w_u) w_u c \sigma_u \tag{4.8}$$

und liefert die Lösung

$$w_u = \begin{cases} 0, & \text{falls } r_f = r_{\min}, \\ \operatorname{sgn}(w_u)|w_u|, \quad |w_u| \text{ beliebig}, & \text{falls } r_f = r_u - \operatorname{sgn}(w_u) c \sigma_u \\ \dfrac{r_f - r_{\min}}{r_f - r_{\min} + \operatorname{sgn}(w_u) c \sigma_u}, & \text{sonst}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Das Minimum-Varianz-abgesicherte Portfolio entspricht der risikolosen Anlagestrategie, die das verfügbare Kapital mit dem Satz $r_f$ akkumuliert. Bei vorgegebenem $r_{\min}$ erhält man im allgemeinen einen eindeutig bestimmten Anteil $w_u$ mit Portfoliovarianz $\sigma^2 = (w_u \sigma_u)^2$. Wir nennen $w_u$ den *optimalen risikoangepassten oder abgesicherten Anteil*. Das klassische Modell von *Markowitz* ohne Absicherung der geforderten Minimalrendite $r_{\min}$ wird als Spezialfall $c = 0$ des obigen Optimierungsproblems angesehen. Für $N = 1$ erhält man den *optimalen deterministischen Anteil*

$$w_u^d = \begin{cases} 0, & \text{falls } r_f = r_{\min} \\ \text{beliebig}, & \text{falls } r_f = r_u \\ \dfrac{r_f - r_{\min}}{r_f - r_u}, & \text{sonst}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Es ist interessant, die "Performance" oder Risiko/Ertrag-Leistung der deterministischen Lösung mit unseren abgesicherten Portfolios zu vergleichen. Für die Diskussion setzen wir voraus, dass $0 < w_u < w_u^d$, was in folgenden Fällen erfüllt ist:

(i) $\quad r_{\min} < r_f, \quad r_u < r_f < r_f + c\sigma_u$

(ii) $\quad r_{\min} > r_f, \quad r_u > r_f + c\sigma_u > r_f$.

Es sei noch $R_u$ die Zufallsvariable der Aufzinsung für die unsichere Anlage. Die Aufzinsung im deterministischen Fall ist dann

$$R^d = (1 - w_u^d)r_f + w_u^d R_u$$

mit Erwartungswert und Varianz

$$E[R^d] = r_{\min}, \quad \mathrm{Var}[R^d] = (w_u^d \sigma_u)^2.$$

Die Aufzinsung im abgesicherten Portfolio lautet

$$R^{ab} = (1 - w_u)r_f + w_u R_u$$

mit Erwartungswert und Varianz

$$\begin{aligned} E[R^{ab}] &= r_{\min} + c(w_u \sigma_u) > E[R^d], \\ \mathrm{Var}[R^{ab}] &= (w_u \sigma_u)^2 < \mathrm{Var}[R^d]. \end{aligned}$$

Es ist bemerkenswert, dass das risikoangepasste Portfolio, neben abgesicherter Minimalrendite, einen höheren erwarteten Ertrag bei kleinerer Varianz als das deterministische Portfolio liefert. Ein ähnliches Phänomen wird mit Hilfe von Simulationen durch *Macdonald* [1991] festgestellt (siehe auch die suggestive Formel [4.12] in *Hürlimann* [1991a]).

**Beispiel 1:** Absicherung der technischen Rückstellungen einer Versicherungsgesellschaft

Bekanntlich werden die technischen Rückstellungen, als Guthaben der Versicherungsnehmer, mit einem technischen Aufzinsungsfaktor $r^P$ verzinst, der gewöhnlich unter dem risikofreien $r_f$ liegt. Wir nehmen an, dass die Versicherungsgesellschaft einen Teil des Kapitals in einer unsicheren Anlage investiert, zum Beispiel in Aktien an der Börse. Wird die Verzinsung $r_{\min} = r^P$ abgesichert, so ergibt sich, in Abhängigkeit der Standardabweichung der Aktienrendite, ein eindeutig bestimmter *optimal risikoangepasster Aktienanteil*. Die folgende Tabelle illustriert an numerischen Beispielen die unterschiedlichen Anteile in einer deterministischen und einer stochastischen Ökonomie. In gewissen Fällen explodiert der benötigte optimale stochastische Anteil, was auf ein *chaotisches Verhalten* hinweisen könnte.

Nun wenden wir uns dem *allgemeinen Fall* $N \geq 2$ des Optimierungsproblems (4.7) zu. Die *Lagrange*-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\underline{w}^T V \underline{w} + \lambda(r_f - r_{\min} + \underline{w}^T(\underline{r} - \underline{1}r_f) - c\sqrt{\underline{w}^T V \underline{w}}) \tag{4.11}$$

führt zu den folgenden hinreichenden und notwendigen Bedingungen für ein globales Extremum:

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{w}} = V\underline{w} + \lambda\left[(\underline{r} - \underline{1}r_f) - cV\frac{\underline{w}}{\sqrt{\underline{w}^T V \underline{w}}}\right] = \underline{0}. \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = r_f - r_{\min} + \underline{w}^T(\underline{r} - \underline{1}r_f) - c\sqrt{\underline{w}^T V \underline{w}} = 0\,. \tag{4.13}$$

Multipliziert man (4.12) skalar mit $\underline{w}^T$ unter Berücksichtigung von (4.13), so folgt

$$\underline{w}^T V \underline{w} = \lambda(r_f - r_{\min}) > 0\,. \tag{4.14}$$

Zur Abkürzung setze man $d = \sqrt{|r_f - r_{\min}|}$, $\varepsilon_d = \operatorname{sgn}(r_f - r_{\min})$, $\varepsilon_\lambda = \operatorname{sgn}(\lambda)$. Dann gilt

$$\sqrt{\underline{w}^T V \underline{w}} = \sqrt{|\lambda|}\cdot d, \quad \varepsilon_\lambda = \varepsilon_d\,. \tag{4.15}$$

**Tabelle 1**: Optimaler Anteil einer unsicheren Kapitalanlage

| Werte der Parameter | | | | optimaler Anteil | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | deterministisch | stochastisch | |
| $r_f$ | $r_{\min}$ | $r_u$ | $\sigma_u$ | $c = 0$ | $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ | $c = \frac{1}{2}$ |
| 1.05 | 1.04 | 1.03 | 0.01 | 0.5 | 0.417 | 0.4 |
| | | | 0.02 | 0.5 | 0.357 | 0.333 |
| | | 1.04 | 0.01 | 1 | 0.715 | 0.667 |
| | | | 0.02 | 1 | 0.556 | 0.5 |
| 1.05 | 1.06 | 1.06 | 0.01 | 1 | 1.664 | 2 |
| | | | 0.02 | 1 | 4.948 | $1.153 \cdot 10^{15}$ |
| | | 1.07 | 0.01 | 0.5 | 0.625 | 0.667 |
| | | | 0.02 | 0.5 | 0.832 | 1 |
| 1.06 | 1.04 | 1.03 | 0.01 | 0.667 | 0.589 | 0.571 |
| | | | 0.02 | 0.667 | 0.527 | 0.5 |
| | | 1.05 | 0.01 | 2 | 1.43 | 1.333 |
| | | | 0.02 | 2 | 1.112 | 1 |
| 1.06 | 1.05 | 1.04 | 0.01 | 0.5 | 0.417 | 0.4 |
| | | | 0.02 | 0.5 | 0.357 | 0.333 |
| | | 1.05 | 0.01 | 1 | 0.715 | 0.667 |
| | | | 0.02 | 1 | 0.556 | 0.5 |
| 1.06 | 1.07 | 1.07 | 0.01 | 1 | 1.664 | 2 |
| | | | 0.02 | 1 | 4.948 | $1.153 \cdot 10^{15}$ |
| | | 1.08 | 0.01 | 0.5 | 0.625 | 0.667 |
| | | | 0.02 | 0.5 | 0.832 | 1 |

Durch Einsetzen in die obigen Bedingungen erhält man das nicht-lineare Gleichungssystem

$$V\underline{w}(d-\varepsilon_\lambda c\sqrt{|\lambda|})+\lambda d(\underline{r}-\underline{1}r_f)=\underline{0}, \tag{4.16}$$

$$d(\varepsilon_d d-c\sqrt{|\lambda|})+\underline{w}^T(\underline{r}-\underline{1}r_f)=0\,. \tag{4.17}$$

Die Auflösung der ersten Gleichung nach $\underline{w}$ ergibt

$$\underline{w}=\frac{\lambda d}{\varepsilon_\lambda c\sqrt{|\lambda|}-d}\cdot V^{-1}(\underline{r}-\underline{1}r_f). \tag{4.18}$$

Eingesetzt in der zweiten Gleichung folgt eine Bedingung für $\lambda$:

$$d(\varepsilon_d d-c\sqrt{|\lambda|})-\frac{\lambda d}{d-\varepsilon_\lambda c\sqrt{|\lambda|}}\cdot(\underline{r}-\underline{1}r_f)^T V^{-1}(\underline{r}-\underline{1}r_f)=0.$$

Zur Abkürzung setzt man

$$H=(\underline{r}-\underline{1}r_f)^T V^{-1}(\underline{r}-\underline{1}r_f)>0 \tag{4.19}$$

und sieht, dass

$$\varepsilon_d d-c\sqrt{|\lambda|}=\frac{\lambda H}{d-\varepsilon_\lambda c\sqrt{|\lambda|}}. \tag{4.20}$$

oder

$$(d-\varepsilon_d c\sqrt{|\lambda|})^2=|\lambda|H.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung für $\sqrt{|\lambda|}$ liefert die Bedingung

$$\sqrt{|\lambda|}(\varepsilon_d c+\varepsilon\sqrt{H})=d,\quad \varepsilon=\pm1,$$

wonach folgt

$$|\lambda|=\Big(\frac{d}{\varepsilon_d c+\varepsilon\sqrt{H}}\Big)^2,\quad \varepsilon=\pm1\,. \tag{4.21}$$

Andererseits lautet die Portfoliovarianz

$$\sigma^2=\underline{w}^T V\underline{w}=\lambda(r_f-r_{\min})=\Big(\frac{r_f-r_{\min}}{\varepsilon_d c+\varepsilon\sqrt{H}}\Big)^2.$$

Dieser Ausdruck ist minimal für $\varepsilon = 1$, falls $\varepsilon_d = 1$, und für $\varepsilon = -1$, falls $\varepsilon_d = -1$. In beiden Fällen gilt

$$\sigma^2 = \left(\frac{r_f - r_{\min}}{c + \sqrt{H}}\right)^2. \tag{4.22}$$

Mit (4.18) und (4.20) folgt für die Portfoliogewichte

$$\underline{w} = \frac{cd\sqrt{|\lambda|} - \varepsilon_d d^2}{H} \cdot V^{-1}(\underline{r} - \underline{1}r_f).$$

Aber man hat $\varepsilon_d d^2 = r_f - r_{\min}$ und $d\sqrt{|\lambda|} = \sqrt{\lambda(r_f - r_{\min})} = \sigma$. Somit lauten die optimalen Portfoliogewichte für ein *risikoangepasstes Portfolio* oder *abgesichertes Portfolio*:

$$\underline{w} = \frac{r_{\min} + c\sigma - r_f}{H} \cdot V^{-1}(\underline{r} - \underline{1}r_f). \tag{4.23}$$

wobei nach (4.22) gilt

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{r_{\min} - r_f}{c + \sqrt{H}}, & \text{falls } r_{\min} \geq r_f, \\ \dfrac{r_f - r_{\min}}{c + \sqrt{H}}, & \text{falls } r_{\min} \leq r_f. \end{cases} \tag{4.24}$$

Dieses Resultat ist ein risikoangepasstes Analogon der *Markowitz*-Portfolio-Analyse mit einer risikofreien Kapitalanlage (siehe *Huang* und *Litzenberger* [1988], Abschnitt 3.18, S. 76 – 80). Wie in der klassischen Analyse bilden die Grenzportfolios in der $(\sigma, r_{\min})$-Ebene zwei Halbgeraden mit Steigungen $c + \sqrt{H}$ und $-(c + \sqrt{H})$, die vom Punkt $(0, r_f)$ ausgehen. Ein Vergleich mit der klassischen Lösung ist aufschlussreich. Für jedes $c \geq 0$ definiert die Lösung des erweiterten *Markowitz*-Optimierungsproblems ein Portfolio mit Aufzinsungsfaktor $R_c$, der eindeutig bestimmt ist durch (4.23) und (4.24). Für die Erwartungswerte und Varianzen gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} E[R_c] &= r_{\min} + c\sigma \geq r_{\min} = E[R_0], \qquad (4.25) \\ \mathrm{Var}[R_c] &= \left(\frac{r_f - r_{\min}}{c + \sqrt{H}}\right)^2 \leq \frac{(r_f - r_{\min})^2}{H} = \mathrm{Var}[R_0]. \end{aligned}$$

In Verallgemeinerung zum Fall $N = 1$ liefern die risikoangepassten Portfolios, im Rahmen von Erwartungswert/Varianz-Analyse, die höheren erwarteten Renditen bei kleinerer Varianz. Noch überraschender ist folgende Beobachtung. Mit wachsendem $c$ steigt der erwartete Ertrag mit fallender Varianz, d.h. für $c > c'$ gilt

$$E[R_c] > E[R_{c'}], \quad \mathrm{Var}[R_c] < \mathrm{Var}[R_{c'}]. \tag{4.26}$$

Im Grenzfall $R_\infty = \lim\limits_{c\to\infty} R_c$ erhält man

$$E[R_\infty] = r_{\min} + |r_f - r_{\min}|, \quad \mathrm{Var}[R_\infty] = 0\,. \tag{4.27}$$

Mit Hilfe der Ungleichung von *Tschebyschev* zeigt man, dass die Zufallsvariablen $R_c$ für $c \to \infty$ gegen den Erwartungswert $E[R_\infty]$ *stochastisch konvergieren*. Dies bedeutet, dass zu jedem $\varepsilon, \delta > 0$ ein $N = N(\varepsilon, \delta)$ existiert mit der Eigenschaft

$$Pr(\big|R_n - r_{\min} - |r_f - r_{\min}|\big| > \varepsilon) < \delta\,, \qquad \text{für alle} \quad n > N\,.$$

Damit ist eine *absolute Grenze* für den Ertrag eines abgesicherten Portfolios mit $c \geq 0$ aufgezeigt. In der Praxis ist diese Grenze natürlich nicht erreichbar, da die Portfoliogewichte $\underline{w}$ Restriktionen über das maximal investierte Kapital unterworfen sind. Als illustratives Beispiel dient der explodierende stochastische Anteil in Tabelle 1. In praktischen Anwendungen dieser Ergebnisse ist ein nicht-lineares Optimierungsproblem mit linearen Ungleichungen und einer nicht-linearen Gleichung zu lösen. Solche Probleme werden mit Hilfe von Operations Research Methoden numerisch gelöst. Es bleibt zu prüfen, wie gut das *realistisch abgesicherte Portfolio* $c = 1/\sqrt{2\pi}$ und das *verteilungsfreie beste abgesicherte Portfolio* $c = \frac{1}{2}$ wirklich abschneiden, falls man den Absicherungsprozess berücksichtigt. Nach Abschnitt 1 und nach Konstruktion gilt für die Aufzinsung eines abgesicherten Portfolios mit beliebigem $c \geq 0$ die Zerlegung

$$\begin{aligned} R_c &= R_c^e + R_c^a\,, \\ R_c^e &= r_{\min} + (R_c - E[R_c])_+\,, \\ R_c^a &= c\cdot\sigma - (E[R_c] - R_c)_+\,. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Dabei stellt $R_c^a$ den *Absicherungsprozess* dar, der um so sicherer ist, je grösser $c$ gewählt wird. Im klassischen Modell ist $c = 0$ und die Minimalrendite $r_{\min}$ ist überhaupt nicht abgesichert, da in diesem Fall $R_c^a \leq 0$. Die Wahl $c = \frac{1}{2}$ stellt den *verteilungsfreien besten Absicherungsprozess* dar, in dem Sinne, dass er im Erwartungswert die allfälligen Renditeverluste auf jeden Fall aufzufangen vermag. Aufgrund der früheren Diskussion ergibt $c = 1/\sqrt{2\pi}$ einen *realistischen Absicherungsprozess*. Die Variable $R_c^e$ stellt den *effektiven* oder *realisierten Aufzinsungsprozess* dar. Nach *Benktander* [1977] ist die *erwartete effektive Aufzinsung* approximativ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
E[R_c^e] &= r_{\min} + E[(R_c - E[R_c])_+] \\
&\approx r_{\min} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|r_f - r_{\min}|}{c + \sqrt{H}},
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

wobei $c = 1/\sqrt{2\pi}$ für das realistisch und $c = \frac{1}{2}$ für das verteilungsfreie beste abgesicherte Portfolio einzusetzen ist. Die zugehörige Schwankung wird unter Annahme einer Normalverteilung gemessen durch

$$
\mathrm{Var}[R_c^e] = \mathrm{Var}[(R_c - E[R_c])_+] = \frac{1}{2}\left(\frac{r_f - r_{\min}}{c + \sqrt{H}}\right)^2. \tag{4.30}
$$

**Beispiel 2.** Das Beispiel 1 wird unter Hinzufügung einer weiteren unsicheren Anlage fortgesetzt. In diesem Fall ist $N = 2$ und es bezeichne $\varrho$ der Korrelationskoeffizient zwischen den risikobehafteten Anlagen 1 und 2. Dann gilt $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \varrho\sigma_1\sigma_2$. Die benötigten Berechnungen können mit einem Taschenrechner durchgeführt werden. Die Formel (4.19) lautet in diesem Spezialfall:

$$
H = \frac{1}{1-\varrho^2}\left(\frac{r_1 - r_f}{\sigma_1} - \varrho\,\frac{r_2 - r_f}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{r_2 - r_f}{\sigma_2}\right)^2. \tag{4.31}
$$

In Abhängigkeit vom Parameter $c$ werden die *optimalen risikoangepassten Anteile* laut (4.23) ermittelt:

$$
\underline{w} = \underline{w}(c) = \frac{\mu(c) - r_f}{1 - \varrho^2}\,H \cdot \begin{pmatrix} \frac{r_1 - r_f}{\sigma_1^2} - \varrho\,\frac{r_2 - r_f}{\sigma_1\,\sigma_2} \\ \frac{r_2 - r_f}{\sigma_2^2} - \varrho\,\frac{r_1 - r_f}{\sigma_1\,\sigma_2} \end{pmatrix} \tag{4.32}
$$

wobei

$$
\mu(c) = r_{\min} + c \cdot \frac{|r_f - r_{\min}|}{c + \sqrt{H}} \tag{4.33}
$$

der Erwartungswert des akkumulierten Renditeprozesses ist.

**Tabelle 2:** Optimale Portfolios: Absicherung vs. *Markowitz*

| Fall | Parameterwahl | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $r_f$ | $r_{\min}$ | $r_1$ | $r_2$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\varrho$ |
| a) | 1.05 | 1.04 | 1.03 | 1.06 | 0.01 | 0.02 | − 0.5 |
| b) | 1.055 | 1.06 | 1.06 | 1.07 | 0.01 | 0.02 | − 0.9 |
| c) | 1.06 | 1.08 | 1.07 | 1.08 | 0.08 | 0.15 | 0.9 |
| d) | 1.07 | 1.075 | 1.075 | 1.08 | 0.01 | 0.02 | 0.5 |
| e) | 1.08 | 1.05 | 1.06 | 1.08 | 0.01 | 0.02 | − 0.5 |

| | optimale risikoangepasste Anteile | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c = 0$ | | $c = 1/\sqrt{2\pi}$ | | $c = \frac{1}{2}$ | |
| | $w_1$ | $w_2$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_1$ | $w_2$ |
| a) | 0.538 | 0.077 | 0.452 | 0.065 | 0.434 | 0.062 |
| b) | 0.395 | 0.202 | 0.444 | 0.227 | 0.455 | 0.232 |
| c) | 0.367 | 0.816 | 0.642 | 1.428 | 0.657 | 1.460 |
| d) | 0.500 | 0.250 | 0.704 | 0.352 | 0.732 | 0.366 |
| e) | 1.500 | 0.094 | 1.279 | 0.080 | 1.233 | 0.077 |

| | Renditeprozesse im Vergleich | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c = 0$ | | $c = 1/\sqrt{2\pi}$ | | $c = \frac{1}{2}$ | |
| | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ |
| a) | 1.0400 | 0.00480 | 1.0416 | 0.00403 | 1.0419 | 0.00387 |
| b) | 1.0600 | 0.00179 | 1.0606 | 0.00156 | 1.0608 | 0.00152 |
| c) | 1.0800 | 0.14945 | 1.0950 | 0.03754 | 1.0958 | 0.03155 |
| d) | 1.0750 | 0.00866 | 1.0770 | 0.00512 | 1.0773 | 0.00464 |
| e) | 1.0500 | 0.01299 | 1.0544 | 0.01107 | 1.0553 | 0.01068 |

## 5. Absicherung, falls eine risikofreie Anlage nicht verfügbar ist

Möchte man in einer unsicheren ökonomischen Umgebung mit $N \geq 2$ risikobehafteten Anlagen ohne risikofreie Investitionsmöglichkeit die Minimalrendite $r_{\min}$ eines Portfolios absichern, so ist analog zu Abschnitt 4 das folgende *Optimierungsproblem* zu lösen:

$$\min\left\{\frac{1}{2}\underline{w}^T V \underline{w}\right\} \tag{5.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\underline{w}^T \cdot \underline{r} = r_{\min} + c \cdot \sqrt{\underline{w}^T V \underline{w}}, \quad \underline{w}^T \cdot \underline{1} = 1\,.$$

Die *Lagrange*-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\underline{w}^T V \underline{w} + \lambda(r_{\min} + c\sqrt{\underline{w}^T V \underline{w}} - \underline{w}^T \cdot \underline{r}) + \gamma(1 - \underline{w}^T \underline{1}) \tag{5.2}$$

führt auf das folgende Gleichungssystem

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{w}} = V\underline{w} - \lambda\Big(\underline{r} - c \cdot \frac{V\underline{w}}{\sqrt{\underline{w}^T V \underline{w}}}\Big) - \gamma \underline{1} = \underline{0}\,. \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = r_{\min} + c \cdot \sqrt{\underline{w}^T V \underline{w}} - \underline{w}^T \cdot \underline{r} = 0\,, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - \underline{w}^T \cdot \underline{1} = 0\,. \tag{5.5}$$

Multipliziert man (5.3) skalar mit $\underline{w}^T$ und berücksichtigt dabei die Nebenbedingungen (5.4) und (5.5), so erhält man

$$\underline{w}^T V \underline{w} = \lambda r_{\min} + \gamma > 0\,. \tag{5.6}$$

Das Einsetzen in (5.3) und die Auflösung nach $\underline{w}$ ergibt

$$\underline{w} = (1 + \lambda c / \sqrt{\lambda r_{\min} + \gamma})^{-1} \cdot [\lambda(V^{-1}\underline{r}) + \gamma(V^{-1}\underline{1})]\,. \tag{5.7}$$

Setzt man diesen Ausdruck in den Nebenbedingungen ein, so folgt das nicht-lineare Gleichungssystem für $\lambda$ und $\gamma$:

$$\lambda(\underline{r}^T V^{-1}\underline{r}) + \gamma(\underline{1}^T V^{-1}\underline{r}) = \Big(1 + \frac{\lambda c}{\sqrt{\lambda r_{\min} + \gamma}}\Big)(r_{\min} + c \cdot \sqrt{\lambda r_{\min} + \gamma})\,, \tag{5.8}$$

$$\lambda(\underline{r}^T V^{-1}\underline{1}) + \gamma(\underline{1}^T V^{-1}\underline{1}) = \Big(1 + \frac{\lambda c}{\sqrt{\lambda r_{\min} + \gamma}}\Big)\,. \tag{5.9}$$

Mit den Abkürzungen

$$A = \underline{1}^T V^{-1} \underline{r} = \underline{r}^T V^{-1} \underline{1}, \quad B = \underline{r}^T V^{-1} \underline{r}, \quad C = \underline{1}^T V^{-1} \underline{1}, \tag{5.10}$$

erhält man weiter

$$B\lambda + A\gamma = \Big(1 + \frac{\lambda c}{\sqrt{\lambda r_{\min} + \gamma}}\Big) r_{\min} + c \cdot \sqrt{\lambda r_{\min} + \gamma} + \lambda c^2 . \tag{5.11}$$

$$A\lambda + C\gamma = 1 + \frac{\lambda c}{\sqrt{\lambda r_{\min} + \gamma}} . \tag{5.12}$$

Die Elimination des Ausdrucks $1 + \lambda c / \sqrt{\lambda r_{\min} + \gamma}$ liefert die quadratischen Gleichungen

$$[a\lambda + b\gamma]^2 = c^2 (\lambda r_{\min} + \gamma) , \tag{5.13}$$

$$[a\lambda + b\gamma][A\lambda + C\gamma - 1] = c^2 \lambda , \tag{5.14}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wird

$$a = B - A r_{\min} - c^2, \quad b = A - C r_{\min} . \tag{5.15}$$

Die Lösung dieses Systems geht über die lineare Transformation

$$x = a\lambda + b\gamma, \quad y = A\lambda + C\gamma - 1 \tag{5.16}$$

Aufgelöst nach $\lambda$ und $\gamma$ erhält man:

$$\lambda = \frac{b + by - Cx}{D}, \quad \gamma = \frac{Ax - ay - a}{D} , \tag{5.17}$$

wobei $D = Ab - Ca$ . Damit hat man das äquivalente System

$$D \cdot x^2 - D \cdot r_{\min} \cdot xy = A \cdot c^2 \cdot x - a \cdot c^2 \cdot (y + 1) , \tag{5.18}$$

$$D \cdot xy = \; - C \cdot c^2 \cdot x + b \cdot c^2 \cdot (y + 1) . \tag{5.19}$$

Die Elimination des Terms in $(y + 1)$ liefert die lineare Bedingung

$$b \cdot x + (a - b \cdot r_{\min}) \cdot y = c^2 , \tag{5.20}$$

wobei angenommen wird, dass $x \neq 0$ und $D \neq 0$. Dann eliminiert man den Term mit $xy$ und erhält unter Berücksichtigung von (5.20) die quadratische Gleichung

$$D \cdot x^2 - 2 \cdot b \cdot c^2 \cdot x + c^2 \cdot [c^2 + a - b \cdot r_{\min}] = 0.$$

Damit wurde gezeigt, wie man das Optimierungsproblem zur Konstruktion eines *abgesicherten Portfolios* von *nur* risikobehafteten Anlagen lösen kann.
Der aufgezeigte mathematische Weg in den Abschnitten 4 und 5 hinterlässt dem Theoretiker und Praktiker manche Details und Schwierigkeiten, die vorerst überwunden werden müssen. Als Anregung sollen folgende Punkte hervorgehoben werden:

(a) Für die Anwendungen wird $c = 1/\sqrt{2\pi}$ oder $c = \frac{1}{2}$ suggeriert. Führen diese Werte zu irgendwelchen pathologischen Beispielen? Angenommen $c$ variiert auf der positiven reellen Achse. Konvergieren dann die entsprechenden zufälligen Renditen stochastisch gegen einen Grenzwert wie in Abschnitt 4?

(b) Trotz Absicherung und Optimierung bleiben beträchtliche Restrisiken übrig. Laut Abschnitt 1 wird die Rendite eines optimal abgesicherten Portfolios in zwei Komponenten zerlegt: die effektive oder realisierte Rendite und die Rendite des Absicherungsprozesses. Beide Komponenten sind Schwankungen unterworfen und definieren deshalb Restrisiken, die durch die entsprechenden Varianzen gemessen werden. Eine nähere Analyse der Zusammensetzung dieser Risiken ist erwünscht. In Abschnitt 4 gibt Gleichung (4.25) Auskunft über das Gesamtrisiko und (4.30) beschreibt die Risikokomponente der effektiven Rendite in einem Spezialfall.

(c) Weiterführende Restriktionen über die Portfoliogewichte, die eine zusätzliche Diversifikation erzwingen, erfordern, wie in Abschnitt 4, den Einsatz von Methoden der Operations Research.

## 6. Absicherung und Gleichgewichtsmodelle für Aktiven

Seit der Einführung des CAPM (= capital asset pricing model) durch *Sharpe* und *Lintner* [1963/65] hat sich die moderne Portfoliotheorie als unerlässliches Werkzeug der Finanzökonomie erwiesen. Das ursprünglich überaus einfache Modell findet trotz berechtigten Mängeln Anwendung in der täglichen Finanzpraxis (vergleiche z.B. *Harrington* [1987]). Im theoretischen Sinn hat das Modell bedeutende Weiterentwicklungen und Verallgemeinerungen erfahren (vergleiche z.B. *Ingersoll*

[1987]). Ohne auf die neuesten Entwicklungen einzugehen, wird gezeigt, welchen Einfluss die Absicherung auf Gleichgewichtsmodelle ausübt. Es sind verschiedene alternative Modelle denkbar, die vom Anwendungsziel abhängen. Wir begnügen uns mit der Behandlung eines einzigen Modells.
Unsere Analyse beschränkt sich auf das klassische CAPM. Vorhanden ist eine risikofreie Anlage, deren zufälliger Aufzinsungsfaktor $R_f$ den Erwartungswert $r_f$ besitzt. Weiter gibt es $N$ verschiedene risikobehaftete Anlagemöglichkeiten mit akkumulierten zufälligen Renditen $R_i$ mit Erwartungswerten $r_i$, $i = 1, \ldots, N$. Die akkumulierte Rendite des Finanzmarktes sei beschrieben durch die Zufallsvariable $R_M$ mit Erwartungswert $r_M$. Es sollen minimale akkumulierte Renditen $r_i^{\min} \leq r_i$, $i = 1, \ldots, N$, und $r_M^{\min} \leq r_M$ abgesichert werden. Die Ansichten oder Erwartungen über den möglichen zukünftigen Verlauf dieser Minimalrenditen sind im allgemeinen verschieden. Wir nehmen an, dass die Ansichten der Anleger über die akkumulierten minimalen Renditen durch Zufallsvariablen $R_i^{\min}$, $i = 1, \ldots, N$, und $R_M^{\min}$ beschrieben sind. Im CAPM von *Sharpe/Lintner* setzt man voraus, dass erste und zweite Momente dieser Zufallsvariablen für alle Investoren gleich sind. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass jeder Investor ein effizientes Portfolio auswählt. Eine detaillierte Beschreibung und Diskussion der benötigten Modellannahmen findet man in *Harrington* [1987], Kap. 2. Das CAPM liefert folgende lineare Beziehung

$$
\begin{aligned}
r_i^{\min} - r_f &= (r_M^{\min} - r_f)\beta_i^{\min}, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad (6.1)\\
\beta_i^{\min} &= \frac{\operatorname{Cov}[R_i^{\min}, R_M^{\min}]}{\operatorname{Var}[R_M^{\min}]} \quad \text{der } \textbf{Beta-Faktor}.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun das gesamte Marktangebot, das durch das Marktportfolio beschrieben wird. Es sei $W_f$ das in der risikofreien Anlage investierte Kapital und $W_i$ das in der risikobehafteten Anlage $i$ investierte Kapital, $i = 1, \ldots, N$. Das gesamte investierte Kapital ist somit $W = W_f + \sum W_i$. Das Marktportfolio, das alle Anlagen im Verhältnis zu ihren Marktwerten hält, wird durch folgenden Vektor von Portfoliogewichten beschrieben:

$$
\begin{aligned}
\underline{w}^M &= (w_f^M, w_1^M, \ldots, w_N^M), \qquad (6.2)\\
w_f^M &= \frac{W_f}{W}, \quad w_i^M = \frac{W_i}{W}, \qquad i = 1, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Wir treffen noch folgende

**Annahme:** (6.3)

Marktangebot für die risikofreie Anlage verschwindet, d.h. $w_f^M = 0$.

Dann gelten folgende *Budgetgleichungen*

$$\begin{aligned}\sum w_i^M &= 1\,,\\ r_M^{\min} &= \sum w_i^M r_i^{\min}\,,\\ r_M &= \sum w_i^M r_i\,.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Um die Minimalrendite $r_M^{\min}$ abzusichern, ist nach Abschnitt 1 eine "Risikoprämie" $b_M$ im Absicherungsprozess zu reservieren. Dies wird durch einen höheren Erwartungswert der Marktrendite belohnt, und zwar laut Gleichung (1.13):

$$r_M = r_M^{\min} + E[(R_M - r_M^{\min} - b_M)_+]\,. \tag{6.5}$$

Wie in den Abschnitten 3 und 4 setzt man zur Vereinfachung

$$b_M = r_M - r_M^{\min} = E[(R_M - r_M)_+]\,. \tag{6.6}$$

Wie hoch sollen nun die "Risikoprämien" $b_i = r_i - r_i^{\min}$ zur Absicherung der Minimalrenditen der einzelnen Anlagen sein? Durch Subtraktion der Budgetgleichungen für $r_M$ und $r_M^{\min}$ folgt die Beziehung

$$b_M = \sum w_i^M b_i\,. \tag{6.7}$$

Um diese Gleichung zu erfüllen,setzt man unter Berücksichtigung der Annahme (6.3) nun am einfachsten $b_i = b_M$, $i = 1, \ldots, N$. Dies bedeutet, dass der Preis für eine abgesicherte Minimalrendite unabhängig von der gewählten risikobehafteten Anlage ist. Damit gelten insgesamt die Beziehungen

$$\begin{aligned} r_M^{\min} &= r_M - E[(R_M - r_M)_+]\,,\\ r_i^{\min} &= r_i - E[(R_M - r_M)_+], \quad i = 1, \ldots, N\,.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Setzt man diese Beziehungen im CAPM (6.1) ein, so erhält man nach Umformung das folgende "*risikoangepasste*" *CAPM*:

$$r_i = (1-\beta_i^{\min})\cdot(r_f + E[(R_M - r_M)_+] + \beta_i^{\min}\cdot R_M, \quad i = 1, \ldots, N\,. \tag{6.9}$$

Die Form dieser Gleichung erinnert an die Version des CAPM von *Black* [1972]. In der Literatur ist keine Erklärung für jenes Modell bekannt (vergleiche *Harrington* [1987], S. 38, und S. 61). Diese Gleichung suggeriert folgende Identifikation:

$$\begin{aligned} E[R_i] &= (1-\beta_i^{\min})E[R_z] + \beta_i^{\min}\cdot E[R_M], \quad i = 1, \ldots, N\,,\\ R_z &= R_f + (R_M - r_M)_+\,.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Dabei spielt die Variable $R_z$ die Rolle der sogenannten "Null-Beta-akkumulierte Anlagerendite" in der *Black*schen Version des CAPM, ohne mit dieser notwendigerweise identisch zu sein. Um Widersprüche und Missverständnisse zu vermeiden, ist es wichtig folgenden Modellunterschied hervorzuheben. Das klassische CAPM (6.1) ist ein "*Erwartungsmodell*", das die Ansichten der Anleger über das Marktgeschehen modelliert (auch wenn die Renditen nicht als minimal interpretiert werden). Das Modell (6.9) ist ein gemischtes Modell, das *reale* Elemente mit *Ansichten* verbindet. Die realen Elemente sind die akkumulierten Renditen $R_i$, $R_M$, $R_f$, und die Erwartungen $r_i$, $r_M$, $r_f$. Das Ansichtselement ist der Beta-Faktor $\beta_i^{\min}$. Diese Unterscheidung ist für korrekte statistische Tests und praktische Anwendungen dieser Modelle äusserst fundamental (vergleiche z.B. *Harrington* [1987], S. 27, S. 56, und S. 75). Aus diesem Grund ist (6.9) als theoretische Konstruktion anzusehen. Wie im klassischen CAPM wird man in der Praxis annehmen, dass $\mathrm{Cov}[R_i^{\min}, R_M^{\min}] = \mathrm{Cov}[R_i, R_M]$, d.h. auch $\beta_i^{\min} = \beta_i = \mathrm{Cov}[R_i, R_M]/\,\mathrm{Var}[R_M]$. Diese Bedingung ist zum Beispiel dann erfüllt, falls man die Renditeerwartungen der Anleger mit den realen Renditen wie folgt verknüpft:

$$\textbf{Annahme}: \quad \begin{aligned} R_i^{\min} &= R_i - b_i = R_i - b_M, \quad i = 1, \ldots, N, \\ R_M^{\min} &= R_M - b_M . \end{aligned} \tag{6.11}$$

Weitere praktische Erfahrungen über die Identifikation und die Messung der benötigten Variablen findet man in *Harrington* [1987].
In diesem Zusammenhang ist es interessant, das Modell (6.9) weiter zu vereinfachen. Nimmt man an, wie in Abschnitt 4, dass die "spezielle" Stop-Loss-Prämie in (6.9) proportional zur Standardabweichung angesetzt werden kann, also

$$E[(R_M - r_M)_+] = c \cdot \sigma_M, \quad c \geq 0, \tag{6.12}$$

so folgt die Beziehung

$$r_i = r_f + c \cdot \sigma_M + (r_M - r_f - c \cdot \sigma_M)\beta_i^{\min}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{6.13}$$

Der Spezialfall $c = 1/\sqrt{2\pi}$ ergibt eine *"realistische" lineare Marktlinie* in der $(\beta_i^{\min}, r_i)$-Ebene. Insbesondere sind die Formeln für multinormalverteilte Renditen exakt. Im Falle $c = 0$ und $\beta_i^{\min} = \beta_i$ erhält man das klassische CAPM als Spezialfall zurück.
In verschiedenen empirischen Untersuchungen seit Bestehen von CAPM sind substantielle Abweichungen der linearen Marktlinie von beobachteten Marktlinien aufgezeigt worden (wohlbekannt ist z.B. die Studie *Black*, *Jensen* und *Scholes* [1972]).

**Tabelle 3:** CAPM vs. risikoangepasstes CAPM

| Titel | Beta-Faktor | Prognose des erwarteten Gewinns $r_i - r_f$ | |
|---|---|---|---|
| | | CAPM | risikoangepasstes CAPM |
| 1 | 1.05 | 0.10500 | 0.10263 |
| 2 | 1.05 | 0.10500 | 0.10263 |
| 3 | 0.96 | 0.09600 | 0.09790 |
| 4 | 1.04 | 0.10400 | 0.10210 |
| 5 | 1.00 | 0.10000 | 0.10000 |
| 6 | 1.18 | 0.11800 | 0.10945 |
| 7 | 0.95 | 0.09500 | 0.09737 |
| 8 | 1.16 | 0.11600 | 0.10840 |
| 9 | 1.27 | 0.12700 | 0.11418 |
| 10 | 0.89 | 0.08900 | 0.09422 |
| 11 | 1.25 | 0.12500 | 0.11313 |
| 12 | 1.17 | 0.11700 | 0.10893 |
| 13 | 1.00 | 0.10000 | 0.10000 |
| 14 | 1.02 | 0.10200 | 0.10105 |
| 15 | 0.61 | 0.06100 | 0.07952 |
| 16 | 0.86 | 0.08600 | 0.09265 |
| 17 | 0.90 | 0.09000 | 0.09475 |
| 18 | 0.96 | 0.09600 | 0.09790 |
| 19 | 0.82 | 0.08200 | 0.09055 |
| 20 | 1.21 | 0.12100 | 0.11103 |
| 21 | 1.15 | 0.11500 | 0.10788 |
| 22 | 1.52 | 0.15200 | 0.12731 |
| 23 | 0.39 | 0.03900 | 0.06797 |
| 24 | 1.05 | 0.10500 | 0.10263 |
| 25 | 0.64 | 0.06400 | 0.08109 |
| 26 | 1.18 | 0.11800 | 0.10945 |
| 27 | 1.30 | 0.13000 | 0.11575 |
| 28 | 1.19 | 0.11900 | 0.10998 |
| 29 | 1.44 | 0.14400 | 0.12311 |
| 30 | 1.49 | 0.14900 | 0.12573 |

Ob der Ansatz dieser Arbeit hilft, dieses Phänomen zu erklären? Die Strukturen (6.9) und (6.13) liegen im Trend der vorgeschlagenen Modellerweiterungen. Nach *Harrington* [1987], Kap. 2, insbesondere S. 47, besitzen jene Modelle eines der folgenden Merkmale:

1. Die Ordinate in der $(\beta_i, r_i)$-Ebene ist grösser als die risikofreie Aufzinsung $r_f$ und die Steigung der Marktlinie ist kleiner als $r_M - r_f$.
2. Es ist eine Vielfachheit an Marktlinien vorhanden.

Diese Modelle (6.9) und (6.13) erfüllen offensichtlich das erste Merkmal und sollten aus diesem Grund näher an der empirischen Marktlinie liegen.

**Beispiel 3.** Der praktische Nutzen des Modells (6.13) kann anhand jeder Tabelle von berechneten Beta-Faktoren und Volatilitäten für Aktienindices in Finanzzeitschriften überprüft werden. Zur Illustration dient der interessante Artikel "Volatilität – das unbekannte Wesen", erschienen in "Das Wertpapier", Heft 14, Juni 1989. Die Tabelle 3 enthält eine mögliche Renditeprognose aufgrund der Kennzahlen der $N = 30$ DAX-Werte, die durch die Frankfurter Börse Tag für Tag errechnet werden. Die Annahme $r_f = 1.05$, $r_M = 1.15$ dient lediglich der Illustration und kann in diesem Beispiel nicht begründet werden. Wir setzen $c = 0$ bzw. $c = 1/\sqrt{2\pi}$ in (6.12) und berechnen die Standardabweichung der Marktrendite aus der historischen Volatilität $v_M = \sqrt{\mathrm{Var}[\ln(R_M)]} = 0.113$ mit Hilfe der Transformationsformel

$$\sigma_M = \sqrt{\mathrm{Var}[R_M]} = r_f \cdot \sqrt{\exp(v_M^2) - 1}\,, \tag{6.14}$$

die zum Beispiel durch Annahme einer log-normalen Verteilung und das Nicht-Arbitrage Argument begründet wird. Die charakteristischen Werte der Marktlinie lauten im Vergleich:

| | CAPM | risikoangepasstes CAPM |
|---|---|---|
| Ordinate | 1.05 | 1.09508 |
| Steigung | 0.1 | 0.05492 |

Die Titel Nr. 22 bzw. 23 mit dem grössten bzw. kleinsten Beta-Faktor lassen in beiden Modellen den höchsten bzw. kleinsten Gewinn erwarten. Die absolute Differenz in der (prognostizierten) erwarteten Performance ist jedoch nicht vernachlässigbar und beträgt 2.5% bzw. 2.9%.

Werner Hürlimann
Allgemeine Mathematik
Winterthur-Leben
Römerstrasse 17
8401 Winterthur

## Literaturverzeichnis

*Beard, R.E., Pentikäinen, T., Pesonen, E.* (1984): Risk Theory, the stochastic basis of insurance, 3rd edition. Chapman and Hall.

*Benktander, G.* (1977): On the rating of a special stop-loss cover. ASTIN Bulletin 9, 33 – 41.

*Black, F.* (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. Journal of Business, 445 – 55.

*Black, F., Jensen, M.C., Scholes, M.* (1972): The capital asset pricing model: some empirical tests, reprinted in *Jensen, M.C.* (1972), editor. Studies in the Theory of Capital Market. Praeger, New York, 79 – 124.

*Black, F., Scholes, M.* (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81, 637 – 659. Nachdruck in *Bicksler, J.L., Samuelson, P.A.* (1974): Investment Portfolio Decision-Making, Lexington.

*Bowers, N.L.* (1969): An upper bound for the net stop-loss premium. Transactions of the Society of Actuaries XIX, 211 – 216.

*Harrington, D.R.* (1987): Modern Portfolio Theory, the Capital Asset Pricing Model and Arbitrage Pricing Theory: a User's Guide, 2nd edition. Prentice-Hall.

*Huang, C., Litzenberger, R.H.* (1988): Foundations for Financial Economics. Elsevier Science Publishing Co.

*Hürlimann, W.* (1990): Sur la couverture du risque financier dans l'actuariat. XXII[e] Colloque ASTIN, Montreux.

*Hürlimann, W.* (1991a): A stochastic dynamic valuation model for investment risks. Proceedings 2nd AFIR Colloquium, Brighton, vol. 3, 131 – 143.

*Hürlimann, W.* (1991b): Stochastic Tariffing in Life Insurance. Proceedings International Colloquium "Life, disability and pensions: tomorrow's challenge", Paris, April 1991.

*Ingersoll, J.E., Jr.* (1987): Theory of Financial Decision Making. Rowman and Littlefield Publishers

*Kozik, T.J.* (1991): Another proof that the proper rate for discounting insurance loss reserves is less than the risk free rate. Proceedings 2nd AFIR Colloquium, vol. 3, 145 – 157.

*Lintner, J.* (1965): The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. Review of Economics and Statistics 47, 13 – 37.

*Macdonald, A.S.* (1991): On investment strategies using the Wilkie model. Proceedings 2nd AFIR Colloquium, Brighton, vol. 3, 413 – 427.

*Markowitz, H.* (1952): Portfolio Selection. The Journal of Finance, 77 – 91.

*Markowitz, H.* (1959): Portfolio Selection - Efficient Diversification of Investments, John Wiley.

*Sharpe, W.F.* (1963): A simplified model for portfolio analysis. Management Science 9, 277 – 293.

*Sharpe, W.F.* (1964): Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance 19. 425 – 442.

*Sharpe W.F.* (1985): Investments. Prentice-Hall International, 3. Auflage.

*Wilkie, D.* (1991). Whither AFIR? Editorial. ASTIN Bulletin 21, 1 – 3.

## Zusammenfassung

Ein Absicherungsmodell für Anlagerisiken wird mit Hilfe aktuarieller Techniken hergeleitet. Es zerlegt den Anlageprozess in einen Absicherungsprozess und einen Prozess, der eine realisierte Rendite definiert. Im Rahmen der Optionspreistheorie wird gezeigt, wie der "faire" Preis der Absicherung zu bestimmen ist. Weiter wird eine aktuarielle und eine finanzökonomische Methode vorgestellt, um den geeigneten Zinsfuss zur Diskontierung der Passiven zu ermitteln. Anschliessend wird eine Integration des Absicherungsmodells in die Portfoliotheorie von *Markowitz* vorgestellt. Insbesondere werden abgesicherte Portfolios konstruiert, die eine höhere erwartete Rendite bei kleinerer Varianz als die herkömmlichen klassischen effizienten Portfolios aufweisen. Schliesslich wird noch ein "risikoangepasstes" CAPM konstruiert, das eine lineare Marktlinie besitzt, die an die *Black*sche Version des CAPM erinnert.

## Résumé

Un modèle de couverture des risques de placement est défini à l'aide de techniques actuarielles. Il décompose le processus de placement en un processus de couverture et un processus qui définit une notion de rendement réalisé. Dans le cadre de la théorie du prix des options on montre comment on peut déterminer le prix "correct" pour une couverture sans "arbitrage". De plus nous présentons deux méthodes, l'une actuarielle et l'autre économique financière, pour évaluer le taux d'escompte appropié pour les passifs. Ensuite nous intégrons le modèle de couverture dans la théorie des portefeuilles de *Markowitz*. En particulier des portefeuilles protégés contre le risque sont construits et présentent un rendement espéré plus élevé pour un écart-type réduit par rapport aux portefeuilles efficients classiques. Finalement nous construisons un CAPM "ajusté pour le risque" possédant une ligne de marché linéaire, qui rappelle la version de *Black* du CAPM.

## Summary

A model to cover investment risks is derived using actuarial techniques. It decomposes the investment process into a covering process and a process which defines a notion of realized yield. In the context of option pricing theory it is shown how to determine the "fair" price for covering. Further, an actuarial and a financial economic method to evaluate the appropriate rate for discounting liabilities is presented. Then the covering model is integrated into *Markowitz* portfolio theory. In particular, covered portfolios are constructed which show a higher expected yield for a lower variance than classical efficient portfolios. Finally, a "risk adjusted" CAPM is constructed with a linear market line which recalls the *Black* CAPM.