Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1991)

Heft: 1

Artikel: Über das Unendliche

Autor: Loeffel, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967275

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

Hans Loeffel, St. Gallen

Über das Unendliche[1]

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.
Georg Cantor

Einleitung

Der an praktischen Problemen der Versicherungsmathematik interessierte Aktuar wird in seiner täglichen Arbeit ganz selten mit dem Begriff des Unendlichen konfrontiert. Sobald er aber die aktuelle Literatur über Versicherungsmathematik konsultiert, sei es im Leben oder Nicht-Leben-Bereich, werden ihm Symbole wie dx, $\int$ und ∞ begegnen. Er wird sich aber kaum bewusst, welche Kontroversen diese Begriffe im Laufe der Geschichte ausgelöst haben. Im Bereiche der reinen Mathematik stehen Unendlichkeitsprozesse in vielen Variationen im Mittelpunkt des Geschehens, und man könnte wohl ohne Übertreibung einen wesentlichen Teil der Mathematik als Lehre vom Unendlichen bezeichnen.
Aber auch ausserhalb der Mathematik etwa in der Physik, Astronomie, Kosmologie, Philosophie, Theologie und sogar in der Kunst stösst man im Kern der Sache immer wieder auf Fragen des Unendlichen. Wenn ich über meine ganz persönlichen Begegnungen mit dem Unendlichen berichten darf, so sind es deren drei, die herausragen. Neben der "naiven" Frage nach der Möglichkeit des Weiterzählens bis ins Unendliche haben der Grenzwertbegriff einer Zahlenfolge und die Differentialgrösse dx bei mir Bewunderung und Verunsicherung gleichermassen hervorgerufen.

Begegnung mit dem Unendlichen im Laufe der Geschichte

David Hilbert hat sich 1925 in einem Vortrag [1] wie folgt geäussert: "Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* des

[1] Überarbeitete Fassung eines Vortrages, gehalten an der Mitgliederversammlung der Schweizerischen Vereinigung der Versicherungsmathematiker vom 8. September 1990 in Bern.

Menschen bewegt, das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der Aufklärung bedürftig."
Es ist bemerkenswert, dass gerade Hilbert, der Vater der streng axiomatischen, formalistischen Methode die Meinung vertritt, dass die Begriffsklärung im Bereiche des Unendlichen weit über rein fachwissenschaftliche Fragen hinausreiche. Im folgenden werden einige historische Begebenheiten erwähnt, die mit dem Unendlichen in Bezug stehen.
Die Lehre der *Pythagoreer* (um 550 v.Chr.) basierte auf dem Begriff der natürlichen Zahl. Das Unendliche, das ihnen in Form der Irrationalität von $\sqrt{2}$ (Diagonale des Einheitsquadrates) begegnete, rief grosse Unsicherheit hervor.
Der griechische Philosoph *Anaxagoras* (500 – 428 v.Chr.), wegen Gottlosigkeit vertrieben, stellte unter anderem die Behauptung auf, dass es weder ein Kleinstes noch ein Grösstes gebe.
Zur selben Zeit lehrte der Naturphilosoph *Zenon* von Elea (um 490 – 430 v.Chr.) das Sein als Einheit und Ruhe, das Nichtsein als Vielheit und Bewegung. Zur Stützung dieser These formulierte er das «Paradoxon des Wettlaufs zwischen Achilles und der mit Vorsprung gestarteten Schildkröte». Es besteht in der Tatsache, dass wir einerseits die *unendliche* Aufeinanderfolge (der jeweiligen Einholstrecken) weder faktisch noch grundsätzlich vorstellen können, dass sie aber andererseits in der Wirklichkeit abgeschlossen vorliegen soll.
Von einer ganz anderen Perspektive aus wurde *Archimedes* von Syrakus (287 – 212 v.Chr.) bei der Bewältigung des *Inhaltsproblems* mit dem Unendlichen konfrontiert. Die von ihm entwickelte *Exhaustionsmethode* zur Bestimmung der Fläche des Parabelsegmentes führte auf die Summation einer unendlichen geometrischen Reihe.
Während des Mittelalters herrschte der "horror infiniti" Aristotelischer Provenienz, der eine geistige Auseinandersetzung mit dem Phänomen Unendlich weitgehend verunmöglichte. In der *Physik* von Aristoteles lesen wir unter anderem: "... unendlich sein ist ein Mangel und kein Ausdruck der Vollkommenheit, es ist gleichbedeutend mit dem Fehlen einer Grenze. ..."
Doch schon im Mittelalter begannen sich metaphysische Systeme zu entwickeln, die den Begriff des Unendlichen wesentlich einbezogen. Der an der Wende vom Mittelalter zur Neuzeit stehende Kardinal *Nikolaus von Kues* (1401 – 1464), auch Cusaner genannt, empfand bereits die *räumlich-zeitliche Unendlichkeit*. Seine Untersuchungen in der Abhandlung "De docta ignorantia" (Von der wissenden Unwissenheit) münden in die Feststellung aus, dass «das Unendliche nicht grösser sein könne als unendlich».

In geistiger Verwandtschaft zu diesen Äusserungen stehen auch die Aussagen des Dominikanermönchs und Naturphilosophen *Giordano Bruno* (1548–1600), der die Unendlichkeit des Alls mit den Worten verkündete: "Öffne uns das Tor, durch das wir hinausblicken können in die unermessliche, einheitliche Sternenwelt."
Nach langjähriger Verfolgung und anschliessender Gefangenschaft wurde Giordano Bruno im Jahre 1600 in Rom auf dem Scheiterhaufen verbrannt. Doch die mathematisch-philosophischen Dispute um die Fragen nach dem Unendlichen verstummten damit nicht. 1638 erschien die in Form eines Dialogs gefasste Abhandlung von *Galilei* mit dem Titel «Unterredungen und mathematische Demonstrationen». Darin kommt auch das Unendliche zur Sprache, das prinzipiell als unbegreiflich erklärt wird. Salviati, einer der Gesprächsteilnehmer, meint: "Das sind die Schwierigkeiten, die dadurch entstehen, dass wir mit unserem *endlichen* Intellekt das Unendliche diskutieren, in dem wir letzterem die Eigenschaften zusprechen, die wir an dem Endlichen, Begrenzten kennen, das geht aber nicht an ..." [2].
Die Frage, ob auf zwei Strecken verschiedener Länge "gleichviele" Punkte liegen oder nicht, konnte nicht schlüssig beantwortet werden. Grosse Verunsicherung bereitete das sog. «Paradoxon von Galilei». Dementsprechend kann die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ein-eindeutig auf eine echte Teilmenge von ihr, nämlich die Quadratzahlen, abgebildet werden.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & \ldots & n^2 \ldots \end{array}$$

Schliesslich gelangen die Kontrahenten zur Überzeugung, dass im Bereich des Unendlichen die Relationen grösser, gleich oder kleiner nicht stattfinden können, ganz im Sinne der oben zitierten Aussage des Cusaners.
Der bedeutende Mathematiker, Philosoph und Schriftsteller *Blaise Pascal* hat sich in zweifacher Hinsicht mit dem Unendlichen auseinandergesetzt. Einmal ist die entscheidende Vorarbeit für die Integralrechnung zu nennen, die er mit seinen Inhaltsberechnungen geleistet hat. Sie basieren auf einer modifizierten Cavalierischen Methode und haben vor allem *Leibniz* für die Entdeckung des Differentialkalküls inspiriert [10], S. 97 und ff.
Theologisch auf die Gottesfrage ausgerichtet sind Pascals Äusserungen über die "unendlich grosse Zahl" im Fragment 211 der «Pensées» [3]: " Die Eins dem Unendlichen hinzugefügt, vermehrt es um Nichts, das Endliche vernichtet sich in Gegenwart des Unendlichen, es wird ein reines Nichts. So unser Geist vor Gott, so unsere Gerechtigkeit vor der göttlichen Gerechtigkeit." Und weiter unten im selben Fragment: "Nous connaissons qu'il y a *un infini* et

ignorons sa nature ... Ainsi on peut bien connaître, qu'il y a un *Dieu* sans savoir ce qu'il est."

Das Bekenntnis Pascals zur *Existenz* einer "unendlich grossen Zahl" steht im Widerspruch zur mittelalterlichen These "Numerus infinitus repugnat" (Eine unendliche Zahl widerspricht sich). Pascals Vergleich des Unendlichen mit dem Begriff "Gott" wirft viele epistemologische Fragen auf, die uns wieder bei *Georg Cantor* gegen Ende des 19. Jahrhunderts begegnen.

Vorerst wenden wir uns einer epochalen innermathematischen Entdeckung zu, nämlich *dem Kalkül des Unendlich Kleinen* (Analyse des infiniments petits). Wir bezeichnen ihn heute als *Infinitesimalrechnung*, und er wurde von Leibniz und Newton fast gleichzeitig gegen Ende des 17. Jahrhunderts geschaffen.

Die erste diesbezügliche Abhandlung von Leibniz aus dem Jahre 1684 betrifft die Differentialrechnung und trägt den Titel «Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus ...» (Neue Methode zur Bestimmung von Maximum und Minimum, einschliesslich Tangenten). Sie blieb den meisten Zeitgenossen unverständlich, nicht zuletzt infolge des mysteriösen Umgangs mit dem Differential dx, das als "unendlich kleine Grösse" deklariert wurde. Versuche einer inhaltlichen Definition dieses unscharfen Begriffes brachten mehr Verwirrung als Klärung, wie die folgenden drei Zitate eindrücklich vor Augen führen.

Johann Bernoulli (um 1700): "Eine Grösse, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich-kleine Grösse, wird weder vermindert noch vermehrt."

Christian Wolff (1763): "Eine *unendlich kleine Grösse" ist diejenige, welche so ein geringer Teil von der anderen ist, dass er mit ihr nicht verglichen werden kann."*

Leonhard Euler (1755): "Eine *unendlich kleine Grösse" ist nichts anderes als eine verschwindende Grösse und ist deshalb tatsächlich gleich Null."*

Dem neuen Kalkül fehlte eine sichere mathematische Grundlage, weshalb an ihm bald mannigfache und begründete Kritik geäussert wurde, so unter anderem vom anglikanischen Bischof *George Berkeley* (1684–1753). Trotzdem entwickelte sich die Infinitesimalrechnung, vorab unter dem Einfluss der Bernoullis und des überragenden Leonhard Euler zu einer virtuos gehandhabten *Technik* mit einem effizienten Anwendungspotential.

Im 19. Jahrhundert haben *Bolzano* und vor allem *Cauchy* und *Weierstrass* den Infinitesimalkalkül vom nebulösen Begriff der "unendlich kleinen Grösse" dx gereinigt und die Limes-Prozesse in der $\delta\varepsilon$-Sprache solide verankert.

Aber die Analysis allein konnte noch nicht «zu der tiefsten Einsicht in das Wesen des Unendlichen führen», wie *Hilbert* sich ausdrückte. Erst die

Mengenlehre von *Cantor* und die *Theorie der transfiniten Zahlen* erschloss neuartige Dimensionen und brachte Klärung in vielen Fragen das Unendliche betreffend [5].
Als Vordenker in dieser Richtung kann der bereits genannte böhmische Philosoph, Mathematiker und Theologe *Bernard Bolzano* (1781–1848) bezeichnet werden, dem wegen Verbreitung seiner fortschrittlichen Soziallehre die Lehrbefugnis entzogen wurde.
In seiner 1851 postum erschienenen Schrift «Paradoxien des Unendlichen» [4] werden einige brisante Fragen nach der Existenz und dem Wesen einer unendlich grossen Zahl aufgeworfen. Vor allem geht es um die Unterscheidung zwischen dem Potential- und dem Aktual-Unendlichen.
Eine *veränderliche,* endliche, über alle Grenzen hinauswachsende Grösse wird als *Potential-Unendlich* bezeichnet. Demgegenüber ist das Aktual-Unendliche ein *festes, konstantes,* jedoch jenseits aller endlichen Grössen liegendes Quantum. Als Beispiel hierzu seien erwähnt die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, als abgeschlossene Einheit interpretiert oder die Gesamtheit aller Punkte auf einer Strecke. Die Standpunkte bezüglich der Anerkennung der einen oder anderen Art von "unendlich grosser Zahl" waren selbst unter hervorragenden Mathematikern keineswegs uniform.
Bolzano lässt auf dem Titelblatt seiner «Paradoxien» das folgende Zitat von Leibniz abdrucken: "Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son auteur"

(Ich bin so sehr für das Aktual-Unendliche, statt anzunehmen, die Natur verabscheue es, wie man gewöhnlich sagt; dass ich vielmehr dafür halte, sie schätze es überall, um die Vollkommenheiten ihres Schöpfers besser zu bekunden).

C.F. Gauss, ein Zeitgenosse von Bolzano, äussert sich 1831 in einem Brief an seinen Freund Heinrich Schumacher in diametraler Weise: "So protestiere ich gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer vollendeten, welche in der Mathematik nie erlaubt ist."
Georg Cantor (1845–1918) brachte um 1875, rund 20 Jahre nach Gauss' Tod, eine weitgehende Klärung der gegensätzlichen Standpunkte mit seiner bereits erwähnten Theorie der transfiniten Zahlen, die es gestattet, das *Aktual-Unendliche* systematisch auszubauen [5].

Cantor unterscheidet drei Arten von Aktual-Unendlich:

(1) das Aktual-Unendliche in *Deo* oder das *Absolute* (unvermehrbar und daher mathematisch undefinierbar);
(2) das Aktual-Unendliche in *concreto* (in der von Gott geschaffenen Natur);

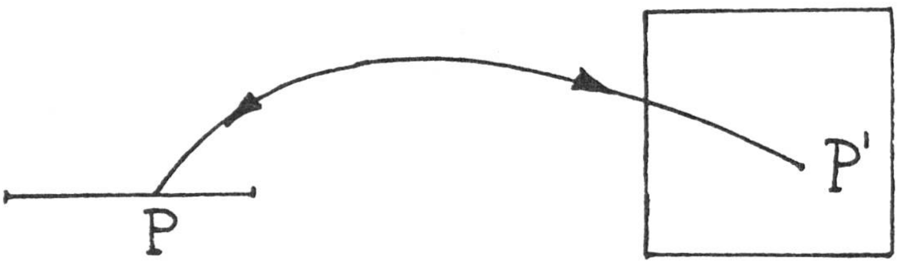
Georg Cantor (1845 – 1918)

(3) das Aktual-Unendliche in *abstracto* (von der menschlichen Erkenntnis in Form der aktual unendlichen oder transfiniten Zahlen aufgefasst, die unendlich und trotzdem vermehrbar sind) [6], S. 372 und ff.

Cantor stützte seine Darlegungen auf der Definition (3) ab. Er wurde dafür von vielen Mathematikern, aber auch Philosophen und Theologen zum Teil hart angegriffen. Sein eigener Lehrer *Kronecker* bezeichnete ihn sogar als "Verführer der Jugend".

Glücklicherweise erhielt der sensible, zeitweise psychisch leidende Cantor Sukkurs beim katholischen Philosophen und Theologen *C. Gutberlet* [7], der vor allem auf die innigen Beziehungen zwischen Mathematik und Metaphysik hinwies. Dieser vertrat, wie auch Cantor selber, die Ansicht, dass das Potential-Unendliche nur eine verborgene Realität besitzt und auf ein Aktual-Unendliches hinweist, von dessen Existenz es abhängig ist und durch welches es erst möglich wird.

Ein besonders beeindruckendes und die Vorstellungskraft vieler Zeitgenossen übersteigendes Resultat der transfiniten Mengenlehre Cantors bildet die Entdeckung der *hierarchischen Struktur im Bereich des Unendlichen.* Mit Hilfe des Äquivalenzbegriffes wird es möglich, unendliche Mengen miteinander zu vergleichen, ein Unterfangen, das der Cusaner, Galilei und Pascal noch als unmöglich erachteten.
Zwei Mengen, M und M', heissen *äquivalent,* wenn sie ein-eindeutig aufeinander abgebildet werden können.
Unter der *Mächtigkeit* oder der *Kardinalzahl* einer Menge versteht Cantor den Allgemeinbegriff, welcher ihr und noch allen ihr äquivalenten Mengen zukommt. $\mathbb{N}$ hat die Kardinalzahl $\aleph_0$ ($\aleph$ ist der erste Buchstabe im hebräischen Alphabet) und alle Mengen, die äquivalent zu $\mathbb{N}$ sind, heissen *abzählbar.* $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen, habe die Kardinalzahl $\aleph$. Cantor konnte bald nachweisen, dass die rationalen Zahlen abzählbar sind, die reellen Zahlen hingegen nicht. D.h. $\mathbb{N}$ hat die kleinere Mächtigkeit als $\mathbb{R}$ oder $\aleph_0 < \aleph$.
Ein besonders *paradoxes* Resultat ist die Tatsache, dass etwa die Menge der Punkte auf der Einheitsstrecke gleichmächtig der Menge der Punkte in einem Einheitsquadrat ist.



Cantor kommentierte 1877 in einem Brief an Dedekind seinen eigenen Beweis mit den Worten: "Je le vois, mais je ne le crois pas". Aufgrund des Satzes «Die Menge aller Teilmengen einer Menge (Potenzmenge) hat eine grössere Mächtigkeit als die Menge selbst» folgt dann die Ungleichungskette

$$\aleph_0 < \aleph < 2^{\aleph} < 2^{(2^{\aleph})} < \cdots$$

womit eine *Hierarchie im Unendlichen* nachgewiesen ist, eine mathematische Feststellung, die jede Vorstellungskraft übersteigt.
Leider wurden die grossartigen Entdeckungen Cantors überschattet von den um 1900 formulierten *Antinomien* der Mengenlehre, etwa in Form der *Russel'schen Menge* (Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten). Doch *Hilbert* konnte einen befriedigenden Weg aus dem

Dilemma finden, ohne "Verrat an der Wissenschaft" zu üben. Für ihn blieb die Theorie der transfiniten Zahlen nach wie vor die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes und eine der höchsten Leistungen rein verstandesmässiger Tätigkeit, so dass er ausrufen konnte: "Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können."

Das Unendliche in der Kunst

Dass nicht nur in Mathematik, Philosophie und vielen anderen Wissenschaften das Unendliche Gegenstand der Reflexion ist, sondern auch im Bereich der *Kunst,* soll an zwei Beispielen veranschaulicht werden.
Als *erstes* nennen wir den berühmten holländischen Maler *Maurits Cornelius Escher* (1898–1972), der mit seinen verwirrenden Trugbildern weltbekannt geworden ist. Uns interessiert aber Escher als *"Meister des Unendlichen"*. Nach seinen eigenen Aussagen fühlte sich der geniale Maler oft den Mathematikern mehr verwandt als seinen eigenen Berufskollegen. In Escher reifte eines Tages ein Verlangen, sich mittels seiner Phantasien der *Unendlichkeit* möglichst *rein* und *dicht* anzunähern. Er schaffte sich sein Weltall nicht nur durch reine Abstraktion (etwa durch bizarre Kleckse zufälliger Form), sondern aufgebaut aus Pflanzen, Tieren und Menschen, die sich in *endloser* Reihe wiederholen.
Zunächst sei der Holzschnitt *Möbiusband II* erwähnt, eine künstlerische Ausgestaltung der berühmten, nicht orientierbaren, einseitigen Fläche. Sie inspirierte übrigens auch den Bildhauer *Max Bill* (geb. 1908) für seine Plastik "Unendliche Schleife". Im weiteren weisen wir auf das sogenannte *Kreislimit III* hin. Es handelt sich nach Coxeter um eine Vierfarbenausbreitung einer Gruppe, die durch sog. Möbius-Involutionen erzeugt wird. Das kreisförmige Muster kann auch als Veranschaulichung des *Poincaré-Modells der hyperbolischen Nicht-Euklid'schen Geometrie* betrachtet werden. Escher beschreibt einen Teil dieser Figur mit den Worten: "Vier Farben sind erforderlich, um die Reihen gegeneinander kontrastieren zu lassen. Keine einzige Komponente dieser Reihen, die von *unendlich weit* wie Raketen senkrecht vom Rand aufsteigen und sich wieder darin verlieren, erreicht je die Grenzlinie" [8], S. 50, 239.
Henri Poincaré (1854–1912) hat einmal gesagt: "Es zeugt von der Kraft des Geistes, dass er sich die *unendliche* Wiederholung eines und desselben Schrittes vorstellen kann, sobald dieser Schritt einmal als möglich erkannt wird."
Eine sehr aktuelle Veranschaulichung dieser Aussage, wo sich überdies *Kunst und Unendlichkeit* begegnen, ist die *fraktale Geometrie.* Sie wurde von *B. Mandelbrot* 1975 entdeckt. Die fraktalen Mengen werden durch *unendliche*

iterative Prozesse erzeugt und können, dank der modernen Computertechnik, in feinster Auflösung bildhaft realisiert werden. Sie erscheinen in Form von Kurven, Flächen, Wolken, Gebirgslandschaften, Pflanzen und Blumen usf. Die fraktale Geometrie stellt nicht nur eine "Morphologie des Amorphen" dar, sondern enthüllt ausserdem ein bis jetzt verborgenes Antlitz der formalsten Kapitel der Mathematik: Eine Welt voller Schönheiten.
Leider können wir im Rahmen dieser Publikation keine Illustrationen anbieten, verweisen jedoch auf die einführende Literatur [9].

Epilog

Unser kurzer Weg durch die Geschichte des mathematischen Denkens auf den "Spuren der Unendlichkeit" musste notwendigerweise fragmentarisch bleiben. Folgende Themenbereiche wurden nicht erwähnt, oder dann nur am Rande: Die Kontinuumshypothese in der Cantor'schen Mengenlehre, die Nicht-Standard-Analysis, die Bedeutung des Unendlichen in der Stochastik (Grenzwertsätze) sowie die Kosmologie.
Im Mittelpunkt unserer Betrachtungen stand die wesenhafte Verankerung des Begriffes "Unendlich" in der Mathematik. Aus epistemologischer Sicht überraschte der Umstand, dass selbst namhafte Mathematiker wie Pascal, Leibniz, Bolzano, Gauss, Cantor, Cauchy u.a.m. keineswegs einig waren, in welcher definitorischen Form das Unendliche in ihre Theorie Eingang finden sollte.
Ein fundamental neues Verständnis für das Phänomen Unendlich brachte die revolutionäre Idee von Cantor, der nach Hilbert mit seiner Theorie der *transfiniten Kardinalzahlen* das "Unendliche auf den Thron gehoben hat". Die abstrakten und intuitiv kaum fassbaren Resultate lösten damals nicht nur heftige innermathematische Kontroversen aus, sondern gaben auch zu tiefschürfenden interdisziplinären Auseinandersetzungen mit Philosophen und Theologen Anlass.
Es macht den Anschein, als ob das Erspüren des Unendlichen von allen Seiten des geistigen Kosmos auf den *denkenden* Menschen eindringt; dieser ist gleichsam der Unendlichkeit wesenhaft angeschlossen.
Der Mensch, das "Geschöpf der Mitte", gebannt in vergänglicher Umwelt und mit einem *endlichen* Verstand ausgestattet, wird trotzdem immer wieder mit Hilfe geeigneter Symbole Zugang zum tieferen Verständnis des Phänomens Unendlich suchen.
Doch das eigentliche Wesen des Unendlichen als Aktual Unendliches in concreto wie auch in Deo wird ihm stets verborgen bleiben, was Pascal im

Fragment 34 seiner «Pensées» [3], auf S. 29 wie folgt umschreibt: "Bedenke ich die kurze Dauer meines Lebens, aufgezehrt von der Ewigkeit vorher und nachher; bedenke ich das bisschen Raum, den ich einnehme, und selbst den, den ich sehe, verschlungen von der unendlichen Weite der Räume, von denen ich nichts weiss und die von mir nichts wissen, dann erschaudere ich und staune, dass ich hier und nicht dort bin ..."

Hans Loeffel
Dufourstrasse 45
9000 St. Gallen

Literatur

[1] *D. Hilbert:* Über das Unendliche. Mathematische Annalen 95 (1926), 161–190.
[2] *G. Galilei:* Unterredungen und mathematische Demonstrationen. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 11, 1907.
[3] *B. Pascal:* Pensées. Deutsche Übersetzung von E. Wasmuth. Reclam, Stuttgart 1984.
[4] *B. Bolzano:* Paradoxien des Unendlichen. Leipzig 1851.
[5] *W. Purkert/H.J. Ilgauds:* Georg Cantor 1845–1918. Birkhäuser, Basel 1987.
[6] *G. Cantor:* Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Springer, Heidelberg 1980.
[7] *C. Gutberlet:* Das Unendliche, mathematisch und metaphysisch betrachtet. Mainz 1878.
[8] *J. Locher u.a.:* Die Welten des M.C. Escher. M. Pawlak Verlag, Herrsching 1971.
[9] *H. Peitgen/P. Richter:* The Beauty of Fractals. Springer, Berlin 1986.
[10] *H. Loeffel:* Blaise Pascal 1623–1662. Birkhäuser, Basel 1987.

Zusammenfassung

Der Unendlichkeitsbegriff durchzieht die Geschichte der mathematischen Denkweise wie ein roter Faden. Bei Zenon und Archimedes erscheint er im Konvergenzproblem von unendlichen Reihen und im 17. Jahrhundert "als unendlich kleine Grösse" oder Differential dx. Die Infinitesimalrechnung Leibniz'scher Prägung zeigt, wie man zentrale Probleme mit einem effizienten *Kalkül* bewältigen kann. Tiefere Einsicht in das *Wesen* des Unendlichen brachte aber erst die transfinite Mengenlehre von Georg Cantor. Dieser verlieh dem sogenannt Aktual-Unendlichen in abstracto mathematisches Heimatrecht und wies nach, dass das Unendliche hierarchisch strukturiert ist.
Epistemologische Fragen betreffend das Unendliche führen zwangsläufig und grenzüberschreitend zur Philosophie und Theologie. Cantor hat sich in diesen interdisziplinären Diskussionen leidenschaftlich engagiert.
In fundamentaler Art und Weise manifestiert sich das Unendliche im geistigen Kosmos. In zahlreichen Erscheinungen aus der Mathematik, Philosophie, Theologie und nicht zuletzt auch der Kunst dringt es auf den denkenden Menschen ein und offenbart ihm stets neue Geheimnisse.

Résumé

La notion d'infini se retrouve dans l'histoire de la pensée mathématique comme un fil rouge. Chez Zenon et Archimède la notion d'infini apparaît liée au problème de la convergence de séries infinies, au XVII siècle liée à cette "grandeur infiniment petite" connue actuellement sous le nom de différentielle dx. Le calcul infinitésimal selon Leibniz montre comment des questions fondamentales peuvent être dominées par un outil de calcul efficient. Ce n'est que plus tard, par la théorie des ensembles transfinis de Georg Cantor, que l'on acquit une connaissance approfondie de la nature de l'infini. Cantor fit reconnaître "l'infini actuel in abstracto" dans le monde mathématique et montra que l'infini était structuré hiérarchiquement.
Des questions de nature épistémologique concernant la notion d'infini conduisent nécessairement, au delà des frontières, vers la philosophie et la théologie. Cantor s'est engagé lui-même avec passion dans ce débat interdisciplinaire.
Mais c'est dans le cosmos intellectuel que la notion d'infini se manifeste sous sa forme fondamentale. Dans de nombreux domaines des mathématiques, de la philosophie, de la théologie, sans oublier l'art, la notion d'infini s'impose à l'esprit humain et lui révèle toujours encore de nouveaux secrets.

Summary

The notion of infinity shows up as a leading concept throughout the history of mathematical thinking. While Zenon and Archimedes were concerned with the infinite in the question of convergence of infinite series, in the 17th centruy infinitesimally small quantities or the differential dx stood in the centre of interest. The infinitesimal calculus as invented by Leibniz showed up as an efficient tool for solving essential problems. Deeper insight into the essence of infinity was gained by the theory of transfinite sets of Georg Cantor. He established the "actual infinite in abstracto" as a significant part of mathematics and showed the hierarchic structure of the inifnite.

Epistemological questions concerning infinity inevitably leed to philosophy and theology. Cantor was passionately engaged in these interdisciplinary discussions.
In a very fundamental way the infinite is manifest in the cosmos of the mind. In many variations in mathematics as well as in philosophy, theology and last but not least the arts the concept of infinity and it's mysteries are impressed upon thinking man.