D. Kurzmitteilungen

Hans Schmitter, Winterthur

Der Erwartungswert von Reinstatementprämien

1 Ein Beispiel zur Einführung

In der nichtproportionalen Sachrückversicherung sind zwei Formen von Reinstatement- oder Wiederauffüllungsprämien gebräuchlich:

(1) pro rata Betrag
sowie
(2) pro rata Betrag und pro rata temporis.

Das folgende Zahlenbeispiel illustriert, was damit gemeint ist:
Die Rückversicherungsdeckung betrage 4 Millionen nach einer Priorität von 500 000, die Rückversicherungsprämie sei 200 000. Am 1. Juli des Deckungsjahres ereigne sich ein Schaden von 1 500 000. Von diesem Schaden trägt der Erstversicherer seine Priorität von 500 000 und die Rückversicherung den Exzessschaden von 1 000 000. Falls der Rückversicherungsvertrag eine Wiederauffüllung vorsieht, heisst das, dass jetzt 25 % der Deckung von 4 000 000 verbraucht worden sind und gegen eine Zusatzprämie wiederaufgefüllt werden. Die Höhe der Zusatzprämie pro rata Betrag wäre demnach 50 000 (25 % von 200 000), diejenige der Zusatzprämie pro rata Betrag und temporis 25 000 (weil die Deckung vom Schadendatum an nur noch für ein halbes Jahr gewährt wird).

2 Reinstatementprämien pro rata Betrag

Wir bezeichnen mit Z die (aus mehreren Einzelschäden zusammengesetzte) Exzessschadenlast und mit c die Rückversicherungsdeckung pro Schadenereignis (im Beispiel 4 000 000). Zu beliebigem $x \geq 0$ bezeichnen wir die Stoplossschadenlast der Exzessschäden über x mit $(Z - x)^+$:

$$(Z - x)^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } Z \leq x \\ Z - x & \text{für } Z > x. \end{cases}$$

Die Differenz

$Z - (Z - c)^+$	nennt man die Schadenlast der ersten Deckung,
$(Z - c)^+ - (Z - 2c)^+$	die Schadenlast der zweiten Deckung usw.

Allgemein ist

$(Z - [i-1]c)^+ - (Z - ic)^+$	die Schadenlast der i-ten Deckung.

Wenn der Vertrag eine i-te Wiederauffüllung gegen eine Reinstatementprämie P_i vorsieht, so bezahlt der Erstversicherer im Schadenfall die Prämie

$$P_i\,((Z - [i-1]c)^+ - (Z - ic)^+)/c.$$

Um den Erwartungswert der Reinstatementprämien zu berechnen, sind die Stoplossprämien der Exzessschadenlast Z an den Stoplosspunkten c, $2c$, $3c$ usw. zu bestimmen. Sind alle $P_i = P$ gleich gross und ist die Anzahl Reinstatements unbeschränkt, so braucht man nicht einmal eine Stoplossprämie zu rechnen, denn der Erwartungswert der Summe aller Reinstatementprämien beträgt

$$P\{(E[Z] - E[(Z-c)^+] + E[(Z-c)^+] - E[(Z-2c)^+] + \cdots\}/c$$
$$= PE[Z]/c.$$

Das heisst, dass der Erstversicherer in diesem Fall einfach den Anteil P/c seiner Exzessschadenlast selber trägt.

3 Reinstatementprämien pro rate temporis

Auf den ersten Blick scheint eine Reduktion der Reinstatementprämie pro rata temporis einleuchtend: Eine Deckung, die erst am 31. Dezember beginnt und nur noch einen Tag währt, sollte doch 365 Mal weniger kosten als eine Jahresdeckung. In diesem Abschnitt wird jedoch gezeigt, dass diese anschauliche Überlegung nicht stimmt.

Wir beschränken uns auf den Fall konstanter Schadenhöhen von 1 und exponentialverteilter Wartezeiten $T_1, T_2, \ldots, T_n$ bis zum ersten Schaden bzw. zwischen den Schadenereignissen. Dies bedeutet, dass die Schadenanzahl poissonverteilt ist. In der Notation von *Feller* ist die Gammaverteilung

$$G_n(t) = 1 - e^{-\lambda t}\left(1 + (\lambda t)/1! + (\lambda t)^2/2! + \cdots + (\lambda t)^{n-1}/(n-1)!\right)$$

die Verteilungsfunktion von $T_1 + \cdots + T_n$. Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass der n-te Schaden bis zum Zeitpunkt t ($0 < t \leq 1$, die Zeiteinheit ist 1 Jahr) eintritt.
Die Dichte, multipliziert mit dt,

$$g_n(t)\,dt = \lambda(\lambda t)^{n-1}/(n-1)!e^{-\lambda t}\,dt, \tag{1}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in $(t, t+dt]$ eintritt.
Bezeichnen wir mit P die Prämie für die erste Deckung, so ist $P(1-t)$ die Reinstatementprämie pro rata temporis, wenn zur Zeit t ein Schaden passiert. Der Erwartungswert der Reinstatementprämie nach dem n-ten Schaden ist mit (1)

$$\int_0^1 P(1-t)g_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und die Summe aller erwarteten Reinstatementprämien

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 P(1-t)g_n(t)\,dt &= \int_0^1 P(1-t)e^{-\lambda t}\lambda \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda t)^{n-1} / (n-1)!\,dt \\ &= \lambda P/2.\end{aligned}$$

Betrachten wir nur Risikoprämien, so sollte die Summe aus der Prämie für die erste Deckung und dem Erwartungswert aller Reinstatementprämien λ betragen:

$$P + \lambda P/2 = \lambda.$$

Nach der Prämie P für die erste Deckung aufgelöst, ist

$$P = \lambda/(1+\lambda/2). \tag{2}$$

Diese Prämie P ist höher als die Risikoprämie für die erste Deckung, $1 - e^{-\lambda}$, denn

$$\begin{aligned}\lambda/(1+\lambda/2) - (1-e^{-\lambda}) &= e^{-\lambda} - \frac{1-\frac{\lambda}{2}}{1+\frac{\lambda}{2}} \\ &\geq 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Falls $\lambda \geq 2$, ist (3) klar. Für $\lambda < 2$ zeigt man die Richtigkeit von (3) durch die Reihenentwicklung von $\ln \frac{1-(\lambda/2)}{1+(\lambda/2)}$, denn $-2(\lambda/2 + (\lambda/2)^3/3 + (\lambda/5)^5/5 + \cdots) \leq -\lambda$.

(3) bedeutet, dass in der Rückversicherungspraxis die Summe der Risikoprämien für die zweite, dritte usw. Deckung systematisch unterschätzt wird, wobei der Fehler mit wachsender Frequenz zunimmt. So liegt für $\lambda = 1$ P gemäss (2) 5 % über der Risikoprämie der ersten Deckung $(1 - e^{-\lambda})$ und für $\lambda = 2$ schon 16 %. Diese Abhängigkeit von der Schadenfrequenz ist auch anschaulich verständlich: Man denke nur an einen Vertrag mit sehr hoher Schadenfrequenz, z.B. an $\lambda = 52$: Wenn durchschnittlich jede Woche ein Schaden passiert, ist ja nicht recht einzusehen, weshalb die Prämie für den Schaden beispielsweise der ersten Dezemberwoche kleiner sein sollte als diejenige für den Schaden der ersten Januarwoche.

Die Reinstatement-Risikoprämie nach einem Schaden zur Zeit t ist eben nicht proportional zu $(1 - t)$, sondern sie ist (bei Schadenhöhe 1) gleich der Wahrscheinlichkeit, dass noch ein Schaden eintritt, d.h.

$$1 - e^{-\lambda(1-t)}.$$

Der Erwartungswert der Summe aller Reinstatement-Risikoprämien ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (1 - e^{-\lambda(1-t)}) g_n(t)\, dt = \int_0^1 (1 - e^{-\lambda(1-t)}) \lambda\, dt$$
$$= \lambda(1 - 1/\lambda + e^{-\lambda}/\lambda).$$

Die Summe aus diesem Erwartungswert und der Risikoprämie für die erste Deckung beträgt λ, wie es sein sollte.

Hans Schmitter
"Winterthur"-Versicherungen
Postfach 357
8401 Winterthur

Literatur

Feller, W. (1971): An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2. John Wiley, New York.

Jan Dhaene, Leuven

Approximating the compound negative binomial distribution by the compound Poisson distribution

1 Introduction

Assume that the aggregate claims of a portfolio of positive risks have a compound negative binomial distribution. Let S^{CNB} be the random variable representing the aggregate claims then

$$S^{\mathrm{CNB}} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{K(1)} \tag{1}$$

where $K(1)$ is the number of claims and X_i is the size of claim i. By convention, $S^{\mathrm{CNB}} = 0$ if $K(1) = 0$. Further, the X_i are positive mutually independent identically distributed random variables that are independent of $K(1)$. Let the mean of the X_i be denoted by μ. The number of claims $K(1)$ has a negative binomial distribution,

$$\mathrm{Prob}(K(1) = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

with $r > 0$, $0 < p < 1$ and $q = 1 - p$.
Remark that the Poisson distribution can be obtained as a limit from negative binomial distributions. Thus the negative binomial distribution with parameters r and p can be approximated by the Poisson distribution with parameter $\lambda = rq/p$, provided that p is "sufficiently" close to 1 and r is "sufficiently" large. As a consequence of this, *Gerber* (1984) remarks that the compound negative binomial distribution can be approximated by the corresponding compound Poisson distribution, i.e. S^{CNB} can be approximated by S^{CP} with

$$S^{CP} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{K(2)} \tag{3}$$

where $K(2)$ has a Poisson distribution

$$\mathrm{Prob}(K(2) = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

with the Poisson parameter given by

$$\lambda = \frac{rq}{p} \tag{5}$$

The Y_i are positive mutually independent random variables, independent of $K(2)$ and have the same distribution as the X_i.
Again, $S^{CP} = 0$ if $K(2) = 0$.
Remark that

$$E[K(1)] = E[K(2)] = \frac{rq}{p} = \lambda \tag{6}$$

In section 3 bounds will be derived for the difference between the compound negative binomial distribution and the corresponding compound Poisson approximation. The difference between the two distributions will be expressed in terms of stop-loss premiums.
First two lemmas are given that will be used in the proof of our results.

2 Inequalities for stop-loss premiums

The stop-loss premium with retention t corresponding to a random variable X is denoted by $\pi(X,t)$:

$$\pi(X,t) = E[(X-t)_+] \tag{7}$$

Lemma 1
Let $X_1, \ldots, X_k$ and $Y_1, \ldots, Y_k$ be independent random variables satisfying for all t

$$a_i \leq \pi(X_i,t) - \pi(Y_i,t) \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, k \tag{8}$$

Then one has for all t

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \pi\left(\sum_{i=1}^{k} X_i, t\right) - \pi\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i, t\right) \leq \sum_{i=1}^{k} b_i \tag{9}$$

Lemma 2

Let $X_1, \ldots, X_k$ be independent and identically distributed positive random variables.

Then the following inequalities hold for all t

$$0 \leq \pi\left(\sum_{i=1}^{k} X_i, t\right) - \sum_{i=1}^{k} \pi(X_i, t) \leq (k-1)E[X_1] \tag{10}$$

For a proof of Lemma 1 and 2 see *De Pril/Dhaene* (1990).

3 Error bounds

Theorem

Under the assumptions given in section 1, the following inequalities hold for all t

$$0 \leq \pi(S^{CNB}, t) - \pi(S^{CP}, t) \leq \mu r\left(\ln p + \frac{q}{p}\right) \tag{11}$$

Proof

Since only positive claims can occur, one finds for $t \leq 0$

$$\begin{aligned}\pi(S^{CNB}, t) - \pi(S^{CP}, t) &= E[(S^{CNB} - t)_+] - E[(S^{CP} - t)_+] \\ &= E[S^{CNB}] - E[S^{CP}] \\ &= E[K(1)]E[X_1] - E[K(2)]E[Y_1] \\ &= 0\end{aligned}$$

so that (11) is satisfied.

Consider now the case $t > 0$.

The compound negative binomial distribution with parameters r and p and claim size distribution G is the convolution of n compound negative binomial distributions with parameters $\frac{r}{n}$ and p and claim size distribution G.

Thus, from Lemma 1 it follows that it is enough to give the proof for the case that r is sufficiently small.

By taking conditional expectations, one finds

$$\begin{aligned}
&\pi(S^{CNB}, t) - \pi(S^{CP}, t) \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{K(1)} X_i - t\right)_+\right] - E\left[\left(\sum_{i=1}^{K(2)} Y_i - t\right)_+\right] \\
&= E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{K(1)} X_i - t\right)_+ |K(1)\right]\right] - E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{K(2)} Y_i - t\right)_+ |K(2)\right]\right]
\end{aligned}$$

Using (6) and the assumption that the X_i and Y_i are identically distributed this expression can be written as

$$\begin{aligned}
&\pi(S^{CNB}, t) - \pi(S^{CP}, t) \\
&= E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{K(1)} X_i - t\right)_+ |K(1)\right] - K(1)E[(X_1 - t)_+]\right] \\
&\quad - E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{K(2)} Y_i - t\right)_+ |K(2)\right] - K(2)E[(Y_1 - t)_+]\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\binom{k+r-1}{k}p^r q^k - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right\}\left\{E\left[\left(\sum_{i=1}^{k} X_i - t\right)_+\right] - kE[(X_1 - t)_+]\right\}
\end{aligned}$$

If r is sufficiently small then the inequality

$$\binom{k+r-1}{k}p^r q^k - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} < 0$$

only holds for $k = 1$. See also *Gerber* (1984).
So using Lemma 2 one finds that for r sufficiently small

$$\begin{aligned}
0 \le \pi(S^{CNB}, t) - \pi(S^{CP}, t) &\le \mu \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\binom{k+r-1}{k}p^r q^k - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right\}(k-1) \\
&= \mu(p^r - e^{-\lambda}) \\
&= \mu p^r(1 - \exp(-r(q/p + \ln p))) \\
&\le \mu(1 - \exp(-r(q/p + \ln p))) \\
&\le \mu r(q/p + \ln p)
\end{aligned}$$

which proves (11). □

In *Gerber* (1984) the following bounds were derived

$$0 \leq \pi(S^{CNB}, t) - \pi(S^{CP}, t) \leq \mu r q^2 / p \tag{12}$$

Now,

$$\mu r(\ln p + q/p) < \mu r\,(-q + q/p) = \mu r(q^2/p)$$

so that the upper bound derived in (11) is smaller than the one derived by *Gerber* (1984).
Further,

$$\begin{aligned}\mu r(\ln p + q/p) &= \mu r(-q - q^2/2 - \cdots + q(1 + q + q^2 + \cdots)) \\ &= \mu r\left(\frac{1}{2}q^2 + \frac{2}{3}q^3 + \frac{3}{4}q^4 + \cdots\right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mu r q^2/p &= \mu r q^2(1 + q + q^2 + \cdots) \\ &= \mu r(q^2 + q^3 + \cdots)\end{aligned}$$

It follows that for q sufficiently small the upper bound derived here is approximately half of *Gerber's* upper bound.

Jan Dhaene
Catholic University of Leuven
Dekenstraat 2
B – 3000 Leuven
Belgium

4 References

Gerber, H.U. (1984): Error bounds for the compound Poisson approximation. Insurance: Mathematics and Economics *3*, 191 – 194.

De Pril, N./Dhaene, J. (1990): Error bounds for collective approximations of stop-loss premiums. Paper presented at the Oberwolfach meeting on risk theory, 1990.