

Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des
Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1990)

Heft: 1

Rubrik: Kurzmitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

D. Kurzmitteilungen

BEDA CHAN, Toronto

Illustration of a pair of inclusion-exclusion type formulas

For the convolution of n uniform distributions there is a pair of dual formulas, see (5a) and (5b) of *Gerber* (1989), where the formulas are derived geometrically for the case $n = 2$. Here we shall present a picture proof for the case $n = 3$.

Let y_1, y_2, y_3 be positive numbers. Let $F_i(x)$ denote the uniform distribution between 0 and y_i , and $H_3(x)$ the convolution of $F_1(x)$, $F_2(x)$ and $F_3(x)$. Then the following two formulas hold:

$$\begin{aligned}
 y_1 y_2 y_3 H_3(x) &= y_1 y_2 y_3 \\
 &\quad - \frac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_3 - x)_+^3 \\
 &\quad + \frac{1}{6}(y_1 + y_2 - x)_+^3 + \frac{1}{6}(y_1 + y_3 - x)_+^3 + \frac{1}{6}(y_2 + y_3 - x)_+^3 \\
 &\quad - \frac{1}{6}(y_1 - x)_+^3 - \frac{1}{6}(y_2 - x)_+^3 - \frac{1}{6}(y_3 - x)_+^3 \\
 &\quad + \frac{1}{6}(-x)_+^3 \tag{a}
 \end{aligned}$$

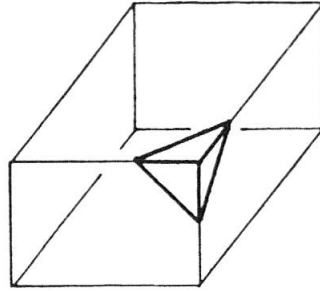
and

$$\begin{aligned}
 y_1 y_2 y_3 H_3(x) &= \frac{1}{6}(x)_+^3 \\
 &\quad - \frac{1}{6}(x - y_3)_+^3 - \frac{1}{6}(x - y_2)_+^3 - \frac{1}{6}(x - y_1)_+^3 \\
 &\quad + \frac{1}{6}(x - y_2 - y_3)_+^3 + \frac{1}{6}(x - y_1 - y_3)_+^3 + \frac{1}{6}(x - y_1 - y_2)_+^3 \\
 &\quad - \frac{1}{6}(x - y_1 - y_2 - y_3)_+^3 \tag{b}
 \end{aligned}$$

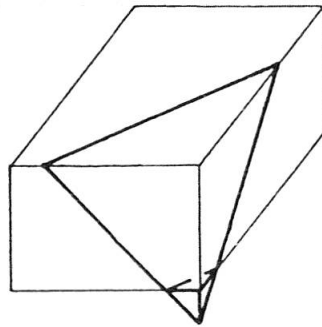
see (4a) and (4b) of *Gerber* (1989).

Note that $y_1 y_2 y_3 H_3(x)$ is the volume of that part of the "box" (the three-dimensional rectangle) with corners $(0, 0, 0)$, $(0, 0, y_3)$, $(0, y_2, 0)$, $(y_1, 0, 0)$, $(0, y_2, y_3)$, $(y_1, 0, y_3)$, $(y_1, y_2, 0)$, (y_1, y_2, y_3) that is below the plane with equation $x_1 + x_2 + x_3 = x$. For the illustration of, for example, formula (a) we assume

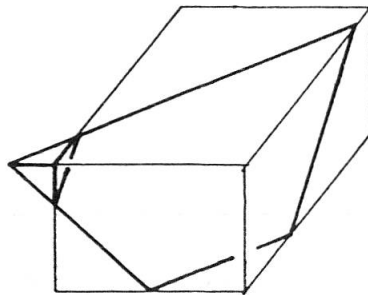
that $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ and that $y_1 \leq y_2 + y_3$. If $x \geq y_1 + y_2 + y_3$, the volume in question is obviously $y_1 y_2 y_3$. Now we reduce x , i.e., we lower the plane successively. Then we have to introduce corrective terms one by one (if x falls below $y_1 + y_2 + y_3$, $y_1 + y_2$, $y_1 + y_3$, $y_2 + y_3$, $y_1, y_2, y_3, 0$) to obtain the volume; each of these terms represents the volume of a certain isosceles right pyramid. This is illustrated in the following diagrams. This way we pick up all the terms of formula (a).



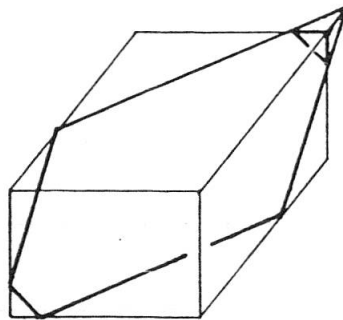
$$-\frac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_3 - x)_+^3$$



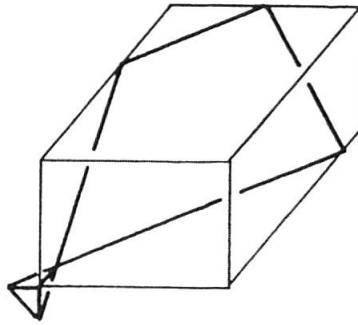
$$+\frac{1}{6}(y_1 + y_2 - x)_+^3$$



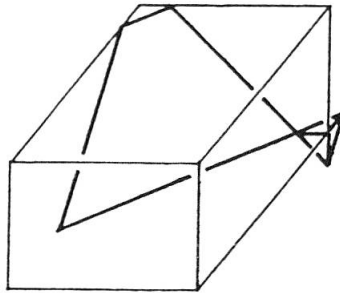
$$+\frac{1}{6}(y_1 + y_3 - x)_+^3$$



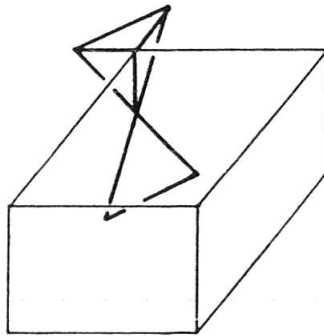
$$+\frac{1}{6}(y_2 + y_3 - x)_+^3$$



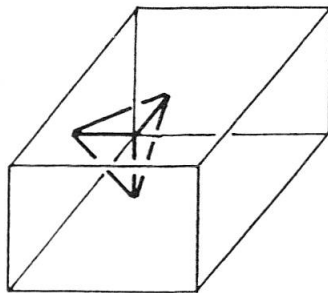
$$-\frac{1}{6}(y_1 - x)_+^3$$



$$-\frac{1}{6}(y_2 - x)_+^3$$



$$-\frac{1}{6}(y_3 - x)_+^3$$



$$+\frac{1}{6}(-x)_+^3$$

For an illustration of (b) one proceeds in the opposite direction. If $0 \leq x \leq y_3$, $y_1 y_2 y_3 H_3(x)$ is the volume of an isosceles right pyramid with sides of length x , which leads to the first term on the right hand side of (b). As we increase x , we have to introduce corrective terms one by one (when x exceeds $y_3, y_2, y_1, y_2 + y_3, y_1 + y_3, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3$). The reader may want to draw the corresponding diagrams himself!

Beda Chan
Department of Statistics
University of Toronto
Toronto, Canada M5S 1A1

Reference

Gerber, H.U. (1989): From the Convolution of Uniform Distributions to the Probability of Ruin. Bulletin of the Swiss Association of Actuaries, 283–292.

PHILIPPE CHUARD, Pully

Notation actuarielle internationale

Le Bulletin de l'Association suisse des actuaires a publié, aux pages 111 et suivantes de son premier cahier de 1986, une communication proposant, après l'avoir justifiée, une modification de la notation actuarielle internationale en vigueur actuellement.

Lors du 14e Congrès international d'actuaires tenu à Madrid en 1954, il y a trente-six ans, la décision a été prise de désigner la valeur initiale de la rente par les caractères *italiques* a (pour paiement postnumerando) et \ddot{a} (pour paiement praenumerando). Le Bulletin de l'Association suisse des actuaires a, dès lors, respecté cette règle rigoureusement. Mais il n'en va pas de même pour certaines autres publications où l'on trouve des symboles non conformes a ou \ddot{a} , en caractères *romains*.

La communication publiée dans le Bulletin de 1986 proposait donc d'autoriser l'emploi de a ou de \ddot{a} , ainsi que celui de \ddot{a} ou de \ddot{a} , sans distinction de caractère, italique ou romain.

Cette proposition a été transmise au Président de l'Association actuarielle internationale, à Bruxelles, qui a chargé le Comité permanent des notations actuarielles d'examiner la question. Ce comité a pris connaissance de la proposition de modification dans la séance qu'il a tenue en septembre 1987 à Scheveningen. C'est au cours de sa séance suivante, en juillet 1988 à Helsinki, qu'il a pris position. Estimant que la modification proposée pouvait conduire à des confusions et serait en désaccord avec la standardisation de la notation, il l'a rejetée.

En conséquence, une décision récente et motivée de l'organe compétent de l'Association actuarielle internationale confirme que, pour la valeur initiale de la rente, le seul symbole respectant la notation actuarielle internationale est

- a pour le paiement postnumerando,
- \ddot{a} pour le paiement praenumerando,

en caractère *italique*. Il en va de même pour la valeur finale, représentée par s ou \ddot{s} .

Il faut alors souhaiter que diminuera la tentation, chez certains actuaires, d'employer des symboles erronés a ou \ddot{a} , en caractère romain. Une notation stabilisée facilite les échanges de la pensée scientifique.

Philippe Chuard
av. de Lavaux 93
1009 Pully