

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker
<b>Band:</b>	- (1989)
<b>Heft:</b>	1
<b>Artikel:</b>	Ein kontinuierliches Modell in der Pensionsversicherungsmathematik
<b>Autor:</b>	Liebmann, Franz Günter
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-967205">https://doi.org/10.5169/seals-967205</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen

FRANZ GÜNTER LIEBMANN, Wien

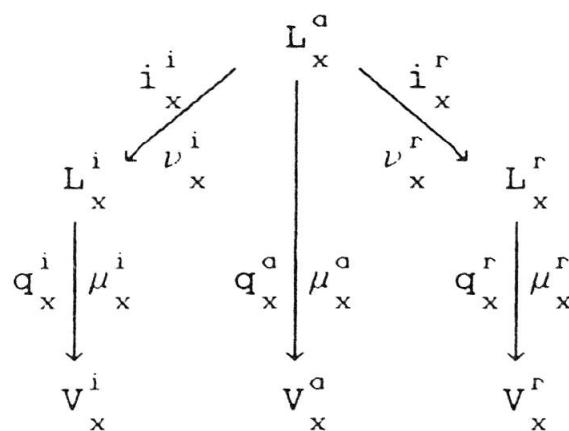
Ein kontinuierliches Modell in der Pensionsversicherungs-mathematik

### Die Ausscheideordnung im diskreten und kontinuierlichen Modell

In einer Personengesamtheit mit mehreren Ausscheideursachen sind die einzelnen Ausscheidewahrscheinlichkeiten voneinander abhängig. Erst vor kürzerer Zeit hat *Georg Reichel* einen Artikel in den Blättern der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik geschrieben mit dem Titel: “Gibt es unabhängige Verbleibswahrscheinlichkeiten in der Personenversicherungsmathematik?” [10]. In dieser Arbeit zeigt *Reichel*, dass es im allgemeinen keine unabhängigen Verbleibswahrscheinlichkeiten gibt. *Reichel* behandelt dieses Thema auch ausführlich in den “Mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung” [9].

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, wie sich – unter bestimmten Voraussetzungen – die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven und Invaliden ändern, wenn sich die Invalidisierung ändert. Diese Frage wurde an einer Ausscheideordnung untersucht, welche mit Übergangswahrscheinlichkeiten erstellt wurde, die einer Arbeit des Forschungsinstitutes für Soziale Sicherheit entnommen wurden [16].

Die Übergänge in der Ausscheideordnung können durch folgendes Schema beschrieben werden:



In diesem Schema wurde folgende Bezeichnungsweise gewählt:

$L_x^a$ , $L_x^i$ und $L_x^r$	Stand der Aktiven, Invaliditäts- und Altersrentner mit Alter $x$
$i_x^i$ und $i_x^r$	die einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten von den Aktiven zu den Invaliditäts- und Altersrentnern
$v_x^i$ und $v_x^r$	die Übergangsintensitäten von den Aktiven zu den Invaliditäts- und Altersrentnern
$q_x^a$ , $q_x^i$ und $q_x^r$	die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten
$\mu_x^a$ , $\mu_x^i$ und $\mu_x^r$	die Sterbeintensitäten
$V_x^a$ , $V_x^i$ und $V_x^r$	Verstorbene bis zum Alter $x$

Die Berechnung der diskreten Ausscheideordnung erfolgte nach folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} L_{x+1}^a &= L_x^a - L_x^a i_x^i - L_x^a i_x^r - L_x^a q_x^a \\ L_{x+1}^i &= L_x^i + L_x^a i_x^i \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) - L_x^i q_x^i \\ L_{x+1}^r &= L_x^r + L_x^a i_x^r \left(1 - \frac{q_x^r}{2}\right) - L_x^r q_x^r \end{aligned}$$

Die dafür benötigten Übergangswahrscheinlichkeiten wurden – bis auf die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven – dem Heft 8 der Schriftenreihe des Hauptverbandes der österreichischen Sozialversicherungsträger [16] entnommen. Die Ausscheideordnung wurde für die Personengruppe Arbeiter Männer aufgestellt.

Für diese Arbeit standen nur Sterbewahrscheinlichkeiten für Unselbständige (Arbeiter und Angestellte), Männer zur Verfügung. Sie wurden aus Statistiken des Hauptverbandes aus den Jahren 1967 bis 1971 errechnet, die auch der Untersuchung “Demographische Entwicklung der Versichertenstände bis 1990” [6] zugrundeliegen.

Bei den vom Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger ermittelten Zugangswahrscheinlichkeiten für Altersrentner wurde darauf Bedacht genommen, dass die Pensionierung in der Regel zu vollen Lebensjahren erfolgt. Daher wurde z. B. für Aktive, die mit 60 Jahren in Pension gehen, die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass ein 59,5-jähriger Aktiver innerhalb eines Jahres in Pension geht. Aus diesem Grund wurde die Ausscheideordnung nicht für volle Jahre, sondern für die 20,5-jährigen, 21,5-jährigen usw. aufgestellt.

Da sich alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten nicht sprunghaft ändern, erhält man brauchbare Werte für die halbjährigen Alter durch lineare Interpolation der Wahrscheinlichkeiten für ganzjährige Alter.

Die mit diesen Übergangswahrscheinlichkeiten errechnete Ausscheideordnung im diskreten Modell ist der Ausscheideordnung im kontinuierlichen Modell, nach der Beschreibung des kontinuierlichen Modells gegenübergestellt (am Ende des Abschnittes über die Approximation der Intensitätsfunktionen).

Zur Untersuchung der Frage, wie sich die Sterblichkeit der Aktiven und jene der Invaliden ändert, wenn sich die Invalidisierung ändert (unter der Voraussetzung, dass die Gesamtsterblichkeit gleich bleibt), wurde diese Ausscheideordnung mit Hilfe von Intensitäten durch ein Differentialgleichungssystem approximiert. Das durch das Differentialgleichungssystem beschriebene kontinuierliche Modell der Ausscheideordnung ermöglicht unterjährige Iterationsschritte, worauf noch im Abschnitt “Anwendungen des kontinuierlichen Modells” eingegangen wird.

Die Bezeichnung der im Differentialgleichungssystem vorkommenden Funktionen wurde analog zur bisherigen Bezeichnungsweise gewählt. Zusätzlich wurden noch die folgenden beiden Funktionen eingeführt:

$R^i(x)$  und  $R^r(x)$       Übergänge zu den Invaliditäts- bzw. Altersrentnern bis zum Alter  $x$

Das die Ausscheideordnung beschreibende Differentialgleichungssystem lautet dann:

$$\frac{dL^a(x)}{dx} = -\mu^a(x)L^a(x) - v^i(x)L^a(x) - v^r(x)L^a(x)$$

$$\frac{dL^i(x)}{dx} = v^i(x)L^a(x) - \mu^i(x)L^i(x)$$

$$\frac{dL^r(x)}{dx} = v^r(x)L^a(x) - \mu^r(x)L^r(x)$$

$$\frac{dV^a(x)}{dx} = \mu^a(x)L^a(x)$$

$$\frac{dV^r(x)}{dx} = \mu^r(x)L^r(x) \quad \frac{dV^i(x)}{dx} = \mu^i(x)L^i(x)$$

$$\frac{dR^r(x)}{dx} = v^r(x)L^a(x) \quad \frac{dR^i(x)}{dx} = v^i(x)L^a(x)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$L^a(x_0) = 100\,000$$

und

$$L^i(x_0) = L^r(x_0) = R^i(x_0) = R^r(x_0) = V^a(x_0) = V^i(x_0) = V^r(x_0) = 0$$

In eingeschränkter Form wurde dieses Differentialgleichungssystem von *P. E. Böhmer* bereits im Jahre 1914 angegeben [2].

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems lässt sich explizit angeben:

$$\begin{aligned} L^a(x) &= L^a(20) e^{\int_{20}^x [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} \\ L^i(x) &= L^a(20) e^{\int_{20}^x \mu^i(\xi) d\xi} \int_{20}^x e^{\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi) - \mu^i(\xi)] d\xi} v^i(\zeta) d\zeta \\ L^r(x) &= L^a(20) e^{\int_{20}^x \mu^r(\xi) d\xi} \int_{20}^x e^{\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi) - \mu^r(\xi)] d\xi} v^r(\zeta) d\zeta \\ V^a(x) &= L^a(20) \int_{20}^x e^{\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} \mu^a(\zeta) d\zeta \\ V^i(x) &= L^a(20) \int_{20}^x \left(1 - e^{\int_{\zeta}^x \mu^i(\xi) d\xi}\right) e^{\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} v^i(\zeta) d\zeta \\ V^r(x) &= L^a(20) \int_{20}^x \left(1 - e^{\int_{\zeta}^x \mu^r(\xi) d\xi}\right) e^{\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} v^r(\zeta) d\zeta \\ R^i(x) &= L^a(20) \int_{20}^x e^{\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} v^i(\zeta) d\zeta \\ R^r(x) &= L^a(20) \int_{20}^x e^{\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} v^r(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Die darin auftretenden Intensitätsfunktionen lassen sich durch Exponentialfunktionen approximieren. Da die Intensitätsfunktionen in den Exponenten auftreten, lassen sich die Integrale nicht durch Quadraturen berechnen. Das Differentialgleichungssystem lässt sich jedoch mit dem Runge-Kutta-Verfahren [12] lösen. Die explizite Lösung kann aber zur Abschätzung der Stabilität des Differentialgleichungssystems verwendet werden.

### Stabilität des Differentialgleichungssystems

In Matrzenschreibweise lässt sich das Differentialgleichungssystem wie folgt anschreiben:

$$\begin{pmatrix} \frac{dL^a(x)}{dx} \\ \frac{dL^i(x)}{dx} \\ \frac{dL^r(x)}{dx} \\ \frac{dV^a(x)}{dx} \\ \frac{dV^i(x)}{dx} \\ \frac{dV^r(x)}{dx} \\ \frac{dR^i(x)}{dx} \\ \frac{dR^r(x)}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu^a(x) - v^i(x) - v^r(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^i(x) & -\mu^i(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^r(x) & 0 & -\mu^r(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu^a(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu^i(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu^r(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^i(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^r(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^a(x) \\ L^i(x) \\ L^r(x) \\ V^a(x) \\ V^i(x) \\ V^r(x) \\ R^i(x) \\ R^r(x) \end{pmatrix}$$

Wird mit  $A$  die Matrix in diesem Gleichungssystem bezeichnet, mit  $y$  der Vektor der Bestände und mit  $y'$  dessen erste Ableitung, so führt dies zu folgender Schreibweise:

$$y' = A(x)y, \quad \text{mit der Anfangsbedingung: } y(20) = y_0.$$

Jeder maximale Satz von linear unabhängigen Lösungen dieses homogenen Differentialgleichungssystems bildet ein sogenanntes Fundamentalsystem; die zugehörige Fundamentalmatrix sei mit  $\Phi(x)$  bezeichnet [1] und [3].

Wie aus der Struktur des Differentialgleichungssystems ersichtlich ist, kann eine Fundamentalmatrix mit folgender Gestalt gewählt werden:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{31} & 0 & \varphi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{51} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varphi_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varphi_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Elemente  $\varphi_{ij}$  dieser Matrix sind im nächsten Abschnitt, der die Abschätzung dieser Funktionen behandelt, explizit angegeben.

Für diese Fundamentalmatrix gilt:

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x), \quad \Phi(20) = I$$

so dass

$$y(x) = \Phi(x)y_0$$

Es gilt nun folgende Abschätzung:

$$\|y(x)\| \leq \|\Phi(x)\| \|y_0\|.$$

Lässt sich

$$\|\Phi(x)\| \leq \text{const} \quad \forall x$$

zeigen, so ist das System hinsichtlich der Anfangsdaten  $y_0$  stabil im Sinne von Liapunov [4], d. h. stabil auf dem nach oben offenen Intervall  $(20, \infty)$ .

Für die vorliegende Untersuchung ist die Stabilität auf dem endlichen Intervall vom Alter 20 bis 70 von Interesse. Um hierüber Aussagen zu machen, ist es erforderlich, möglichst günstige obere Schranken für die Funktionen  $\varphi_{ij}$  anzugeben. Dabei gilt: je niedriger die Schranken sind, um so besser ist die Stabilität des Differentialgleichungssystems. Diese Abschätzungen sind im nächsten Abschnitt angegeben.

Das für die vorliegende Untersuchung interessantere Problem ist, wie das System auf eine Störung in  $A(x)$  reagiert, d. h. wie sich Änderungen der Intensitäten auf die Lösung des Differentialgleichungssystems auswirken.

Die Auswirkungen einer solchen Störung lassen sich durch die Methode der Variation der Konstanten analysieren. Bezeichnet  $\Delta A$  die Störung in  $A$ , so führt dies zu folgendem Differentialgleichungssystem:

$$z' = (A + \Delta A)z, \quad z(20) = y_0.$$

Mit Hilfe des Ansatzes

$$z = y + \Delta z$$

erhält man:

$$y' + \Delta z' = (A + \Delta A)(y + \Delta z) = Ay + \Delta A y + A \Delta z + \Delta A \Delta z$$

so dass unter Vernachlässigung von  $\Delta A \Delta z$  in erster Ordnung gilt:

$$\Delta z' = A \Delta z + \Delta A y, \quad \Delta z(20) = 0$$

Die Methode der Variation der Konstanten liefert:

$$\Delta z = \int_{20}^x \Phi(s) \Phi^{-1}(s) \Delta A(s) y(s) ds.$$

Für die Untersuchung der Auswirkungen einer Störung ist also die Übertragungsmatrix  $\Psi(x, s) = \Phi(x) \Phi^{-1}(s)$  relevant. Die partielle Ableitung von  $\Psi(x, s)$  nach  $x$  wird üblicherweise mit  $\Psi'$  bezeichnet, da  $s$  nur eine Hilfsvariable darstellt.

$\Psi$  erhält man durch Lösung des linearen Systems mit der Anfangsstelle  $x = s$ :

$$\Phi'(x) = A(x) \Phi(x) \quad \left| \Phi^{-1}(s) \right.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit  $\Phi^{-1}(x)$  erhält man:

$$\Psi' = A(x) \Psi$$

Für  $x = s$  ergibt sich:

$$\Psi(s, s) = \Phi(s) \Phi^{-1}(s) = I$$

Um die Stabilität des untersuchten Differentialgleichungssystems hinsichtlich Änderungen in den Intensitäten zu zeigen, ist eine für alle  $x$  und  $s \in [20, 70]$  gültige Schranke für  $\|\Psi(x, s)\|$  anzugeben. Aufgrund der speziellen Struktur des Differentialgleichungssystems genügt es, eine Schranke für  $\|\Psi(x, 20)\|$ , d. h. für  $\|\Phi(x)\|$  herzuleiten.

### Abschätzung der Elemente $\varphi_{ij}$ der Matrix $\Phi$

Zur Abschätzung der Matrix  $\Phi$  ist der Wertebereich der Intensitäten zu beachten. In der vorliegenden Arbeit gelten für die Intensitäten folgende Grenzen:

$$0,0002 \leq v^i(\xi) \leq 0,1$$

$$v^r(\xi) = 0 \quad \text{für } x < 59,6 \quad \text{und}$$

$$0 \leq v^r(\xi) \leq 3,0 \quad \text{für } x \geq 59,6$$

$$0,0005 \leq \mu^a(\xi) \leq 0,03$$

$$0,025 \leq \mu^i(\xi) \leq 0,045$$

$$0,0005 \leq \mu^r(\xi) \leq 0,06$$

$$\varphi_{11} = e^{-\int_{20}^x [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} \leq e^{-\int_{20}^{59,6} 0,0005 d\xi} = 1$$

$$\text{wegen } \mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi) \geq 0,0005 \quad \forall \xi$$

$$\varphi_{21} = e^{-\int_{20}^x \mu^i(\xi) d\xi} \underbrace{\int_{20}^x e^{20} \underbrace{[-\mu^a(\xi) - v^i(\xi) - v^r(\xi) + \mu^i(\xi)] d\xi}_{\leq e^{1,55} \leq 4,73}}_{\leq 1} \underbrace{\int_{57}^{\zeta} v^i(\xi) d\xi}_{\leq 0,1} \leq 25$$

$$\varphi_{22} = e^{-\int_{20}^x \mu^i(\xi) d\xi} \leq e^{-\int_{20}^{59,6} 0,025 d\xi} = 1$$

$$\text{wegen } \mu^i(\xi) \geq 0,025 \quad \forall \xi$$

$$\varphi_{31} = \underbrace{e^{-\int_{20}^x \mu^r(\xi) d\xi}}_{\leq 1} \int_{20}^x \underbrace{e^{\int_{20}^\zeta [-\mu^a(\xi) - v^i(\xi) - v^r(\xi) + \mu^r(\xi)] d\xi}}_{\leq e^0 = 1} \underbrace{v^r(\zeta) d\xi}_{\leq 3} \leq 156$$

$$\varphi_{33} = e^{-\int_{20}^x \mu^r(\xi) d\xi} \leq e^{-\int_{20}^{20} 0,0005 d\xi} \leq 1$$

$$\varphi_{41} = \int_{20}^x e^{-\int_{20}^\zeta [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} \mu^a(\zeta) d\xi$$

(mit Hilfe der Abschätzung von  $\varphi_{11}$ )

$$\leq \int_{20}^x 1 \mu^a(\zeta) d\xi \leq \int_{20}^{72} 0,03 d\xi = 1,56$$

$$\varphi_{51} = \int_0^x \left( 1 - e^{-\int_0^\zeta \mu^i(\xi) d\xi} \right) \underbrace{e^{-\int_{20}^\zeta [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi}}_{\leq 1} v^i(\zeta) d\xi$$

$$\leq \int_{20}^{72} 1 v^i(\zeta) d\xi \leq \int_{20}^{72} 0,1 d\xi = 5,2$$

$\varphi_{61}$  analog  $\varphi_{51}$  mit  $v^i \rightarrow v^r$  und  $\mu^i \rightarrow \mu^r$

$$\varphi_{61} \leq \int_{20}^x 1 v^r(\xi) d\xi \leq \int_{20}^{59,6} + \int_{59,6}^{66,4} + \int_{66,4}^{72} d\xi \leq 6,8 \cdot 2 + 5,6 \cdot 0,5 \leq 16,4$$

$\varphi_{71}$  analog  $\varphi_{41}$ :

$$\varphi_{71} \leq \int_{20}^{72} v^i(\xi) d\xi \leq 5,2$$

$\varphi_{81}$  ebenfalls analog  $\varphi_{41}$ :

$$\varphi_{81} \leq \int_{20}^{72} v^r(\xi) d\xi \leq 156$$

Damit sind alle Elemente der Matrix  $\Phi$  abgeschätzt, womit die Stabilität des Systems nachgewiesen ist.

### Approximation der Intensitätsfunktionen

Wie bereits erwähnt, wurde das Differentialgleichungssystem mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens numerisch gelöst. Hierzu ist es erforderlich, die darin auftretenden Intensitätsfunktionen zu approximieren.

Die Sterbeintensitäten der Aktiven und der Altersrentner wurden, wie auch in der Arbeit "Analytische Modelle in der Personenversicherung" [7], durch Exponentialfunktionen approximiert. In dieser Arbeit wurden zur Approximation der Intensitäten mehrere Verteilungen untersucht (u. a. Beta-Verteilungen, log-normal-Verteilung). Dabei zeigte sich, dass die Approximation der Sterbeintensitäten durch Exponentialfunktionen die besten Resultate liefert.

Die Sterbeintensität der Invaliden wurde durch eine Konstante dargestellt. Wie die Abbildung 1 zeigt, wird damit die Sterbeintensität der Invaliden im Altersbereich 40 bis 65 recht gut approximiert. Die Ungenauigkeit in den niedrigen Altern wirkt sich – auch wegen der iterativen Berechnung – nur wenig auf das Resultat aus.

Zur Darstellung der Invalidisierungsintensität wurde der Altersbereich in zwei Abschnitte geteilt und für jeden Abschnitt eine Exponentialfunktion bestimmt. Die Sterbeintensitäten und die Invalidisierungsintensität liegen in einem Bereich, in dem sich die Wahrscheinlichkeiten und die Intensitäten nur gering unterscheiden. Die Parameter der Exponentialfunktionen wurden in erster Annäherung so bestimmt, dass diese Funktionen dem Verlauf der Wahrscheinlichkeiten entsprechen.

Für die Sterbeintensitäten wurden folgende Funktionen verwendet:

Sterbeintensität der Aktiven:

$$\mu^a(x) = C^a e^{D^a x} \quad \text{für} \quad 20,5 \leq x \leq 71,5$$

mit  $C^a = 0,0001493$  und  $D^a = 0,07316$

Sterbeintensität der Invaliden:

$$\mu^i(x) = C^i \quad \text{für } 20,5 \leq x \leq 71,5$$

mit  $C^i = 0,0045$

Sterbeintensität der Altersrentner:

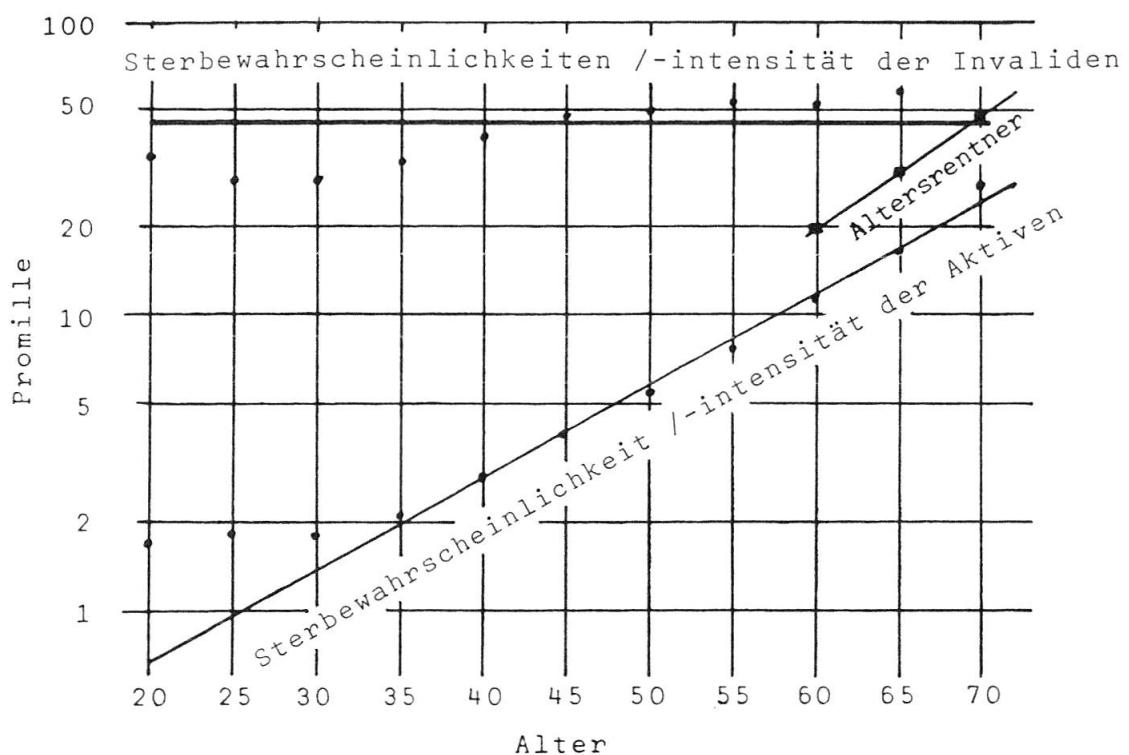
$$\mu^r(x) = C^r e^{D^r x} \quad \text{für } 59,5 \leq x \leq 71,5$$

mit  $C^r = 0,00009385$  und  $D^r = 0,08891$

Abbildung 1 zeigt die Sterbewahrscheinlichkeiten nach den Beobachtungen des Hauptverbandes der österreichischen Sozialversicherungsträger und die verwendeten Funktionen für die Sterbeintensitäten im logarithmischen Massstab.

Abbildung 1

Sterbewahrscheinlichkeiten und Sterbeintensitäten, logarithmischer Massstab



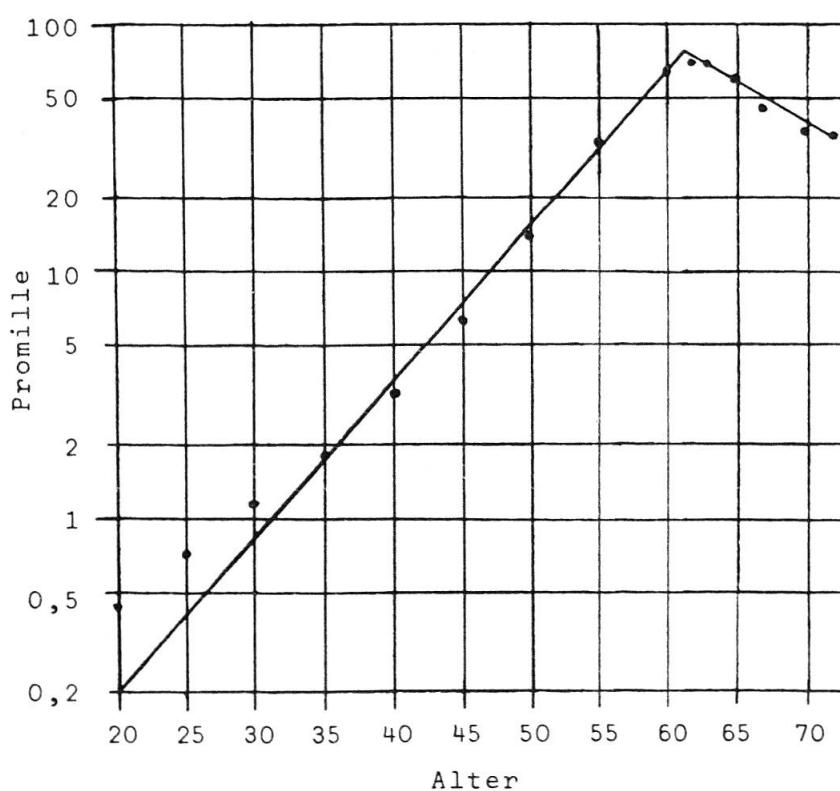
Für die Invalidisierungsintensität wurde folgende Funktion verwendet:

$$v^i(x) = \begin{cases} 0,00001125e^{0,1439x} \dots & \text{für } 20,5 \leq x < 61,4 \\ 8,5298e^{-0,076606x} \dots & \text{für } 61,4 \leq x \leq 71,5 \end{cases}$$

Abbildung 2 zeigt die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten nach den Beobachtungen des Hauptverbandes der österreichischen Sozialversicherungsträger und die verwendete Funktion der Invalidisierungsintensität im logarithmischen Massstab.

Abbildung 2

Invalidisierungswahrscheinlichkeiten und Invalidisierungsintensität, logarithmischer Massstab



Die Zugangsintensitäten für die Altersrentner liegen in einem Bereich, in dem sich die Wahrscheinlichkeiten von den Intensitäten bereits stark unterscheiden. Hier wurde die erste Abbildung der Funktion  $\bar{L}^a(x)$  bestimmt und daraus die Zugangsintensität ermittelt. Dabei ist  $\bar{L}^a(x)$  eine einfache Ausscheideordnung, bei der als einzige Ausscheideursache der Übergang in den Ruhestand berücksichtigt wird.

Zur analytischen Darstellung der Zugangsintensität für Altersrentner wurde der Altersbereich auf mehrere Abschnitte aufgeteilt.

Die Sprungstellen wurden so gewählt, dass sie nicht mit den Schrittstellen des Runge-Kutta-Verfahrens zusammenfallen.

Für die Zugangsintensität für Altersrentner wurde folgende Funktion verwendet:

$$v^r(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 20,5 \leq x < 59,6 \\ 0,55 & \text{für } 59,6 \leq x < 61,4 \\ 4,6 \cdot 10^{-17} \cdot e^{0,578x} & \text{für } 61,4 \leq x < 66,4 \\ 3,18 \cdot 10^{10} \cdot e^{-0,3746x} & \text{für } 66,4 \leq x \end{cases}$$

Abbildung 3 zeigt die Zugangswahrscheinlichkeiten nach den Beobachtungen des Hauptverbandes der österreichischen Sozialversicherungsträger und die verwendete Funktion der Zugangsintensität für Altersrentner im logarithmischen Massstab.

Abbildung 3

Zugangswahrscheinlichkeiten und Zugangsintensität für Alterspensionisten, logarithmischer Massstab

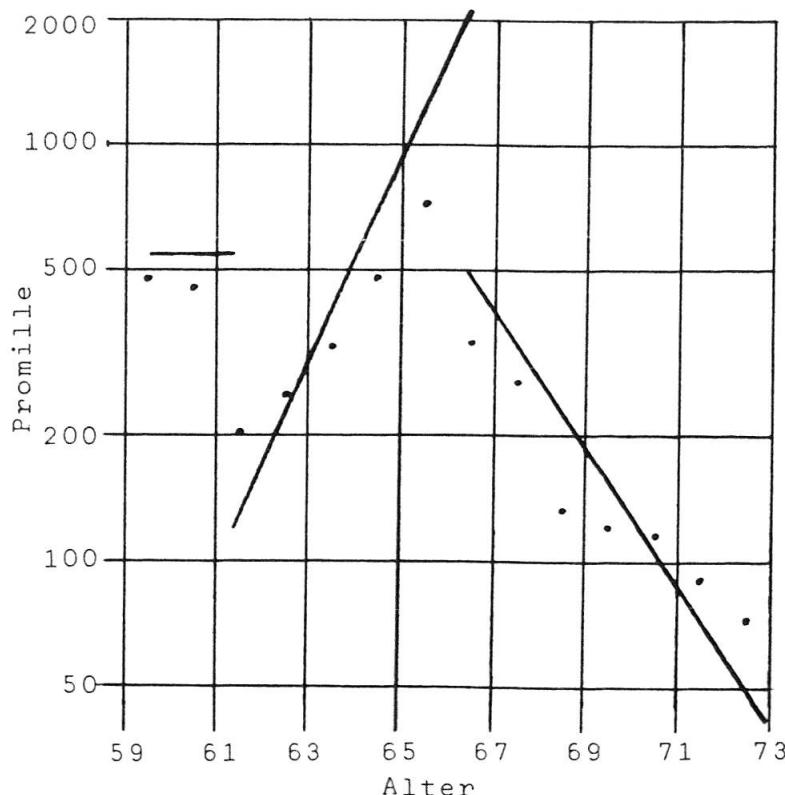


Tabelle 1

Mit den am Anfang der Arbeit beschriebenen Wahrscheinlichkeiten errechnet sich folgende Ausscheideordnung – diskretes Modell:

x	L <sup>a</sup>	i <sup>i</sup>	i <sup>r</sup>	q <sup>a</sup>	L <sup>i</sup>	L <sup>r</sup>	q <sup>i</sup>	q <sup>r</sup>	x
20,5	100.000,0	,485	0,000	1.715	0,0	0,0	32.670	0,000	20,5
21,5	99.780,0	,550	0,000	1.765	47,7	0,0	30.710	0,000	21,5
22,5	99.549,0	,605	0,000	1.785	100,3	0,0	29.590	0,000	22,5
23,5	99.311,1	,660	0,000	1.790	156,6	0,0	28.950	0,000	23,5
24,5	99.067,8	,715	0,000	1.790	216,7	0,0	28.535	0,000	24,5
25,5	98.819,6	,775	0,000	1.780	280,3	0,0	28.250	0,000	25,5
26,5	98.567,1	,850	0,000	1.770	347,9	0,0	28.155	0,000	26,5
27,5	98.308,9	,930	0,000	1.765	420,7	0,0	28.265	0,000	27,5
28,5	98.043,9	1,020	0,000	1.765	499,0	0,0	28.180	0,000	28,5
29,5	97.770,9	1,120	0,000	1.780	583,4	0,0	28.725	0,000	29,5
30,5	97.487,3	1,230	0,000	1.805	674,5	0,0	29.050	0,000	30,5
31,5	97.191,5	1,355	0,000	1.840	773,1	0,0	29.570	0,000	31,5
32,5	96.880,9	1,490	0,000	1.890	880,0	0,0	30.315	0,000	32,5
33,5	96.553,5	1,635	0,000	1.955	995,5	0,0	31.260	0,000	33,5
34,5	96.206,9	1,795	0,000	2.035	1.119,8	0,0	32.405	0,000	34,5
35,5	95.838,4	1,980	0,000	2.135	1.253,4	0,0	33.725	0,000	35,5
36,5	95.444,0	2,190	0,000	2.255	1.397,7	0,0	35.130	0,000	36,5
37,5	95.019,8	2,430	0,000	2.390	1.553,9	0,0	36.520	0,000	37,5
38,5	94.561,8	2,710	0,000	2.545	1.723,8	0,0	37.835	0,000	38,5
39,5	94.064,9	3,040	0,000	2.720	1.910,0	0,0	39.115	0,000	39,5
40,5	93.523,0	3,435	0,000	2.910	2.115,7	0,0	40.440	0,000	40,5
41,5	92.929,6	3,900	0,000	3.120	2.344,9	0,0	41.840	0,000	41,5
42,5	92.277,3	4,435	0,000	3.345	2.601,6	0,0	43.265	0,000	42,5
43,5	91.559,4	5,055	0,000	3.585	2.889,5	0,0	44.605	0,000	43,5
44,5	90.768,3	5,780	0,000	3.840	3.213,1	0,0	45.775	0,000	44,5
45,5	89.895,1	6,635	0,000	4.110	3.578,6	0,0	46.750	0,000	45,5
46,5	88.929,2	7,665	0,000	4.390	3.993,8	0,0	47.520	0,000	46,5
47,5	87.857,1	8,920	0,000	4.680	4.469,5	0,0	48.115	0,000	47,5
48,5	86.662,3	10,460	0,000	4.980	5.019,3	0,0	48.620	0,000	48,5
49,5	85.324,2	12,355	0,000	5.300	5.659,7	0,0	49.115	0,000	49,5
50,5	83.817,8	14,675	0,000	5.650	6.410,0	0,0	49.685	0,000	50,5
51,5	82.114,2	17,505	0,000	6.030	7.291,0	0,0	50.370	0,000	51,5
52,5	80.181,6	20,935	0,000	6.450	8.325,0	0,0	51.125	0,000	52,5
53,5	77.985,9	25,045	0,000	6.915	9.535,0	0,0	51.835	0,000	53,5
54,5	75.493,4	29,880	0,000	7.430	10.943,3	0,0	52.385	0,000	54,5
55,5	72.676,8	35,435	0,000	7.990	12.566,7	0,0	52.720	0,000	55,5
56,5	69.520,8	41,630	0,000	8.600	14.411,6	0,0	52.840	0,000	56,5
57,5	66.028,8	48,250	0,000	9.260	16.467,8	0,0	52.785	0,000	57,5
58,5	62.231,5	54,925	0,000	10.000	18.700,3	0,0	52.600	0,000	58,5
59,5	58.191,1	61,105	408,090	10.800	21.044,9	0,0	52.375	*	59,5
60,5	30.259,6	65,995	406,290	11.600	23.405,3	23.631,5	52.275	20,420	60,5
61,5	15.617,5	68,635	205,670	12.500	24.126,6	35.317,6	52.485	22.365	61,5
62,5	11.138,3	68,330	252,030	13.550	23.904,1	37.703,8	53.160	24.500	62,5
63,5	7.419,1	65,120	332,340	14,700	23.374,2	39.552,9	54.385	26.850	63,5
64,5	4.361,2	59,835	488,190	15,950	22.573,0	40.923,5	56,160	29.430	64,5
65,5	1.901,6	53,740	728,710	17,400	21.558,9	41.816,9	58,455	32.265	65,5
66,5	380,6	47,965	339,350	19,150	20.397,9	41.831,0	61,250	35.375	66,5
67,5	225,9	43,180	271,330	21,150	19.166,2	40.478,1	64,535	38.790	67,5
68,5	150,1	39,660	135,970	23,350	17.938,8	38.968,1	68,290	42.545	68,5
69,5	120,2	37,400	122,770	25,750	16.719,5	37.330,2	72,485	46.660	69,5
70,5	97,9	36,155	117,780	28,350	15.511,9	35.602,8	77,090	51.160	70,5
71,5	80,0	0,000	1000,000	0,000	14.319,5	33.792,5	82,085	56.070	71,5
72,5	0,0	0,000	1000,000	0,000	13.144,1	31.975,6	87,480	61.425	72,5
73,5	0,0	0,000	1000,000	0,000	11.994,2	30.011,5	93,305	67.255	73,5
74,5	0,0	0,000	1000,000	0,000	10.875,1	27.993,1	99,595	73.580	74,5
75,5	0,0	0,000	1000,000	0,000	9.792,0	25.933,3	106,375	80,430	75,5

\* $q'_{59,5} = 9,745$  halbjähriger Wert, nicht aufgeführt, da Pensionierung erst ab Alter 60.

Tabelle 2

Mit den beschriebenen Intensitäten errechnet sich folgende Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell:

x	L <sup>a</sup>	q <sup>a</sup>	μ <sup>a</sup>	i <sup>i</sup>	v <sup>i</sup>	L <sup>i</sup>	i <sup>r</sup>	v <sup>r</sup>	L <sup>r</sup>	l <sup>i</sup>	q <sup>i</sup>	μ <sup>i</sup>	μ <sup>r</sup>	μ	Diff
20,5	100.000,0	,694	,669	,231	,215	0,0	0,000	0,000	0,0	100.000,0	43,284	45,000	,581	,669	-,000
21,5	99.907,5	,746	,720	,267	,248	22,6	0,000	0,000	0,0	95.671,6	43,736	45,000	,635	,730	,000
22,5	99.806,3	,803	,774	,308	,287	47,7	0,000	0,000	0,0	91.487,2	43,828	45,000	,694	,795	,000
23,5	99.695,4	,864	,833	,356	,331	75,7	0,000	0,000	0,0	87.477,6	43,867	45,000	,758	,867	,000
24,5	99.573,8	,929	,896	,411	,382	107,0	0,000	0,000	0,0	83.640,2	43,888	45,000	,829	,944	,000
25,5	99.440,4	1,000	,964	,474	,441	142,4	0,000	0,000	0,0	79.969,4	43,901	45,000	,906	1,027	,000
26,5	99.293,8	1,076	1,038	,548	,510	182,2	0,000	0,000	0,0	76.458,7	43,910	45,000	,990	1,118	,000
27,5	99.132,6	1,157	1,116	,632	,589	227,4	0,000	0,000	0,0	73.101,4	43,916	45,000	1,082	1,217	,000
28,5	98.955,2	1,245	1,201	,730	,680	278,7	0,000	0,000	0,0	69.891,1	43,921	45,000	1,183	1,324	,000
29,5	98.759,7	1,339	1,292	,843	,785	337,2	0,000	0,000	0,0	66.821,4	43,925	45,000	1,293	1,441	,000
30,5	98.514,2	1,441	1,390	,974	,906	403,8	0,000	0,000	0,0	63.886,3	43,927	45,000	1,413	1,568	,000
31,5	98.306,3	1,550	1,496	1,124	1,047	479,9	0,000	0,000	0,0	61.079,9	43,930	45,000	1,544	1,707	,000
32,5	98.043,4	1,667	1,609	1,298	1,208	566,9	0,000	0,000	0,0	58.396,7	43,932	45,000	1,688	1,859	,000
33,5	97.752,7	1,794	1,732	1,498	1,396	666,4	0,000	0,000	0,0	55.831,2	43,933	45,000	1,845	2,025	,000
34,5	97.430,9	1,929	1,863	1,730	1,611	780,4	0,000	0,000	0,0	53.378,4	43,934	45,000	2,016	2,206	,000
35,5	97.074,4	2,075	2,004	1,997	1,861	911,0	0,000	0,000	0,0	51.033,2	43,936	45,000	2,204	2,404	,000
36,5	96.679,0	2,232	2,157	2,306	2,149	1.060,6	0,000	0,000	0,0	48.791,1	43,937	45,000	2,409	2,622	,000
37,5	96.240,2	2,401	2,320	2,662	2,481	1.232,0	0,000	0,000	0,0	46.647,3	43,938	45,000	2,633	2,860	,000
38,5	95.752,9	2,583	2,496	3,073	2,866	1.428,5	0,000	0,000	0,0	44.597,8	43,939	45,000	2,878	3,121	,000
39,5	95.211,4	2,778	2,686	3,548	3,309	1.653,5	0,000	0,000	0,0	42.638,2	43,940	45,000	3,145	3,408	,000
40,5	94.609,1	2,988	2,890	4,095	3,821	1.911,2	0,000	0,000	0,0	40.764,7	43,941	45,000	3,438	3,724	,000
41,5	93.939,0	3,213	3,109	4,727	4,413	2.206,2	0,000	0,000	0,0	38.973,5	43,942	45,000	3,757	4,070	,000
42,5	93.193,1	3,455	3,345	5,456	5,096	2.543,5	0,000	0,000	0,0	37.260,9	43,943	45,000	4,107	4,452	,000
43,5	92.362,7	3,715	3,599	6,297	5,884	2.929,0	0,000	0,000	0,0	35.623,6	43,944	45,000	4,489	4,872	,000
44,5	91.438,0	3,995	3,872	7,267	6,795	3.369,1	0,000	0,000	0,0	34.058,1	43,945	45,000	4,906	5,334	,000
45,5	90.408,2	4,295	4,166	8,395	7,846	3.870,9	0,000	0,000	0,0	32.561,5	43,946	45,000	5,362	5,843	,000
46,5	89.261,8	4,617	4,482	9,675	9,061	4.442,2	0,000	0,000	0,0	31.130,5	43,948	45,000	5,861	6,403	,000
47,5	87.986,1	4,963	4,823	11,162	10,463	5.091,6	0,000	0,000	0,0	29.762,4	43,949	45,000	6,106	7,020	,000
48,5	86.567,3	5,334	5,189	12,876	12,083	5.828,4	0,000	0,000	0,0	28.154,4	43,951	45,000	7,001	7,700	,000
49,5	84.990,8	5,732	5,582	14,851	13,953	6.662,4	0,000	0,000	0,0	27.203,8	43,953	45,000	7,652	8,448	,000
50,5	83.241,4	6,159	6,006	17,126	16,112	7.604,0	0,000	0,000	0,0	26.008,1	43,955	45,000	8,364	9,270	,000
51,5	81.303,2	6,616	6,462	19,745	18,606	8.664,0	0,000	0,000	0,0	24.864,9	43,958	45,000	9,141	10,173	,000
52,5	79.159,9	7,106	6,953	22,760	21,485	9.853,2	0,000	0,000	0,0	23.771,9	43,960	45,000	9,991	11,164	,000
53,5	76.795,7	7,630	7,480	26,229	24,810	11.182,2	0,000	0,000	0,0	22.726,9	43,963	45,000	10,920	12,249	,000
54,5	74.195,5	8,190	8,048	30,217	28,650	12.660,5	0,000	0,000	0,0	21.727,7	43,967	45,000	11,936	13,434	,000
55,5	71.345,9	8,788	8,659	34,800	33,084	14.296,6	0,000	0,000	0,0	20.772,4	43,971	45,000	13,046	14,725	,000
56,5	68.236,1	9,426	9,316	40,063	38,205	16.096,2	0,000	0,000	0,0	19.859,0	43,975	45,000	14,259	16,127	,000
57,5	64.859,1	10,107	10,023	46,101	44,118	18.062,0	0,000	0,000	0,0	18.985,7	43,980	45,000	15,584	17,642	,000
58,5	61.213,6	10,831	10,784	53,022	50,946	20.191,9	0,000	0,000	0,0	18.150,8	43,985	45,000	17,033	19,271	,000
59,5	57.304,9	9,482	11,603	49,664	58,831	22.478,1	369,600	0,000	0,0	17.352,4	44,221	45,000	18,617	21,012	,000
60,5	32.735,7	9,577	12,483	53,780	67,936	24.267,2	379,553	550,000	20.979,6	16.585,1	44,138	45,000	20,348	24,718	,000
61,5	18.236,7	12,356	13,431	65,690	76,712	24.917,7	149,709	126,073	32.806,2	15.853,0	44,067	45,000	22,240	27,591	,000
62,5	14.083,2	12,576	14,450	57,652	71,054	24.991,3	251,096	224,722	34.751,9	15.154,4	44,062	45,000	24,308	29,432	,000
63,5	9.557,9	12,275	15,547	48,582	65,815	24.684,2	402,137	400,561	37.372,0	14.486,7	44,052	45,000	26,569	31,451	,000
64,5	5.132,7	11,204	16,727	38,364	60,961	24.050,9	597,893	713,987	40.137,4	13.848,5	44,036	45,000	29,039	33,665	,000
65,5	1.809,5	9,319	17,997	27,682	56,465	23.184,3	759,879	1272,661	41.955,4	13.238,7	44,016	45,000	31,739	35,960	,000
66,5	367,5	15,757	19,363	39,727	52,301	22.212,9	321,455	482,793	41.932,2	12.656,0	44,004	45,000	34,690	38,153	,001
67,5	229,0	18,080	20,832	39,180	48,444	21.249,7	234,599	331,951	40.553,9	12.099,1	44,003	45,000	37,916	40,279	,001
68,5	162,2	20,352	22,413	37,927	44,872	20.323,4	168,207	228,238	39.029,8	11.566,7	44,003	45,000	41,441	42,605	,002
69,5	125,4	22,599	24,115	36,229	41,563	19.435,1	119,091	156,928	37,401,1	11.057,7	44,003	45,000	45,295	45,147	,002
70,5	103,1	24,853	25,945	34,283	38,498	18.584,4	83,567	107,898	35,685,3	10.571,1	44,003	45,000	49,506	47,921	,001
71,5	88,4	27,147	27,914	32,228	35,659	17.770,1	58,272	74,187	33,893,1	10.106,0	44,003	45,000	54,109	50,937	,000

Die Entwicklung der Bestände im kontinuierlichen Modell zeigt, dass diese Ausscheideordnung eine recht gute Annäherung der diskreten Ausscheideordnung ist, und somit auch die verwendeten Funktionen eine gute Approximation der vorkommenden Intensitäten darstellen.

Aus der nach dem kontinuierlichen Modell ermittelten Ausscheideordnung wurden Übergangswahrscheinlichkeiten errechnet. Die Bezeichnung der Übergangswahrscheinlichkeiten folgt der Terminologie von *Klaus Heubeck* [5], *Müller* [8], *Saxer* [11] bzw. *Wolff* [14].

### Abhängige und partielle Übergangswahrscheinlichkeiten

Die abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben sich nach folgenden Formeln:

$$q_x^a = \frac{V_{x+1}^a - V_x^a}{L_x^a}$$

$$i_x^i = \frac{R_{x+1}^i - R_x^i}{L_x^a}$$

$$i_x^r = \frac{R_{x+1}^r - R_x^r}{L_x^a}$$

Für die abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten gilt:

$$1 - \frac{L_{x+1}^a}{L_x^a} = q_x^a + i_x^i + i_x^r$$

Beide Seiten dieser Gleichung lassen sich bei der näherungsweisen Berechnung der Ausscheideordnung bestimmen. Die dabei auftretenden Differenzen sind in Tabelle 2 in der Spalte “Diff.” in tausendstel Promille als Kontrollwert angegeben.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten der Invaliden wurden näherungsweise aus der Beziehung

$$L_{x+1}^i = L_x^i + L_x^a i_x^i \left( 1 - \frac{q_x^i}{2} \right) - L_x^i q_x^i$$

errechnet.

Die errechneten abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten sind in Tabelle 2 "Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell" angegeben.

Die partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten  ${}^*q_x^{aa}$ ,  ${}^*i_x^i$  und  ${}^*i_x^r$  wurden nach den gleichen Formeln berechnet, denen jedoch Ausscheideordnungen zugrundegelegt wurden, bei denen alle Übergangsintensitäten, bis auf jeweils eine, Null gesetzt wurden.

Für die partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten gilt:

$$1 - \frac{L_{x+1}^a}{L_x^a} = (1 - {}^*q_x^{aa})(1 - {}^*i_x^i)(1 - {}^*i_x^r)$$

Es ergeben sich folgende Werte:

Tabelle 3

Partielle Übergangswahrscheinlichkeiten

x	${}^*q^a$	$\mu^a$	${}^*i^i$	$\nu^i$	x	${}^*q^a$	$\mu^a$	${}^*i^i$	$\nu^i$	${}^*i^r$	$\nu^r$
20,5	,694	,669	,231	,215	46,5	4,640	4,482	9,698	9,061	0,000	0,000
21,5	,746	,720	,267	,248	47,5	4,991	4,823	11,190	10,463	0,000	0,000
22,5	,803	,774	,308	,287	48,5	5,369	5,189	12,911	12,083	0,000	0,000
23,5	,864	,833	,356	,331	49,5	5,725	5,582	14,894	13,953	0,000	0,000
24,5	,930	,896	,411	,382	50,5	6,212	6,006	17,180	16,112	0,000	0,000
25,5	1,000	,964	,475	,441	51,5	6,682	6,462	19,812	18,606	0,000	0,000
26,5	1,076	1,038	,548	,510	52,5	7,187	6,953	22,843	21,485	0,000	0,000
27,5	1,158	1,116	,633	,589	53,5	7,731	7,480	26,331	24,810	0,000	0,000
28,5	1,245	1,201	,731	,680	54,5	8,315	8,048	30,344	28,650	0,000	0,000
29,5	1,340	1,292	,844	,785	55,5	8,943	8,659	34,958	33,081	0,000	0,000
30,5	1,441	1,390	,974	,906	56,5	9,619	9,316	40,258	38,205	0,000	0,000
31,5	1,551	1,496	1,125	1,047	57,5	10,345	10,023	46,342	44,118	0,000	0,000
32,5	1,668	1,609	1,299	1,208	58,5	11,126	10,784	53,320	50,946	0,000	0,000
33,5	1,795	1,732	1,500	1,396	59,5	11,965	11,603	61,314	58,831	384,063	0,000
34,5	1,931	1,863	1,732	1,611	60,5	12,868	12,483	70,377	67,936	392,924	550,000
35,5	2,077	2,004	1,999	1,861	61,5	13,838	13,431	71,186	76,712	156,902	126,073
36,5	2,235	2,157	2,309	2,149	62,5	14,880	14,450	66,114	71,054	262,300	224,722
37,5	2,404	2,320	2,665	2,481	63,5	16,000	15,547	61,391	65,815	418,567	400,561
38,5	2,587	2,496	3,077	2,866	64,5	17,204	16,727	56,996	60,961	619,610	713,987
39,5	2,783	2,686	3,553	3,309	65,5	18,498	17,997	52,906	56,465	781,495	1272,661
40,5	2,994	2,890	4,101	3,821	66,5	19,888	19,363	49,102	52,301	331,470	482,793
41,5	3,220	3,109	4,735	4,413	67,5	21,381	20,832	45,565	48,444	241,843	331,951
42,5	3,465	3,345	5,465	5,096	68,5	22,985	22,413	42,276	44,872	173,340	228,238
43,5	3,727	3,599	6,309	5,884	69,5	24,708	24,115	39,221	41,563	122,682	156,928
44,5	4,009	3,872	7,281	6,795	70,5	26,559	25,945	36,382	38,498	86,062	107,898
45,5	4,313	4,166	8,404	7,846	71,5	28,546	27,914	33,745	35,659	60,000	74,187

In jenem Altersbereich, in dem die Wahrscheinlichkeiten nur sehr kleine Werte annehmen, unterscheiden sich die abhängigen und die partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten kaum. Auffällig sind die Unterschiede in dem Altersbereich, in dem die Zugangswahrscheinlichkeit für Altersrente mit hohen Werten wirksam wird, wie z. B. beim Alter 65,5. Bei den abhängigen Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven für dieses Alter werden den Aktiven im Alter 65,5 die Todesfälle jener, die als Aktive sterben, gegenübergestellt. Da im Laufe des Jahres jedoch über 70 % der Aktiven in den Ruhestand treten und nur die Todesfälle jener gezählt werden, die als Aktive sterben, ergibt sich eine bedeutend niedrigere Zahl der Todesfälle und damit auch eine wesentlich niedrigere Sterbewahrscheinlichkeit als im Jahr davor.

Dem gegenüber zeigen die berechneten partiellen Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven einen monoton steigenden Verlauf.

Die Unterschiede der anderen Übergangswahrscheinlichkeiten erklären sich analog.

### **Anwendungen des kontinuierlichen Modells**

Gewisse Fragen lassen sich nur mit dem kontinuierlichen Modell elegant untersuchen. So z. B. bedient sich *Wolff* des kontinuierlichen Modells bei der Untersuchung der Frage "In welcher Weise wirkt sich eine Verminderung der Sterblichkeit in einer Untergesamtheit für ein bestimmtes Alter auf die Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung aus?" [15]. Auch die umfangreichen Untersuchungen über verschiedene Todesursachen von *Preston/Keyfitz/Schoen* [13] verwenden das kontinuierliche Modell.

Das kontinuierliche Modell ermöglicht es auch, die oben beschriebenen Unterschiede zwischen den abhängigen und den partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten zu untersuchen.

Darüber hinaus ist es möglich, die Auswirkungen der Veränderung einer Übergangswahrscheinlichkeit auf die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten quantitativ zu bestimmen.

Im folgenden wird untersucht, wie sich eine Veränderung der Invalidisierung auf die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven und der Invaliden auswirkt.

Dabei wurde angenommen, dass aus z. B. wirtschaftlichen Gründen mehr Personen die Invaliditätspension in Anspruch nehmen, wobei sich jedoch die Invalidität und damit das individuelle Sterblichkeitsrisiko nicht erhöht.

Dies führt zu

*Voraussetzung 1:* Die Sterbeintensität des Gesamtbestandes bleibt unverändert (vor und nach der Änderung der Invalidisierungsintensität).

Die Auswirkungen einer Veränderung der Invalidisierungsintensität lassen sich nun in mehreren Schritten berechnen. Zunächst wird die Ausscheideordnung vor der Veränderung berechnet und damit auch die Sterbeintensität des Gesamtbestandes, nach folgender Beziehung:

$$\mu(x)L(x) = \mu^a(x)L^a(x) + \mu^i(x)L^i(x) \quad \text{für } x \leq 59,5$$

Dann wird die Invalidisierungsintensität erhöht und iterativ eine neue Ausscheideordnung berechnet. Durch die Veränderung der Invalidisierungsintensität ergeben sich an der Stelle  $x + h$  neue Werte der Ausscheideordnung  $\mu_1^a(x + h)$ ,  $L_1^a(x + h)$ ,  $\mu_1^i(x + h)$  und  $L_1^i(x + h)$  sowie daraus auch  $\mu_1(x + h)$  und  $L_1(x + h)$ .

$h$  bedeutet dabei die Schrittweite im Runge-Kutta-Verfahren. Die Gesamt-Sterbeintensität erhöht sich bei diesem Berechnungsschritt zunächst von  $\mu(x + h)$  auf  $\mu_1(x + h)$ .

Es ist nun noch eine Annahme notwendig, wie sich diese Änderung der Gesamt-Sterbeintensität  $\mu$  auf die Sterbeintensität der Aktiven  $\mu^a$  und jene der Invaliden  $\mu^i$  aufteilt. Hier sind mehrere Annahmen möglich: z. B.

- dass sich die Änderung nur auf die Sterbeintensität der Invaliden auswirkt,
- oder dass sich die Sterbeintensitäten der Aktiven und Invaliden im gleichen Verhältnis ändern,
- oder dass sich die Änderung gewichtet mit der Anzahl der Aktiven und Invaliden auswirkt.

Für die hier im weiteren vorgestellte Untersuchung wurde folgende Annahme getroffen:

*Voraussetzung 2:* Die Sterbeintensitäten der Aktiven und der Invaliden ändern sich im gleichen Verhältnis.

Die Berechnung geht dann folgendermassen vor sich:

Man berechnet zunächst den Faktor  $f_1(x + h) = \mu(x + h)/\mu_1(x + h)$ . Der Faktor  $f_1(x + h)$  ist kleiner als 1, da sich die Gesamt-Sterbeintensität bei den Iterationsschritten erhöhen würde. Mit diesem Faktor wird nun die

Sterbeintensität der Aktiven und der Invaliden vermindert:

$$\mu_2^a(x+h) = f_1(x+h)\mu^a(x+h)$$

und

$$\mu_2^i(x+h) = f_1(x+h)\mu^i(x+h)$$

Dann wird mit den neuen Werten  $\mu_2^a(x+h)$  und  $\mu_2^i(x+h)$  die Ausscheideordnung an der Stelle  $x+h$  nochmals berechnet, und daraus mit der Beziehung

$$\mu_2(x+h) = \frac{\mu_2^a(x+h)L_2^a(x+h) + \mu_2^i(x+h)L_2^i(x+h)}{L_2^a(x+h) + L_2^i(x+h)}$$

die Gesamt-Sterbeintensität  $\mu_2(x+h)$ . Mit diesem neu gewonnenen  $\mu_2(x+h)$  kann ein neuer Faktor  $f_2(x+h) = \mu(x+h)/\mu_2(x+h)$  errechnet werden. Mit dem  $f_2(x+h)$  werden die bereits verminderten  $\mu_2^a(x+h)$  und  $\mu_2^i(x+h)$  nochmals vermindert. Man erhält so eine Folge von Faktoren

$$f_1(x+h), \quad f_2(x+h), \quad f_3(x+h), \dots$$

Die Berechnungen zeigen, dass sich diese Faktoren dem Wert 1 nähern. Nach drei Schritten unterscheidet sich  $f_3(x+h)$  nur mehr in der achten bzw. neunten Dezimalstelle von 1, d. h. dass weitere Iterationsschritte nur mehr in einem vernachlässigbar geringen Ausmass zu einer Änderung der Sterbeintensitäten führen.

Die Berechnungen wurden mit drei Iterationsschritten durchgeführt. Für einige Alter wurden die Faktoren  $f_k$  in den folgenden drei Tabellen angegeben.

Tabelle 4

Entwicklung der Parameter  $C^a$  und  $C^i$ , des Faktors  $f_k = \mu(x)/\mu_k(x)$  und der Differenzen  $\mu_k(x) - \mu(x)$  bei einer Erhöhung der Invalidisierungsintensität um 40 % im Altersintervall  $35,5 + \frac{1}{7}$  bis  $36,5$

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle  $x = 35,643$  mit  $\mu(x) = 2,43405E-003$

Schritt	$L^a$	$C^a$	$L^i$	$C^i$	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$	$\mu_k(x) - \mu(x)$
1	96.638,4	1,39756E-004	1.313,7	4,21232E-002	2,43556E-003	,99937829530	1,5E-006
2	96.638,4	1,39669E-004	1.313,7	4,20970E-002	2,43405E-003	,99999922981	1,9E-009
3	96.638,4	1,39669E-004	1.313,7	4,20970E-002	2,43405E-003	,99999999906	2,3E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle  $x = 35,786$  mit  $\mu(x) = 2,46428E-003$

Schritt	$L^a$	$C^a$	$L^i$	$C^i$	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$	$\mu_k(x) - \mu(x)$
1	96.575,0	1,39669E-004	1.342,8	4,20970E-002	2,46582E-003	,99937681485	1,5E-006
2	96.575,0	1,39581E-004	1.342,8	4,20708E-002	2,46428E-003	,99999922225	1,9E-009
3	96.575,0	1,39581E-004	1.342,8	4,20707E-002	2,46428E-003	,99999999903	2,4E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle  $x = 35,929$  mit  $\mu(x) = 2,49491E-003$

Schritt	$L^a$	$C^a$	$L^i$	$C^i$	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$	$\mu_k(x) - \mu(x)$
1	96.510,7	1,39581E-004	1.372,5	4,20707E-002	2,49647E-003	,99937532652	1,6E-006
2	96.510,7	1,39494E-004	1.372,5	4,20445E-002	2,49491E-003	,99999921465	2,0E-009
3	96.510,7	1,39494E-004	1.372,5	4,20444E-002	2,49491E-003	,99999999901	2,5E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle  $x = 36,071$  mit  $\mu(x) = 2,52594E-003$

Schritt	$L^a$	$C^a$	$L^i$	$C^i$	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$	$\mu_k(x) - \mu(x)$
1	96.445,3	1,39494E-004	1.402,7	4,20444E-002	2,52753E-003	,99937383155	1,6E-006
2	96.445,4	1,39407E-004	1.402,7	4,20181E-002	2,52594E-003	,99999920705	2,0E-009
3	96.445,4	1,39407E-004	1.402,7	4,20181E-002	2,52594E-003	,99999999900	2,5E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle  $x = 36,214$  mit  $\mu(x) = 2,55738E-003$

Schritt	$L^a$	$C^a$	$L^i$	$C^i$	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$	$\mu_k(x) - \mu(x)$
1	96.379,0	1,39407E-004	1.433,6	4,20181E-002	2,55899E-003	,99937233117	1,6E-006
2	96.379,0	1,39319E-004	1.433,6	4,19917E-002	2,55739E-003	,99999919943	2,0E-009
3	96.379,0	1,39319E-004	1.433,6	4,19917E-002	2,55738E-003	,99999999898	2,6E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle  $x = 36,357$  mit  $\mu(x) = 2,58924E-003$

Schritt	$L^a$	$C^a$	$L^i$	$C^i$	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$	$\mu_k(x) - \mu(x)$
1	96.311,6	1,39319E-004	1.465,1	4,19917E-002	2,59087E-003	,99937082662	1,6E-006
2	96.311,6	1,39231E-004	1.465,1	4,19652E-002	2,58924E-003	,99999919179	2,1E-009
3	96.311,6	1,39231E-004	1.465,1	4,19652E-002	2,58924E-003	,99999999896	2,7E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle  $x = 36,500$  mit  $\mu(x) = 2,62152E-003$

Schritt	$L^a$	$C^a$	$L^i$	$C^i$	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$	$\mu_k(x) - \mu(x)$
1	96.243,1	1,39231E-004	1.497,1	4,19652E-002	2,62317E-003	,99936931916	1,7E-006
2	96.243,1	1,39143E-004	1.497,1	4,19387E-002	2,62152E-003	,99999918415	2,1E-009
3	96.243,1	1,39143E-004	1.497,1	4,19387E-002	2,62152E-003	,99999999895	2,8E-012

Tabelle 5

Entwicklung der Parameter  $C^a$  und  $C^i$ , des Faktors  $f_k = \mu(x)/\mu_k(x)$  und der Differenzen  $\mu_k(x) - \mu(x)$  bei einer Erhöhung der Invalidisierungsintensität um 40 % im Altersintervall  $45,5 + \frac{1}{7}$  bis  $46,5$

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 45,643$ mit $\mu(x) = 5,91945E-003$						
Schritt	La	Ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	88.616,5	1,33422E-004	5.585,3	4,02142E-002	5,92341E-003	,99933160814 4,0E-006
2	88.616,5	1,33333E-004	5.585,3	4,01873E-002	5,91946E-003	,99999881977 7,0E-009
3	88.616,5	1,33332E-004	5.585,3	4,01873E-002	5,91945E-003	,99999999792 1,2E-011
Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 45,786$ mit $\mu(x) = 5,99732E-003$						
Schritt	La	Ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	88.425,4	1,33332E-004	5.696,2	4,01873E-002	6,00132E-003	,9993312257 4,0E-006
2	88.425,5	1,33244E-004	5.696,2	4,01605E-002	5,99732E-003	,99999881931 7,1E-009
3	88.425,5	1,33243E-004	5.696,2	4,01604E-002	5,99732E-003	,99999999791 1,3E-011
Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 45,929$ mit $\mu(x) = 6,07626E-003$						
Schritt	La	Ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	88.231,4	1,33243E-004	5.809,1	4,01604E-002	6,08030E-003	,99933474497 4,0E-006
2	88.231,4	1,33155E-004	5.809,1	4,01337E-002	6,07627E-003	,99999881915 7,2E-009
3	88.231,4	1,33155E-004	5.809,1	4,01337E-002	6,07626E-003	,99999999790 1,3E-011
Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 46,071$ mit $\mu(x) = 6,15630E-003$						
Schritt	La	Ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	88.034,3	1,33155E-004	5.924,1	4,01337E-002	6,16039E-003	,99933647769 4,1E-006
2	88.034,3	1,33066E-004	5.924,1	4,01070E-002	6,15631E-003	,99999881927 7,3E-009
3	88.034,3	1,33066E-004	5.924,1	4,01070E-002	6,15630E-003	,99999999790 1,3E-011
Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 46,214$ mit $\mu(x) = 6,23745E-003$						
Schritt	La	Ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	87.834,0	1,33066E-004	6.041,2	4,01070E-002	6,24158E-003	,99933832307 4,1E-006
2	87.834,1	1,32978E-004	6.041,3	4,00805E-002	6,23746E-003	,99999881970 7,4E-009
3	87.834,1	1,32978E-004	6.041,3	4,00804E-002	6,23745E-003	,99999999790 1,3E-011
Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 46,357$ mit $\mu(x) = 6,31973E-003$						
Schritt	La	Ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	87.630,6	1,32978E-004	6.160,5	4,00804E-002	6,32390E-003	,99934028351 4,2E-006
2	87.630,7	1,32890E-004	6.160,5	4,00540E-002	6,31973E-003	,99999882044 7,5E-009
3	87.630,7	1,32890E-004	6.160,5	4,00539E-002	6,31973E-003	,99999999789 1,3E-011
Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 46,500$ mit $\mu(x) = 6,40314E-003$						
Schritt	La	Ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	87.424,1	1,32890E-004	6.281,9	4,00539E-002	6,40736E-003	,99934236141 4,2E-006
2	87.424,1	1,32803E-004	6.281,9	4,00276E-002	6,40315E-003	,99999882149 7,5E-009
3	87.424,1	1,32802E-004	6.281,9	4,00275E-002	6,40314E-003	,99999999789 1,4E-011

Tabelle 6

Entwicklung der Parameter  $C^a$  und  $C^i$ , des Faktors  $f_k = \mu(x)/\mu_k(x)$  und der Differenzen  $\mu_k(x) - \mu(x)$  bei einer Erhöhung der Invalidisierungsintensität um 40 % im Altersintervall  $55,5 + \frac{1}{7}$  bis  $56,5$

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle x = 55,643 mit $\mu(x) = 1,49188E-002$						
Schritt	la	ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	65.332,5	1,28851E-004	20.132,4	3,88366E-002	1,49210E-002	,99984765574 2,3E-006
2	65.332,5	1,28832E-004	20.132,4	3,88307E-002	1,49188E-002	,99999974541 3,8E-009
3	65.332,5	1,28831E-004	20.132,4	3,88307E-002	1,49188E-002	,99999999957 6,4E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle x = 55,786 mit $\mu(x) = 1,51144E-002$						
Schritt	la	ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	64.817,8	1,28831E-004	20.463,9	3,88307E-002	1,51165E-002	,99986354329 2,1E-006
2	64.817,8	1,28814E-004	20.463,9	3,88254E-002	1,51144E-002	,99999977324 3,4E-009
3	64.817,8	1,28814E-004	20.463,9	3,88253E-002	1,51144E-002	,99999999962 5,8E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle x = 55,929 mit $\mu(x) = 1,53123E-002$						
Schritt	la	ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	64.297,4	1,28814E-004	20.799,2	3,88253E-002	1,53142E-002	,99987974166 1,8E-006
2	64.297,4	1,28798E-004	20.799,2	3,88207E-002	1,53123E-002	,99999980131 3,0E-009
3	64.297,4	1,28798E-004	20.799,2	3,88207E-002	1,53123E-002	,99999999967 5,0E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle x = 56,071 mit $\mu(x) = 1,55125E-002$						
Schritt	la	ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	63.771,2	1,28798E-004	21.138,2	3,88207E-002	1,55141E-002	,99989625310 1,6E-006
2	63.771,2	1,28785E-004	21.138,2	3,88166E-002	1,55125E-002	,99999982962 2,6E-009
3	63.771,2	1,28785E-004	21.138,2	3,88166E-002	1,55125E-002	,99999999972 4,4E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle x = 56,214 mit $\mu(x) = 1,57150E-002$						
Schritt	la	ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	63.239,3	1,28785E-004	21.481,0	3,88166E-002	1,57164E-002	,99991307970 1,4E-006
2	63.239,3	1,28774E-004	21.481,0	3,88133E-002	1,57150E-002	,99999985814 2,2E-009
3	63.239,3	1,28774E-004	21.481,0	3,88133E-002	1,57150E-002	,99999999977 3,6E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle x = 56,357 mit $\mu(x) = 1,59198E-002$						
Schritt	la	ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	62.701,6	1,28774E-004	21.827,5	3,88133E-002	1,59209E-002	,99993022345 1,1E-006
2	62.701,6	1,28765E-004	21.827,5	3,88106E-002	1,59198E-002	,99999988685 1,8E-009
3	62.701,6	1,28765E-004	21.827,5	3,88105E-002	1,59198E-002	,99999999981 3,0E-012

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle x = 56,500 mit $\mu(x) = 1,61269E-002$						
Schritt	la	ca	Li	Ci	$\mu_k(x)$	$\mu(x)/\mu_k(x)$
1	62.158,1	1,28765E-004	22.177,7	3,88105E-002	1,61278E-002	,99994768620 8,4E-007
2	62.158,1	1,28758E-004	22.177,7	3,88085E-002	1,61269E-002	,99999991574 1,4E-009
3	62.158,1	1,28758E-004	22.177,7	3,88085E-002	1,61269E-002	,99999999986 2,3E-012

Wie am Anfang der Arbeit dargelegt, wurde die Ausscheideordnung beginnend mit dem Alter 20,5 berechnet.

Beim nächsten Schritt an der Stelle  $20,5 + 2h$  wurde bereits von den neu gewonnenen Werten der Intensitätsfunktionen an der Stelle  $20,5 + h$  ausgegangen. Die Berechnungen wurden bis zum Alter 58,5 durchgeführt. Über diesem Alter sind die Annahmen, welche zur Voraussetzung 1 geführt haben, nicht mehr zutreffend. In diesem Altersbereich führt diese Annahme wohl eher zu einem Anstieg der Inanspruchnahme der Frühpension.

Bei den Berechnungen ist die Schrittweite  $h$  abhängig von der Anzahl der Schritte im Runge-Kutta-Verfahren.  $h = 1$  bedeutet, dass die Ausscheideordnung in Ganzjahresintervallen berechnet wird. Durch das kontinuierliche Modell ist es möglich,  $h$  kleiner als 1 zu wählen.

Die folgende Zusammenstellung zeigt die Abhängigkeit der Bestände von der Schrittweite  $h$  für das Alter 55,5 bei einer Erhöhung der Invalidisierung um 20 %:

Abhängigkeit der Bestände und Sterbewahrscheinlichkeiten von der Schrittweite  $h$

$h$	$L_{55,5}^a$	$q_{55,5}^a$	$L_{55,5}^i$	$q_{55,5}^i$
1	68 568	8,104 <sup>0</sup> / <sub>00</sub>	17 087	40,746 <sup>0</sup> / <sub>00</sub>
$\frac{1}{3}$	68 563	8,106 <sup>0</sup> / <sub>00</sub>	17 084	40,755 <sup>0</sup> / <sub>00</sub>
$\frac{1}{5}$	68 562	8,106 <sup>0</sup> / <sub>00</sub>	17 083	40,757 <sup>0</sup> / <sub>00</sub>
$\frac{1}{7}$	68 562	8,106 <sup>0</sup> / <sub>00</sub>	17 083	40,757 <sup>0</sup> / <sub>00</sub>

Die Zusammenstellung zeigt, dass sich die errechneten Bestände und Sterbewahrscheinlichkeiten (bei der angegebenen Genauigkeit) nicht mehr ändern. Die weiteren Berechnungen wurden mit der Schrittweite 1/7 durchgeführt.

Die Ausscheideordnung wurde für drei Erhöhungen der Invalidisierungsintensität aufgestellt: für 20 %, 40 % und 60 % Steigerung. Dies entspricht einer Steigerung der Invalidisierungswahrscheinlichkeit ungefähr im gleichen Ausmass.

Die folgenden drei Tabellen zeigen die Ausscheideordnungen, wie sie sich durch die Erhöhung der Invalidisierungsintensität ergeben.

Tabelle 7

Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell bei einer Erhöhung der Invalidisierungsintensität um 20 %  $h = \frac{1}{7}$ ,  $k = 3$ ,  $v_x^i = 1,125 \cdot 10^{-5} \cdot 1,2 \cdot e^{0,1439x}$

x	L <sup>a</sup>	q <sup>a</sup>	μ <sup>a</sup>	i <sup>i</sup>	v <sup>i</sup>	L <sup>i</sup>	i <sup>r</sup>	v <sup>r</sup>	L <sup>r</sup>	l <sup>i</sup>	q <sup>i</sup>	μ <sup>i</sup>	μ <sup>r</sup>	μ	Diff
20,5	100.000,0	,693	,669	,277	,258	0,0	0,000	0,000	0,0	100.000,0	43,198	45,000	,581	,669	-,000
21,5	99.903,0	,743	,718	,320	,298	27,1	0,000	0,000	0,0	95.680,2	43,549	44,877	,635	,730	,000
22,5	99.796,8	,798	,770	,370	,344	57,2	0,000	0,000	0,0	91.513,4	43,537	44,762	,694	,795	-,000
23,5	99.680,3	,856	,827	,427	,397	90,8	0,000	0,000	0,0	87.529,2	43,477	44,654	,758	,867	,000
24,5	99.552,4	,919	,887	,493	,459	128,5	0,000	0,000	0,0	83.723,6	43,403	44,552	,829	,944	,000
25,5	99.411,9	,986	,953	,569	,530	170,9	0,000	0,000	0,0	80.089,8	43,324	44,453	,906	,1027	-,000
26,5	99.257,2	1,059	1,023	,657	,612	218,9	0,000	0,000	0,0	76.620,0	43,243	44,357	,990	1,118	-,000
27,5	99.086,9	1,137	1,098	,759	,706	273,2	0,000	0,000	0,0	73.306,7	43,161	44,264	1,082	1,217	,000
28,5	98.899,0	1,220	1,179	,876	,816	335,0	0,000	0,000	0,0	70.142,7	43,078	44,171	1,183	1,324	,000
29,5	98.691,7	1,310	1,266	1,012	,942	405,4	0,000	0,000	0,0	67.121,1	42,994	44,080	1,293	1,441	-,000
30,5	98.462,5	1,407	1,359	1,168	1,088	485,6	0,000	0,000	0,0	64.235,3	42,909	43,988	1,413	1,568	,000
31,5	98.209,0	1,510	1,459	1,349	1,256	577,4	0,000	0,000	0,0	61.479,0	42,823	43,896	1,544	1,707	-,000
32,5	97.928,3	1,621	1,567	1,557	1,450	682,3	0,000	0,000	0,0	58.846,3	42,736	43,804	1,688	1,859	-,000
33,5	97.617,0	1,740	1,682	1,798	1,675	802,3	0,000	0,000	0,0	56.331,4	42,647	43,710	1,845	2,025	-,000
34,5	97.271,7	1,867	1,806	2,076	1,934	939,9	0,000	0,000	0,0	53.929,0	42,557	43,615	2,016	2,206	,000
35,5	96.888,2	2,004	1,938	2,396	2,233	1.097,5	0,000	0,000	0,0	51.634,0	42,465	43,519	2,204	2,404	-,000
36,5	96.461,8	2,151	2,081	2,767	2,579	1.278,1	0,000	0,000	0,0	49.441,3	42,371	43,420	2,409	2,622	-,000
37,5	95.987,4	2,308	2,234	3,194	2,978	1.485,2	0,000	0,000	0,0	47.346,4	42,276	43,321	2,633	2,860	,000
38,5	95.459,3	2,477	2,398	3,687	3,439	1.722,5	0,000	0,000	0,0	45.344,8	42,179	43,219	2,878	3,121	-,000
39,5	94.871,0	2,657	2,573	4,256	3,971	1.994,4	0,000	0,000	0,0	43.432,2	42,081	43,116	3,145	3,408	-,000
40,5	94.215,1	2,851	2,762	4,913	4,585	2.305,7	0,000	0,000	0,0	41.604,5	41,981	43,012	3,438	3,724	,000
41,5	93.483,7	3,058	2,964	5,670	5,295	2.662,0	0,000	0,000	0,0	39.857,9	41,881	42,906	3,757	4,070	,000
42,5	92.667,8	3,280	3,182	6,514	6,115	3.069,5	0,000	0,000	0,0	38.188,6	41,779	42,800	4,107	4,452	,000
43,5	91.757,5	3,518	3,414	7,552	7,061	3.535,0	0,000	0,000	0,0	36.593,1	41,678	42,693	4,489	4,872	,000
44,5	90.741,7	3,773	3,664	8,715	8,154	4.066,2	0,000	0,000	0,0	35.068,0	41,577	42,586	4,906	5,334	-,000
45,5	89.608,6	4,046	3,933	10,055	9,416	4.671,5	0,000	0,000	0,0	33.610,0	41,477	42,479	5,362	5,843	-,000
46,5	88.345,0	4,338	4,221	11,600	10,873	5.360,1	0,000	0,000	0,0	32.215,9	41,379	42,374	5,861	6,403	-,000
47,5	86.936,9	4,651	4,530	13,382	12,556	6.141,9	0,000	0,000	0,0	30.882,3	41,283	42,271	6,106	7,020	-,000
48,5	85.369,2	4,987	4,862	15,434	14,499	7.027,7	0,000	0,000	0,0	29.607,9	41,191	42,170	7,001	7,700	-,000
49,5	83.525,9	5,346	5,219	17,798	16,743	8.028,7	0,000	0,000	0,0	28.388,1	41,104	42,074	7,652	8,448	-,000
50,5	81.690,5	5,731	5,603	20,520	19,334	9.156,4	0,000	0,000	0,0	27.221,5	41,022	41,982	8,364	9,270	-,000
51,5	79.546,0	6,143	6,017	23,653	22,327	10.422,7	0,000	0,000	0,0	26.104,8	40,948	41,898	9,141	10,173	,000
52,5	77.175,9	6,584	6,461	27,257	25,782	11.838,9	0,000	0,000	0,0	25.035,9	40,882	41,821	9,991	11,164	-,000
53,5	74.564,2	7,057	6,941	31,400	29,772	13.415,4	0,000	0,000	0,0	24.012,3	40,828	41,754	10,920	12,249	-,000
54,5	71.696,7	7,564	7,457	36,161	34,390	15.161,2	0,000	0,000	0,0	23.032,0	40,785	41,698	11,936	13,434	-,000
55,5	68.561,8	8,106	8,015	41,627	39,701	17.082,6	0,000	0,000	0,0	22.092,6	40,757	41,656	13,046	14,725	-,000
56,5	65.152,0	8,687	8,618	47,897	45,846	19.182,2	0,000	0,000	0,0	21.192,2	40,746	41,630	14,259	16,127	-,000
57,5	61.465,4	9,309	9,271	55,083	52,941	21.457,7	0,000	0,000	0,0	20.328,7	40,754	41,621	15,584	17,642	,000
58,5	57.507,5	9,975	9,977	63,309	61,135	23.899,9	0,000	0,000	0,0	19.500,2	40,784	41,633	17,033	19,271	-,000

Tabelle 8

Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell bei einer Erhöhung der Invalidisierungsintensität um 40 %  $h = \frac{1}{7}$ ,  $k = 3$ ,  $v_x^i = 1,125 \cdot 10^{-5} \cdot 1,4 \cdot e^{0,1439x}$

x	L <sup>a</sup>	q <sup>a</sup>	μ <sup>a</sup>	i <sup>i</sup>	v <sup>i</sup>	L <sup>i</sup>	i <sup>r</sup>	v <sup>r</sup>	L <sup>r</sup>	l <sup>i</sup>	q <sup>i</sup>	μ <sup>i</sup>	μ <sup>r</sup>	μ	Diff
20,5	100.000,0	,691	,669	,323	,301	0,0	0,000	0,000	0,0	100.000,0	43,111	45,000	,581	,669	,000
21,5	99.898,5	,710	,716	,374	,347	31,6	0,000	0,000	0,0	95.688,9	43,364	44,751	,635	,730	,000
22,5	99.787,3	,792	,766	,431	,401	66,8	0,000	0,000	0,0	91.539,4	43,251	44,527	,694	,795	,000
23,5	99.665,2	,848	,820	,498	,463	106,0	0,000	0,000	0,0	87.580,3	43,094	44,314	,758	,867	,000
24,5	99.531,0	,909	,879	,575	,535	150,0	0,000	0,000	0,0	83.806,0	42,929	44,112	,829	,944	,000
25,5	99.393,3	,973	,941	,664	,618	199,6	0,000	0,000	0,0	80.208,4	42,762	43,918	,906	,1027	,000
26,5	99.220,6	1,043	1,008	,767	,714	255,6	0,000	0,000	0,0	76.778,5	42,595	43,732	,990	,1118	,000
27,5	99.041,1	1,117	1,080	,885	,824	319,2	0,000	0,000	0,0	73.508,2	42,429	43,550	1,082	1,217	,000
28,5	98.842,7	1,197	1,158	1,022	,951	391,4	0,000	0,000	0,0	70.389,3	42,264	43,371	1,183	1,324	,000
29,5	98.623,4	1,282	1,240	1,180	1,099	473,8	0,000	0,000	0,0	67.414,3	42,099	43,194	1,293	1,441	,000
30,5	98.380,5	1,374	1,329	1,363	1,269	567,8	0,000	0,000	0,0	64.576,2	41,933	43,017	1,413	1,568	,000
31,5	98.111,3	1,472	1,424	1,573	1,465	675,2	0,000	0,000	0,0	61.868,3	41,767	42,841	1,544	1,707	,000
32,5	97.812,5	1,577	1,526	1,817	1,692	798,2	0,000	0,000	0,0	59.284,3	41,598	42,664	1,688	1,859	,000
33,5	97.480,6	1,689	1,635	2,097	1,954	939,0	0,000	0,000	0,0	56.818,2	41,428	42,486	1,845	2,025	,000
34,5	97.111,6	1,809	1,752	2,421	2,256	1.100,3	0,000	0,000	0,0	54.464,3	41,256	42,306	2,016	2,206	,000
35,5	96.700,8	1,937	1,876	2,795	2,605	1.285,2	0,000	0,000	0,0	52.217,3	41,081	42,123	2,204	2,404	,000
36,5	96.243,1	2,074	2,010	3,227	3,008	1.497,1	0,000	0,000	0,0	50.072,2	40,904	41,939	2,409	2,622	,000
37,5	95.732,9	2,221	2,153	3,725	3,474	1.740,1	0,000	0,000	0,0	48.024,0	40,725	41,752	2,633	2,960	,000
38,5	95.163,6	2,378	2,306	4,300	4,012	2.018,6	0,000	0,000	0,0	46.068,2	40,544	41,563	2,878	3,121	,000
39,5	94.528,1	2,546	2,469	4,964	4,633	2.337,7	0,000	0,000	0,0	44.200,4	40,361	41,372	3,145	3,408	,000
40,5	93.818,3	2,725	2,614	5,729	5,350	2.703,1	0,000	0,000	0,0	42.416,5	40,177	41,179	3,438	3,724	,000
41,5	93.025,1	2,916	2,832	6,612	6,178	3.121,2	0,000	0,000	0,0	40.712,3	39,992	40,986	3,757	4,070	,000
42,5	92.138,7	3,121	3,032	7,631	7,134	3.599,2	0,000	0,000	0,0	39.084,2	39,807	40,791	4,107	4,452	,000
43,5	91.148,1	3,339	3,247	8,806	8,238	4.145,1	0,000	0,000	0,0	37.528,3	39,622	40,597	4,489	4,872	,000
44,5	90.041,1	3,573	3,477	10,161	9,513	4.767,6	0,000	0,000	0,0	36.041,4	39,440	40,405	4,906	5,334	,000
45,5	88.804,5	3,822	3,723	11,722	10,985	5.476,4	0,000	0,000	0,0	34.619,9	39,261	40,214	5,362	5,843	,000
46,5	87.424,1	4,090	3,987	13,522	12,685	6.281,9	0,000	0,000	0,0	33.260,7	39,086	40,028	5,861	6,403	,000
47,5	85.884,4	4,375	4,270	15,597	14,648	7.195,5	0,000	0,000	0,0	31.960,7	38,917	39,846	6,406	7,020	,000
48,5	84.169,1	4,681	4,574	17,986	16,916	8.228,9	0,000	0,000	0,0	30.716,8	38,756	39,671	7,001	7,700	,000
49,5	82.261,3	5,008	4,901	20,737	19,534	9.394,5	0,000	0,000	0,0	29.526,4	38,605	39,506	7,652	8,448	,000
50,5	80.143,5	5,358	5,252	23,903	22,557	10.704,7	0,000	0,000	0,0	28.386,5	38,467	39,351	8,364	9,270	,000
51,5	77.798,4	5,734	5,631	27,545	26,048	12.171,7	0,000	0,000	0,0	27.294,6	38,342	39,210	9,141	10,173	,000
52,5	75.209,3	6,137	6,039	31,733	30,079	13.807,0	0,000	0,000	0,0	26.248,0	38,235	39,084	9,991	11,164	,000
53,5	72.361,1	6,569	6,479	36,545	34,735	15.620,1	0,000	0,000	0,0	25.244,4	38,149	38,978	10,920	12,249	,000
54,5	69.241,3	7,034	6,956	42,070	40,110	17.618,2	0,000	0,000	0,0	24.281,4	38,087	38,894	11,936	13,434	,000
55,5	65.841,3	7,533	7,473	49,408	46,318	19.804,7	0,000	0,000	0,0	23.356,6	38,051	38,837	13,046	14,725	,000
56,5	62.158,1	8,070	8,034	55,670	53,487	22.177,7	0,000	0,000	0,0	22.467,8	38,048	38,809	14,259	16,127	,000
57,5	58.196,2	8,648	8,645	63,984	61,765	24.728,4	0,000	0,000	0,0	21.613,0	38,079	38,814	15,584	17,642	,000
58,5	53.969,3	9,271	9,312	73,487	71,324	27.439,5	0,000	0,000	0,0	20.790,0	38,150	38,858	17,033	19,271	,000

Tabelle 9

Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell bei einer Erhöhung der Invalidisierungsintensität um 60 %  $h = \frac{1}{7}$ ,  $k = 3$ ,  $v_x^i = 1,125 \cdot 10^{-5} \cdot 1,6 \cdot e^{0,1439x}$

x	L <sup>a</sup>	q <sup>a</sup>	μ <sup>a</sup>	i <sup>i</sup>	v <sup>i</sup>	L <sup>i</sup>	i <sup>r</sup>	v <sup>r</sup>	L <sup>r</sup>	l <sup>i</sup>	q <sup>i</sup>	μ <sup>i</sup>	μ <sup>r</sup>	μ	Diff
20,5	100.000,0	,690	,669	,370	,344	0,0	0,000	0,000	0,0	100.000,0	43,025	45,000	,581	,669	,000
21,5	99.894,0	,737	,714	,427	,397	36,2	0,000	0,000	0,0	95.697,5	43,180	44,632	,635	,730	,000
22,5	99.777,7	,787	,762	,493	,459	76,3	0,000	0,000	0,0	91.565,2	42,968	44,294	,694	,795	,000
23,5	99.650,0	,841	,814	,569	,530	121,2	0,000	0,000	0,0	87.630,9	42,718	43,978	,758	,867	,000
24,5	99.509,5	,899	,870	,657	,612	171,5	0,000	0,000	0,0	83.887,4	42,464	43,680	,829	,944	,000
25,5	99.354,7	,961	,930	,759	,706	228,2	0,000	0,000	0,0	80.325,2	42,212	43,396	,906	1,027	,000
26,5	99.183,9	1,027	,994	,876	,815	292,4	0,000	0,000	0,0	76.934,5	41,965	43,123	,990	1,118	,000
27,5	98.995,1	1,098	1,063	1,012	,942	365,2	0,000	0,000	0,0	73.706,0	41,720	42,857	1,082	1,217	,000
28,5	98.786,3	1,174	1,137	1,168	1,087	448,0	0,000	0,000	0,0	70.630,9	41,478	42,597	1,183	1,324	,000
29,5	98.554,9	1,255	1,216	1,349	1,256	542,4	0,000	0,000	0,0	67.701,3	41,238	42,340	1,293	1,441	,000
30,5	98.298,2	1,342	1,300	1,557	1,450	650,3	0,000	0,000	0,0	64.909,4	40,997	42,085	1,413	1,568	,000
31,5	98.013,2	1,435	1,391	1,798	1,674	773,5	0,000	0,000	0,0	62.248,3	40,756	41,832	1,544	1,707	,000
32,5	97.696,3	1,535	1,487	2,076	1,934	914,6	0,000	0,000	0,0	59.711,3	40,515	41,578	1,688	1,859	,000
33,5	97.343,6	1,641	1,590	2,397	2,233	1.076,3	0,000	0,000	0,0	57.292,1	40,271	41,322	1,845	2,025	,000
34,5	96.950,6	1,754	1,700	2,767	2,578	1.261,5	0,000	0,000	0,0	54.984,9	40,025	41,066	2,016	2,206	,000
35,5	96.512,3	1,874	1,818	3,194	2,977	1.473,9	0,000	0,000	0,0	52.784,1	39,778	40,807	2,204	2,404	,000
36,5	96.023,2	2,003	1,943	3,687	3,438	1.717,4	0,000	0,000	0,0	50.684,5	39,528	40,547	2,409	2,622	,000
37,5	95.476,8	2,140	2,077	4,257	3,970	1.996,6	0,000	0,000	0,0	48.681,1	39,276	40,284	2,633	2,860	,000
38,5	94.866,0	2,286	2,220	4,913	4,585	2.316,6	0,000	0,000	0,0	46.769,1	39,022	40,020	2,878	3,121	,000
39,5	94.183,0	2,442	2,373	5,671	5,294	2.683,2	0,000	0,000	0,0	44.944,1	38,767	39,753	3,145	3,408	,000
40,5	93.418,9	2,609	2,536	6,545	6,114	3.103,0	0,000	0,000	0,0	43.201,7	38,511	39,486	3,138	3,724	,000
41,5	92.563,7	2,786	2,710	7,554	7,060	3.583,2	0,000	0,000	0,0	41.538,0	38,256	39,219	3,757	4,070	,000
42,5	91.606,6	2,975	2,896	8,717	8,153	4.132,0	0,000	0,000	0,0	39.948,9	38,003	38,953	4,107	4,452	,000
43,5	90.535,6	3,177	3,094	10,058	9,415	4.758,3	0,000	0,000	0,0	38.430,7	37,752	38,689	4,189	4,872	,000
44,5	89.337,3	3,392	3,307	11,605	10,872	5.472,1	0,000	0,000	0,0	36.979,9	37,505	38,428	4,906	5,334	,000
45,5	87.997,6	3,622	3,534	13,387	12,554	6.294,2	0,000	0,000	0,0	35.593,0	37,264	38,172	5,362	5,843	,000
46,5	86.500,8	3,867	3,777	15,441	14,497	7.206,1	0,000	0,000	0,0	34.266,6	37,031	37,923	5,861	6,403	,000
47,5	84.830,7	4,129	4,038	17,807	16,741	8.250,2	0,000	0,000	0,0	32.997,7	36,808	37,683	6,406	7,020	,000
48,5	82.969,8	4,410	4,318	20,531	19,332	9.429,2	0,000	0,000	0,0	31.783,1	36,598	37,454	7,001	7,700	,000
49,5	80.900,4	4,711	4,620	23,667	22,324	10.756,5	0,000	0,000	0,0	30.619,9	36,403	37,239	7,652	8,448	,000
50,5	78.604,6	5,033	4,944	27,275	25,779	12.244,7	0,000	0,000	0,0	29.505,3	36,226	37,041	8,364	9,270	,000
51,5	76.065,1	5,378	5,294	31,423	29,769	13.906,3	0,000	0,000	0,0	28.436,4	36,071	36,864	9,141	10,173	,000
52,5	73.265,8	5,750	5,672	36,191	34,376	15.751,8	0,000	0,000	0,0	27.410,7	35,942	36,711	9,991	11,164	,000
53,5	70.193,0	6,149	6,081	41,664	39,697	17.789,5	0,000	0,000	0,0	26.425,5	35,842	36,595	10,920	12,249	,000
54,5	66.836,8	6,580	6,526	47,944	45,840	20.024,0	0,000	0,000	0,0	25.478,4	35,777	36,492	11,936	13,434	,000
55,5	63.192,6	7,045	7,011	55,142	52,935	22.454,7	0,000	0,000	0,0	24.566,8	35,750	36,436	13,046	14,725	,000
56,5	59.262,8	7,518	7,540	63,382	61,128	25.074,2	0,000	0,000	0,0	23.688,6	35,767	36,422	14,259	16,127	,000
57,5	55.059,3	8,093	8,120	72,802	70,588	27.866,4	0,000	0,000	0,0	22.841,3	35,834	36,456	15,584	17,642	,000
58,5	50.605,3	8,683	8,757	83,557	81,513	30.804,5	0,000	0,000	0,0	22.022,8	35,957	36,543	17,033	19,271	,000

Die folgende Zusammenstellung gibt eine Übersicht über das Resultat:  
 Eine Erhöhung der Invalidisierungsintensität um  $\alpha$  % führt (unter den angeführten beiden Voraussetzungen) zu einer Verringerung der Sterblichkeit der Aktiven und der Invaliden

Alter	Verringerung von		
	$\mu^a$ und $\mu^i$	$q^a$	$q^i$
bei $\alpha = 20\%$			
35,5	3,3 %	3,4 %	3,3 %
45,5	5,6 %	5,8 %	5,6 %
55,5	7,4 %	7,8 %	7,3 %
bei $\alpha = 40\%$			
35,5	6,4 %	6,6 %	6,5 %
45,5	10,6 %	11,0 %	10,7 %
55,5	13,7 %	14,8 %	13,5 %
bei $\alpha = 60\%$			
35,5	9,3 %	9,7 %	9,5 %
45,5	15,2 %	15,7 %	15,2 %
55,5	19,0 %	19,8 %	18,7 %

Die Verringerung der Invalidisierungsintensität wirkt sich, bedingt durch die rekursive Berechnung der Ausscheideordnung, mit zunehmendem Alter immer mehr auf die Sterblichkeit der Aktiven und jene der Invaliden aus.

Vereinfacht dargestellt ergibt sich folgendes Resultat:

Die prozentuale Änderung der Sterblichkeit der Aktiven und der Sterblichkeit der Invaliden beträgt bei Alter 56 rund ein Drittel und bei Alter 46 rund ein Viertel der prozentuellen Änderung der Invalidisierung.

Dr. Franz G. Liebmann  
 Kalmanstrasse 63  
 A-1130 Wien

## Literatur

- [1] *Herbert Amann*: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Walter de Gruyter, Berlin/New York 1983.
- [2] *P. E. Böhmer*: Die Grundlagen der Theorie der Invaliditätsversicherung. Jahrbuch für Versicherungsmathematik. Verlag Deutsche Versicherungs-Presse, Berlin 1914; wiederveröffentlicht in: Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, April 1967, Band VIII, Heft 2.
- [3] *Earl A. Coddington/Norman Levinson*: Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, New York/Toronto/London 1955.
- [4] *Wolfgang Hahn*: Stability of Motion. Springer Verlag, "Gelbe Reihe", Band 138, Berlin/Heidelberg/New York 1967.
- [5] *Klaus Heubeck*: Neue Rechnungsgrundlagen für die betriebliche Altersversorgung "Richttafeln 1982". Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XV, 1982.
- [6] *Franz G. Liebmann*: Demographische Entwicklung der Versichertenstände bis 1990. Schriftenreihe des Forschungsinstitutes für Soziale Sicherheit beim Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger, 1974.
- [7] *Franz G. Liebmann*: Analytische Modelle in der Personenversicherung. Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, Heft 1, Dez. 1983.
- [8] *Nikolaus E. Müller*: Einführung in die Mathematik der Pensionsversicherung. Verfasser-Verlag, D-8011 Baldham 1973.
- [9] *Georg Reichel*: Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. Heft 5 der Schriftenreihe "Angewandte Versicherungsmathematik der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik", Teil 2: Vom Versicherungsspiel zum Äquivalenzbeitrag, 1976.
- [10] *Georg Reichel*: Gibt es "unabhängige" Verbleibswahrscheinlichkeiten in der Personenversicherungsmathematik? Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XVI, Heft 2, Oktober 1983.
- [11] *W. Sacher*: Versicherungsmathematik, Erster Teil. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
- [12] *Stoer/Burlisch*: Einführung in die Numerische Mathematik II. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1973.
- [13] *S. H. Preston/N. Keyfitz/R. Schoen*: Causes of Death. Life Tables for National Populations. Seminar Press, New York/London 1972.
- [14] *Karl-H. Wolff*: Versicherungsmathematik. Springer-Verlag, Wien/New York 1970.
- [15] *Karl-H. Wolff*: Zur Frage der zeitlichen Veränderung der Sterbehäufigkeiten. Mitteilungsblatt der österreichischen Gesellschaft für Statistik und Informatik, 3. Jhg., Juli 1973.
- [16] *Karl-H. Wolff/Josef Juch/Karl Grillitsch*: Entwicklungstendenzen im Bereich der Pensionsversicherung 1956 – 2000. Schriftenreihe des Forschungsinstitutes für Soziale Sicherheit beim Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger, Heft 8, 1980.

## Zusammenfassung

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten in einer Personengesamtheit mit mehreren Ausscheideursachen wird ein kontinuierliches Modell der Ausscheideordnung aufgestellt, d. h. die Ausscheideordnung wird mit Hilfe von Intensitäten durch ein Differentialgleichungssystem approximiert.

Die Untersuchung erfolgt an einer Ausscheideordnung, die auf Übergangswahrscheinlichkeiten aufbaut, welche vom Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger Mitte der siebziger Jahre ermittelt wurden.

Die Anwendung des kontinuierlichen Modells liefert Einblick in die Unterschiede zwischen den abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten und den partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten. Darüber hinaus ermöglicht das kontinuierliche Modell quantitative Aussagen über die Auswirkungen der Veränderung einer Übergangswahrscheinlichkeit auf die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten.

Unter den Voraussetzungen, dass die Sterbeintensität des Gesamtbestandes unverändert bleibt und sich die Sterbeintensitäten der Aktiven und der Invaliden im gleichen Verhältnis ändern, ergibt sich für die Alter vor dem Übergang in die Alterspension folgendes Resultat:

Die prozentuale Änderung der Sterblichkeit der Aktiven und der Invaliden beträgt rund ein Drittel der prozentuellen Änderung der Invalidisierung.

## Résumé

Afin d'analyser la dépendance entre les probabilités de transition dans un groupe de personnes où plusieurs causes de sortie sont présentes, un modèle continu de tables à décréments multiples est établi: plus précisément les tables à décréments multiples sont approximées par un système d'équations différentielles à l'aide de fonctions d'intensité.

L'investigation est basée sur une table construite à partir des probabilités de transition calculées dans les années septante par le «Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger». L'application du modèle continu permet d'apprécier les différences entre les probabilités de transition dépendantes et partielles. De plus, le modèle continu permet de faire des prédictions sur l'influence de changements effectués sur l'une des probabilités de transition aux autres.

Pour autant que l'intensité globale de la mortalité du groupe de personnes demeure constante et que les intensités de mortalité des actifs et des invalides changent dans le même rapport, pour les âges précédant l'âge normal de la retraite on observe le résultat suivant: la variation relative de la mortalité des actifs et des invalides équivaut à peu près au tiers de la variation du taux d'invalidité.

## Summary

To analyze the dependency of transition probabilities in an collective of persons with several causes of lapse a continuous model of decrement tables is made up i.e. the multiple decrement tables are approximated by a system of differential equations by means of intensities.

The investigation is based on a decrement table made up from transition probabilities which were calculated in the seventies by the “Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger”.

The application of the continuous model gives insight into the differences between dependent and partial transition probabilities. Moreover, the continuous model allows one to make statements on the influence of changes of one transition probability upon the others.

Provided that the overall mortality intensity of the collective remains constant and provided that both the mortality intensities of the active and the disabled lives change at the same rate, for the ages prior the normal retirement the following result is obtained: The relative change of the mortality of the active and the disabled lives equals about one third of the relative change of the rate of disablement.

