

Zeitschrift: Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des
Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker

Band: - (1989)

Heft: 1

Artikel: Ein kontinuierliches Modell in der Pensionsversicherungsmathematik

Autor: Liebmann, Franz Günter

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-967205>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

FRANZ GÜNTER LIEBMANN, Wien

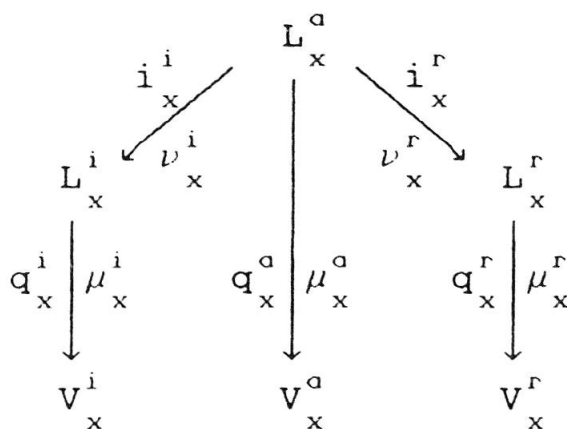
Ein kontinuierliches Modell in der Pensionsversicherungsmathematik

Die Ausscheideordnung im diskreten und kontinuierlichen Modell

In einer Personengesamtheit mit mehreren Ausscheideursachen sind die einzelnen Ausscheidewahrscheinlichkeiten voneinander abhängig. Erst vor kürzerer Zeit hat *Georg Reichel* einen Artikel in den Blättern der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik geschrieben mit dem Titel: "Gibt es «unabhängige» Verbleibswahrscheinlichkeiten in der Personenversicherungsmathematik?" [10]. In dieser Arbeit zeigt *Reichel*, dass es im allgemeinen keine unabhängigen Verbleibswahrscheinlichkeiten gibt. *Reichel* behandelt dieses Thema auch ausführlich in den "Mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung" [9].

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, wie sich – unter bestimmten Voraussetzungen – die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven und Invaliden ändern, wenn sich die Invalidisierung ändert. Diese Frage wurde an einer Ausscheideordnung untersucht, welche mit Übergangswahrscheinlichkeiten erstellt wurde, die einer Arbeit des Forschungsinstitutes für Soziale Sicherheit entnommen wurden [16].

Die Übergänge in der Ausscheideordnung können durch folgendes Schema beschrieben werden:



In diesem Schema wurde folgende Bezeichnungsweise gewählt:

| | |
|----------------------------------|---|
| L_x^a, L_x^i und L_x^r | Stand der Aktiven, Invaliditäts- und Altersrentner mit Alter x |
| i_x^i und i_x^r | die einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten von den Aktiven zu den Invaliditäts- und Altersrentnern |
| v_x^i und v_x^r | die Übergangsintensitäten von den Aktiven zu den Invaliditäts- und Altersrentnern |
| q_x^a, q_x^i und q_x^r | die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten |
| μ_x^a, μ_x^i und μ_x^r | die Sterbeintensitäten |
| V_x^a, V_x^i und V_x^r | Verstorbene bis zum Alter x |

Die Berechnung der diskreten Ausscheideordnung erfolgte nach folgenden Formeln:

$$L_{x+1}^a = L_x^a - L_x^a i_x^i - L_x^a i_x^r - L_x^a q_x^a$$

$$L_{x+1}^i = L_x^i + L_x^a i_x^i \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) - L_x^i q_x^i$$

$$L_{x+1}^r = L_x^r + L_x^a i_x^r \left(1 - \frac{q_x^r}{2}\right) - L_x^r q_x^r$$

Die dafür benötigten Übergangswahrscheinlichkeiten wurden – bis auf die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven – dem Heft 8 der Schriftenreihe des Hauptverbandes der österreichischen Sozialversicherungsträger [16] entnommen. Die Ausscheideordnung wurde für die Personengruppe Arbeiter Männer aufgestellt.

Für diese Arbeit standen nur Sterbewahrscheinlichkeiten für Unselbständige (Arbeiter und Angestellte), Männer zur Verfügung. Sie wurden aus Statistiken des Hauptverbandes aus den Jahren 1967 bis 1971 errechnet, die auch der Untersuchung "Demographische Entwicklung der Versichertenstände bis 1990" [6] zugrundeliegen.

Bei den vom Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger ermittelten Zugangswahrscheinlichkeiten für Altersrentner wurde darauf Bedacht genommen, dass die Pensionierung in der Regel zu vollen Lebensjahren erfolgt. Daher wurde z. B. für Aktive, die mit 60 Jahren in Pension gehen, die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass ein 59,5-jähriger Aktiver innerhalb eines Jahres in Pension geht. Aus diesem Grund wurde die Ausscheideordnung nicht für volle Jahre, sondern für die 20,5-jährigen, 21,5-jährigen usw. aufgestellt.

Da sich alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten nicht sprunghaft ändern, erhält man brauchbare Werte für die halbjährigen Alter durch lineare Interpolation der Wahrscheinlichkeiten für ganzjährige Alter.

Die mit diesen Übergangswahrscheinlichkeiten errechnete Ausscheideordnung im diskreten Modell ist der Ausscheideordnung im kontinuierlichen Modell, nach der Beschreibung des kontinuierlichen Modells gegenübergestellt (am Ende des Abschnittes über die Approximation der Intensitätsfunktionen).

Zur Untersuchung der Frage, wie sich die Sterblichkeit der Aktiven und jene der Invaliden ändert, wenn sich die Invalidisierung ändert (unter der Voraussetzung, dass die Gesamtsterblichkeit gleich bleibt), wurde diese Ausscheideordnung mit Hilfe von Intensitäten durch ein Differentialgleichungssystem approximiert. Das durch das Differentialgleichungssystem beschriebene kontinuierliche Modell der Ausscheideordnung ermöglicht unterjährige Iterationsschritte, worauf noch im Abschnitt "Anwendungen des kontinuierlichen Modells" eingegangen wird.

Die Bezeichnung der im Differentialgleichungssystem vorkommenden Funktionen wurde analog zur bisherigen Bezeichnungsweise gewählt. Zusätzlich wurden noch die folgenden beiden Funktionen eingeführt:

$R^i(x)$ und $R^r(x)$ Übergänge zu den Invaliditäts- bzw. Altersrentnern bis zum Alter x

Das die Ausscheideordnung beschreibende Differentialgleichungssystem lautet dann:

$$\begin{aligned}\frac{dL^a(x)}{dx} &= -\mu^a(x)L^a(x) - v^i(x)L^a(x) - v^r(x)L^a(x) \\ \frac{dL^i(x)}{dx} &= v^i(x)L^a(x) - \mu^i(x)L^i(x) \\ \frac{dL^r(x)}{dx} &= v^r(x)L^a(x) - \mu^r(x)L^r(x) \\ \frac{dV^a(x)}{dx} &= \mu^a(x)L^a(x) \\ \frac{dV^r(x)}{dx} &= \mu^r(x)L^r(x) & \frac{dV^i(x)}{dx} &= \mu^i(x)L^i(x) \\ \frac{dR^r(x)}{dx} &= v^r(x)L^a(x) & \frac{dR^i(x)}{dx} &= v^i(x)L^a(x)\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$L^a(x_0) = 100\,000$$

und

$$L^i(x_0) = L^r(x_0) = R^i(x_0) = R^r(x_0) = V^a(x_0) = V^i(x_0) = V^r(x_0) = 0$$

In eingeschränkter Form wurde dieses Differentialgleichungssystem von *P. E. Böhmer* bereits im Jahre 1914 angegeben [2].

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems lässt sich explizit angeben:

$$L^a(x) = L^a(20) e^{-\int_{20}^x [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi}$$

$$L^i(x) = L^a(20) e^{-\int_{20}^x \mu^i(\xi) d\xi} \int_{20}^x e^{-\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi) - \mu^i(\xi)] d\xi} v^i(\zeta) d\zeta$$

$$L^r(x) = L^a(20) e^{-\int_{20}^x \mu^r(\xi) d\xi} \int_{20}^x e^{-\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi) - \mu^r(\xi)] d\xi} v^r(\zeta) d\zeta$$

$$V^a(x) = L^a(20) \int_{20}^x e^{-\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} \mu^a(\zeta) d\zeta$$

$$V^i(x) = L^a(20) \int_{20}^x \left(1 - e^{-\int_{\zeta}^x \mu^i(\xi) d\xi}\right) e^{-\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} v^i(\zeta) d\zeta$$

$$V^r(x) = L^a(20) \int_{20}^x \left(1 - e^{-\int_{\zeta}^x \mu^r(\xi) d\xi}\right) e^{-\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} v^r(\zeta) d\zeta$$

$$R^i(x) = L^a(20) \int_{20}^x e^{-\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} v^i(\zeta) d\zeta$$

$$R^r(x) = L^a(20) \int_{20}^x e^{-\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} v^r(\zeta) d\zeta$$

Die darin auftretenden Intensitätsfunktionen lassen sich durch Exponentialfunktionen approximieren. Da die Intensitätsfunktionen in den Exponenten auftreten, lassen sich die Integrale nicht durch Quadraturen berechnen. Das Differentialgleichungssystem lässt sich jedoch mit dem Runge-Kutta-Verfahren [12] lösen. Die explizite Lösung kann aber zur Abschätzung der Stabilität des Differentialgleichungssystems verwendet werden.

Stabilität des Differentialgleichungssystems

In Matrixschreibweise lässt sich das Differentialgleichungssystem wie folgt anschreiben:

$$\begin{pmatrix} \frac{dL^a(x)}{dx} \\ \frac{dL^i(x)}{dx} \\ \frac{dL^r(x)}{dx} \\ \frac{dV^a(x)}{dx} \\ \frac{dV^i(x)}{dx} \\ \frac{dV^r(x)}{dx} \\ \frac{dR^i(x)}{dx} \\ \frac{dR^r(x)}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu^a(x) - v^i(x) - v^r(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^i(x) & -\mu^i(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^r(x) & 0 & -\mu^r(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu^a(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu^i(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu^r(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^i(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^r(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^a(x) \\ L^i(x) \\ L^r(x) \\ V^a(x) \\ V^i(x) \\ V^r(x) \\ R^i(x) \\ R^r(x) \end{pmatrix}$$

Wird mit A die Matrix in diesem Gleichungssystem bezeichnet, mit y der Vektor der Bestände und mit y' dessen erste Ableitung, so führt dies zu folgender Schreibweise:

$$y' = A(x)y, \quad \text{mit der Anfangsbedingung: } y(20) = y_0.$$

Jeder maximale Satz von linear unabhängigen Lösungen dieses homogenen Differentialgleichungssystems bildet ein sogenanntes Fundamentalsystem; die zugehörige Fundamentalmatrix sei mit $\Phi(x)$ bezeichnet [1] und [3].

Wie aus der Struktur des Differentialgleichungssystems ersichtlich ist, kann eine Fundamentalmatrix mit folgender Gestalt gewählt werden:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{31} & 0 & \varphi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{51} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varphi_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varphi_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Elemente φ_{ij} dieser Matrix sind im nächsten Abschnitt, der die Abschätzung dieser Funktionen behandelt, explizit angegeben.

Für diese Fundamentalmatrix gilt:

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x), \quad \Phi(20) = I$$

so dass

$$y(x) = \Phi(x)y_0$$

Es gilt nun folgende Abschätzung:

$$\|y(x)\| \leq \|\Phi(x)\| \|y_0\|.$$

Lässt sich

$$\|\Phi(x)\| \leq \text{const} \quad \forall x$$

zeigen, so ist das System hinsichtlich der Anfangsdaten y_0 stabil im Sinne von Liapunov [4], d. h. stabil auf dem nach oben offenen Intervall $(20, \infty)$.

Für die vorliegende Untersuchung ist die Stabilität auf dem endlichen Intervall vom Alter 20 bis 70 von Interesse. Um hierüber Aussagen zu machen, ist es erforderlich, möglichst günstige obere Schranken für die Funktionen φ_{ij} anzugeben. Dabei gilt: je niedriger die Schranken sind, um so besser ist die Stabilität des Differentialgleichungssystems. Diese Abschätzungen sind im nächsten Abschnitt angegeben.

Das für die vorliegende Untersuchung interessantere Problem ist, wie das System auf eine Störung in $A(x)$ reagiert, d. h. wie sich Änderungen der Intensitäten auf die Lösung des Differentialgleichungssystems auswirken.

Die Auswirkungen einer solchen Störung lassen sich durch die Methode der Variation der Konstanten analysieren. Bezeichnet ΔA die Störung in A , so führt dies zu folgendem Differentialgleichungssystem:

$$z' = (A + \Delta A)z, \quad z(20) = y_0.$$

Mit Hilfe des Ansatzes

$$z = y + \Delta z$$

erhält man:

$$y' + \Delta z' = (A + \Delta A)(y + \Delta z) = Ay + \Delta A y + A \Delta z + \Delta A \Delta z$$

so dass unter Vernachlässigung von $\Delta A \Delta z$ in erster Ordnung gilt:

$$\Delta z' = A \Delta z + \Delta A y, \quad \Delta z(20) = 0$$

Die Methode der Variation der Konstanten liefert:

$$\Delta z = \int_{20}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)\Delta A(s)y(s) ds.$$

Für die Untersuchung der Auswirkungen einer Störung ist also die Übertragungsmatrix $\Psi(x, s) = \Phi(x)\Phi^{-1}(s)$ relevant. Die partielle Ableitung von $\Psi(x, s)$ nach x wird üblicherweise mit Ψ' bezeichnet, da s nur eine Hilfsvariable darstellt.

Ψ erhält man durch Lösung des linearen Systems mit der Anfangsstelle $x = s$:

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x) \quad \Big| \Phi^{-1}(s)$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\Phi^{-1}(x)$ erhält man:

$$\Psi' = A(x)\Psi$$

Für $x = s$ ergibt sich:

$$\Psi(s, s) = \Phi(s)\Phi^{-1}(s) = I$$

Um die Stabilität des untersuchten Differentialgleichungssystems hinsichtlich Änderungen in den Intensitäten zu zeigen, ist eine für alle x und $s \in [20, 70]$ gültige Schranke für $\|\Psi(x, s)\|$ anzugeben. Aufgrund der speziellen Struktur des Differentialgleichungssystems genügt es, eine Schranke für $\|\Psi(x, 20)\|$, d. h. für $\|\Phi(x)\|$ herzuleiten.

Abschätzung der Elemente φ_{ij} der Matrix Φ

Zur Abschätzung der Matrix Φ ist der Wertebereich der Intensitäten zu beachten. In der vorliegenden Arbeit gelten für die Intensitäten folgende Grenzen:

$$0,0002 \leq v^i(\xi) \leq 0,1$$

$$v^r(\xi) = 0 \quad \text{für } x < 59,6 \quad \text{und}$$

$$0 \leq v^r(\xi) \leq 3,0 \quad \text{für } x \geq 59,6$$

$$0,0005 \leq \mu^a(\xi) \leq 0,03$$

$$0,025 \leq \mu^i(\xi) \leq 0,045$$

$$0,0005 \leq \mu^r(\xi) \leq 0,06$$

$$\varphi_{11} = e^{-\int_0^x [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} \leq e^{-\int_0^{20} 0,0005 d\xi} = 1$$

$$\text{wegen } \mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi) \geq 0,0005 \quad \forall \xi$$

$$\varphi_{21} = \underbrace{e^{-\int_0^x \mu^i(\xi) d\xi}}_{\leq 1} \int_{20}^x \underbrace{e^{\int_{20}^{\xi} [-\mu^a(\xi) - v^i(\xi) - v^r(\xi) + \mu^i(\xi)] d\xi}}_{\leq e^{1,55} \leq 4,73} \underbrace{v^i(\xi)}_{\leq 0,1} d\xi \leq 25$$

$$\leq \int_{20}^{57} 0,042 + \int_{57}^{\xi} 0$$

$$\varphi_{22} = e^{-\int_0^x \mu^i(\xi) d\xi} \leq e^{-\int_0^{20} 0,025 d\xi} = 1$$

$$\text{wegen } \mu^i(\xi) \geq 0,025 \quad \forall \xi$$

$$\varphi_{31} = \underbrace{e^{-\int_{20}^x \mu^r(\xi) d\xi}}_{\leq 1} \int_{20}^x \underbrace{e^{\int_{20}^{\zeta} [-\mu^a(\xi) - v^i(\xi) - v^r(\xi) + \mu^r(\xi)] d\xi}}_{\leq e^0=1} \underbrace{v^r(\zeta)}_{\leq 3} d\zeta \leq 156$$

$$\varphi_{33} = e^{-\int_{20}^x \mu^r(\xi) d\xi} \leq e^{-\int_{20}^{20} 0,0005 d\xi} \leq 1$$

$$\varphi_{41} = \int_{20}^x e^{-\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi} \mu^a(\zeta) d\zeta$$

(mit Hilfe der Abschätzung von φ_{11})

$$\leq \int_{20}^x 1 \mu^a(\zeta) d\zeta \leq \int_{20}^{72} 0,03 d\zeta = 1,56$$

$$\varphi_{51} = \int_0^x \underbrace{\left(1 - e^{-\int_{\zeta}^x \mu^i(\xi) d\xi}\right)}_{0 \leq \leq 1} \underbrace{e^{-\int_{20}^{\zeta} [\mu^a(\xi) + v^i(\xi) + v^r(\xi)] d\xi}}_{\leq 1} v^i(\zeta) d\zeta$$

$$\leq \int_{20}^{72} 1 v^i(\zeta) d\zeta \leq \int_{20}^{72} 0,1 d\zeta = 5,2$$

φ_{61} analog φ_{51} mit $v^i \rightarrow v^r$ und $\mu^i \rightarrow \mu^r$

$$\varphi_{61} \leq \int_{20}^x 1 v^r(\xi) d\xi \leq \int_{20}^{59,6} + \int_{59,6}^{66,4} + \int_{66,4}^{72} d\xi \leq 6,8 \cdot 2 + 5,6 \cdot 0,5 \leq 16,4$$

φ_{71} analog φ_{41} :

$$\varphi_{71} \leq \int_{20}^{72} v^i(\xi) d\xi \leq 5,2$$

φ_{81} ebenfalls analog φ_{41} :

$$\varphi_{81} \leq \int_{20}^{72} v^r(\xi) d\xi \leq 156$$

Damit sind alle Elemente der Matrix Φ abgeschätzt, womit die Stabilität des Systems nachgewiesen ist.

Approximation der Intensitätsfunktionen

Wie bereits erwähnt, wurde das Differentialgleichungssystem mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens numerisch gelöst. Hierzu ist es erforderlich, die darin auftretenden Intensitätsfunktionen zu approximieren.

Die Sterbeintensitäten der Aktiven und der Altersrentner wurden, wie auch in der Arbeit "Analytische Modelle in der Personenversicherung" [7], durch Exponentialfunktionen approximiert. In dieser Arbeit wurden zur Approximation der Intensitäten mehrere Verteilungen untersucht (u. a. Beta-Verteilungen, log-normal-Verteilung). Dabei zeigte sich, dass die Approximation der Sterbeintensitäten durch Exponentialfunktionen die besten Resultate liefert.

Die Sterbeintensität der Invaliden wurde durch eine Konstante dargestellt. Wie die Abbildung 1 zeigt, wird damit die Sterbeintensität der Invaliden im Altersbereich 40 bis 65 recht gut approximiert. Die Ungenauigkeit in den niedrigen Altern wirkt sich – auch wegen der iterativen Berechnung – nur wenig auf das Resultat aus.

Zur Darstellung der Invalidisierungsintensität wurde der Altersbereich in zwei Abschnitte geteilt und für jeden Abschnitt eine Exponentialfunktion bestimmt. Die Sterbeintensitäten und die Invalidisierungsintensität liegen in einem Bereich, in dem sich die Wahrscheinlichkeiten und die Intensitäten nur gering unterscheiden. Die Parameter der Exponentialfunktionen wurden in erster Annäherung so bestimmt, dass diese Funktionen dem Verlauf der Wahrscheinlichkeiten entsprechen.

Für die Sterbeintensitäten wurden folgende Funktionen verwendet:

Sterbeintensität der Aktiven:

$$\mu^a(x) = C^a e^{D^a x} \quad \text{für} \quad 20,5 \leq x \leq 71,5$$

mit $C^a = 0,0001493$ und $D^a = 0,07316$

Sterbeintensität der Invaliden:

$$\mu^i(x) = C^i \quad \text{für} \quad 20,5 \leq x \leq 71,5$$

mit $C^i = 0,0045$

Sterbeintensität der Altersrentner:

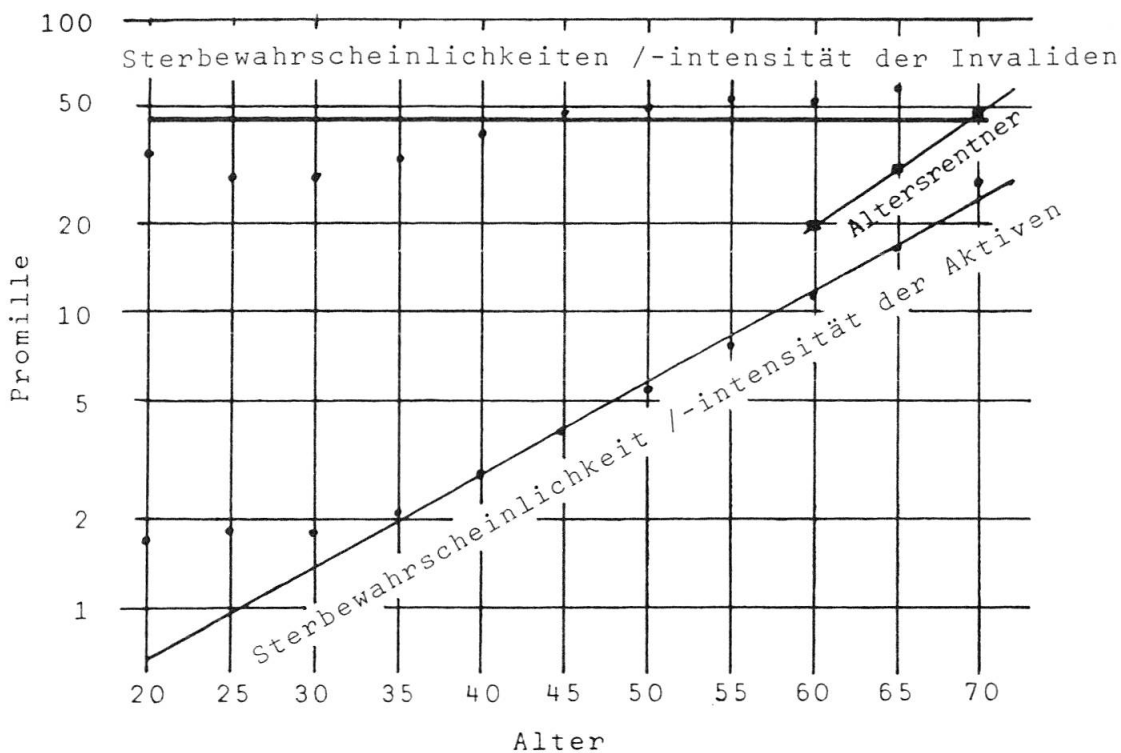
$$\mu^r(x) = C^r e^{D^r x} \quad \text{für} \quad 59,5 \leq x \leq 71,5$$

mit $C^r = 0,00009385$ und $D^r = 0,08891$

Abbildung 1 zeigt die Sterbewahrscheinlichkeiten nach den Beobachtungen des Hauptverbandes der österreichischen Sozialversicherungsträger und die verwendeten Funktionen für die Sterbeintensitäten im logarithmischen Massstab.

Abbildung 1

Sterbewahrscheinlichkeiten und Sterbeintensitäten, logarithmischer Massstab



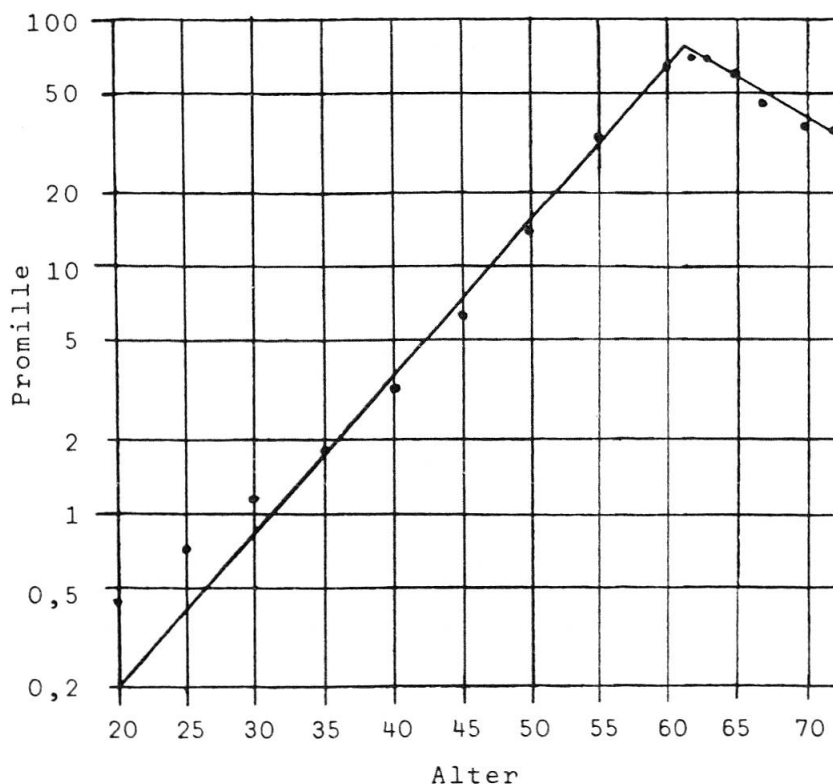
Für die Invalidisierungsintensität wurde folgende Funktion verwendet:

$$v^i(x) = \begin{cases} 0,00001125e^{0,1439x} \dots & \text{für } 20,5 \leq x < 61,4 \\ 8,5298e^{-0,076606x} \dots & \text{für } 61,4 \leq x \leq 71,5 \end{cases}$$

Abbildung 2 zeigt die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten nach den Beobachtungen des Hauptverbandes der österreichischen Sozialversicherungsträger und die verwendete Funktion der Invalidisierungsintensität im logarithmischen Massstab.

Abbildung 2

Invalidisierungswahrscheinlichkeiten und Invalidisierungsintensität, logarithmischer Massstab



Die Zugangsintensitäten für die Altersrentner liegen in einem Bereich, in dem sich die Wahrscheinlichkeiten von den Intensitäten bereits stark unterscheiden. Hier wurde die erste Abbildung der Funktion $\bar{L}^a(x)$ bestimmt und daraus die Zugangsintensität ermittelt. Dabei ist $\bar{L}^a(x)$ eine einfache Ausscheideordnung, bei der als einzige Ausscheideursache der Übergang in den Ruhestand berücksichtigt wird.

Zur analytischen Darstellung der Zugangsintensität für Altersrentner wurde der Altersbereich auf mehrere Abschnitte aufgeteilt.

Die Sprungstellen wurden so gewählt, dass sie nicht mit den Schrittstellen des Runge-Kutta-Verfahrens zusammenfallen.

Für die Zugangsintensität für Altersrentner wurde folgende Funktion verwendet:

$$v^r(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 20,5 \leq x < 59,6 \\ 0,55 & \text{für } 59,6 \leq x < 61,4 \\ 4,6 \cdot 10^{-17} \cdot e^{0,578x} & \text{für } 61,4 \leq x < 66,4 \\ 3,18 \cdot 10^{10} \cdot e^{-0,3746x} & \text{für } 66,4 \leq x \end{cases}$$

Abbildung 3 zeigt die Zugangswahrscheinlichkeiten nach den Beobachtungen des Hauptverbandes der österreichischen Sozialversicherungsträger und die verwendete Funktion der Zugangsintensität für Altersrentner im logarithmischen Massstab.

Abbildung 3

Zugangswahrscheinlichkeiten und Zugangsintensität für Alterspensionisten, logarithmischer Massstab

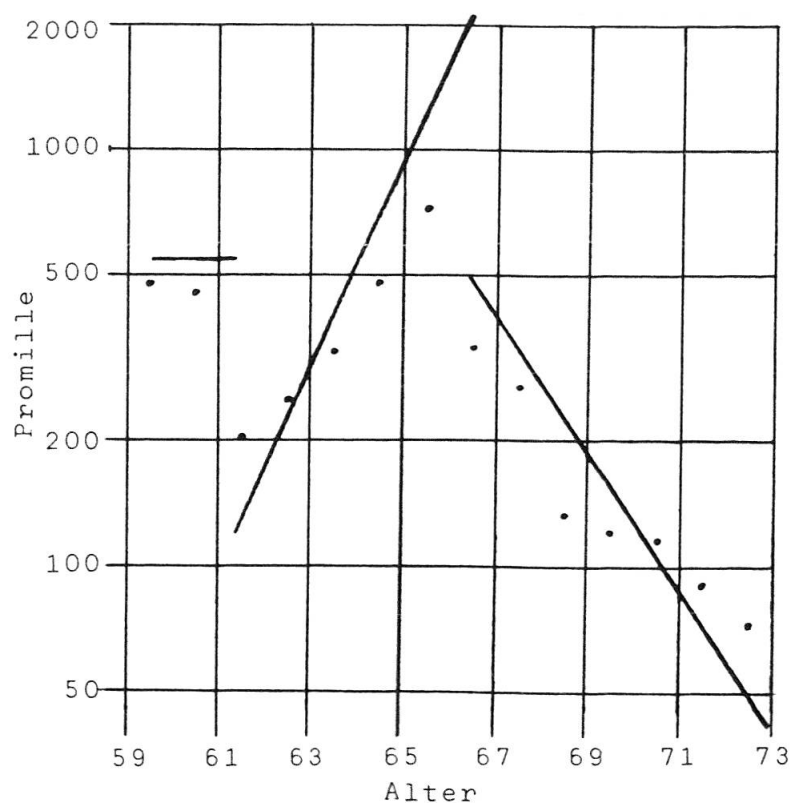


Tabelle 1

Mit den am Anfang der Arbeit beschriebenen Wahrscheinlichkeiten errechnet sich folgende Ausscheideordnung – diskretes Modell:

| x | L^0 | i^1 | i^r | q^0 | L^1 | L^r | q^1 | q^r | x |
|------|-----------|--------|----------|--------|----------|----------|---------|--------|------|
| 20,5 | 100.000,0 | ,485 | 0,000 | 1,715 | 0,0 | 0,0 | 32,670 | 0,000 | 20,5 |
| 21,5 | 99.780,0 | ,550 | 0,000 | 1,765 | 47,7 | 0,0 | 30,710 | 0,000 | 21,5 |
| 22,5 | 99.549,0 | ,605 | 0,000 | 1,785 | 100,3 | 0,0 | 29,590 | 0,000 | 22,5 |
| 23,5 | 99.311,1 | ,660 | 0,000 | 1,790 | 156,6 | 0,0 | 28,950 | 0,000 | 23,5 |
| 24,5 | 99.067,8 | ,715 | 0,000 | 1,790 | 216,7 | 0,0 | 28,535 | 0,000 | 24,5 |
| 25,5 | 98.819,6 | ,775 | 0,000 | 1,780 | 280,3 | 0,0 | 28,250 | 0,000 | 25,5 |
| 26,5 | 98.567,1 | ,850 | 0,000 | 1,770 | 347,9 | 0,0 | 28,155 | 0,000 | 26,5 |
| 27,5 | 98.308,9 | ,930 | 0,000 | 1,765 | 420,7 | 0,0 | 28,265 | 0,000 | 27,5 |
| 28,5 | 98.043,9 | 1,020 | 0,000 | 1,765 | 499,0 | 0,0 | 28,480 | 0,000 | 28,5 |
| 29,5 | 97.770,9 | 1,120 | 0,000 | 1,780 | 583,4 | 0,0 | 28,725 | 0,000 | 29,5 |
| 30,5 | 97.487,3 | 1,230 | 0,000 | 1,805 | 674,5 | 0,0 | 29,050 | 0,000 | 30,5 |
| 31,5 | 97.191,5 | 1,355 | 0,000 | 1,840 | 773,1 | 0,0 | 29,570 | 0,000 | 31,5 |
| 32,5 | 96.880,9 | 1,490 | 0,000 | 1,890 | 880,0 | 0,0 | 30,315 | 0,000 | 32,5 |
| 33,5 | 96.553,5 | 1,635 | 0,000 | 1,955 | 995,5 | 0,0 | 31,260 | 0,000 | 33,5 |
| 34,5 | 96.206,9 | 1,795 | 0,000 | 2,035 | 1.119,8 | 0,0 | 32,405 | 0,000 | 34,5 |
| 35,5 | 95.838,4 | 1,980 | 0,000 | 2,135 | 1.253,4 | 0,0 | 33,725 | 0,000 | 35,5 |
| 36,5 | 95.444,0 | 2,190 | 0,000 | 2,255 | 1.397,7 | 0,0 | 35,130 | 0,000 | 36,5 |
| 37,5 | 95.019,8 | 2,430 | 0,000 | 2,390 | 1.553,9 | 0,0 | 36,520 | 0,000 | 37,5 |
| 38,5 | 94.561,8 | 2,710 | 0,000 | 2,545 | 1.723,8 | 0,0 | 37,835 | 0,000 | 38,5 |
| 39,5 | 94.064,9 | 3,040 | 0,000 | 2,720 | 1.910,0 | 0,0 | 39,115 | 0,000 | 39,5 |
| 40,5 | 93.523,0 | 3,435 | 0,000 | 2,910 | 2.115,7 | 0,0 | 40,440 | 0,000 | 40,5 |
| 41,5 | 92.929,6 | 3,900 | 0,000 | 3,120 | 2.344,9 | 0,0 | 41,840 | 0,000 | 41,5 |
| 42,5 | 92.277,3 | 4,435 | 0,000 | 3,345 | 2.601,6 | 0,0 | 43,265 | 0,000 | 42,5 |
| 43,5 | 91.559,4 | 5,055 | 0,000 | 3,585 | 2.889,5 | 0,0 | 44,685 | 0,000 | 43,5 |
| 44,5 | 90.768,3 | 5,780 | 0,000 | 3,840 | 3.213,1 | 0,0 | 45,775 | 0,000 | 44,5 |
| 45,5 | 89.895,1 | 6,635 | 0,000 | 4,110 | 3.578,6 | 0,0 | 46,750 | 0,000 | 45,5 |
| 46,5 | 88.929,2 | 7,665 | 0,000 | 4,390 | 3.993,8 | 0,0 | 47,520 | 0,000 | 46,5 |
| 47,5 | 87.857,1 | 8,920 | 0,000 | 4,680 | 4.469,5 | 0,0 | 48,115 | 0,000 | 47,5 |
| 48,5 | 86.662,3 | 10,460 | 0,000 | 4,980 | 5.019,3 | 0,0 | 48,620 | 0,000 | 48,5 |
| 49,5 | 85.324,2 | 12,355 | 0,000 | 5,300 | 5.659,7 | 0,0 | 49,115 | 0,000 | 49,5 |
| 50,5 | 83.817,8 | 14,675 | 0,000 | 5,650 | 6.410,0 | 0,0 | 49,685 | 0,000 | 50,5 |
| 51,5 | 82.114,2 | 17,505 | 0,000 | 6,030 | 7.291,0 | 0,0 | 50,370 | 0,000 | 51,5 |
| 52,5 | 80.181,6 | 20,935 | 0,000 | 6,450 | 8.325,0 | 0,0 | 51,125 | 0,000 | 52,5 |
| 53,5 | 77.985,9 | 25,045 | 0,000 | 6,915 | 9.535,0 | 0,0 | 51,835 | 0,000 | 53,5 |
| 54,5 | 75.493,4 | 29,880 | 0,000 | 7,430 | 10.943,3 | 0,0 | 52,385 | 0,000 | 54,5 |
| 55,5 | 72.676,8 | 35,435 | 0,000 | 7,990 | 12.566,7 | 0,0 | 52,720 | 0,000 | 55,5 |
| 56,5 | 69.520,8 | 41,630 | 0,000 | 8,600 | 14.411,6 | 0,0 | 52,840 | 0,000 | 56,5 |
| 57,5 | 66.028,8 | 48,250 | 0,000 | 9,260 | 16.467,8 | 0,0 | 52,785 | 0,000 | 57,5 |
| 58,5 | 62.231,5 | 54,925 | 0,000 | 10,000 | 18.700,3 | 0,0 | 52,600 | 0,000 | 58,5 |
| 59,5 | 58.191,1 | 61,105 | 408,090 | 10,800 | 21.044,9 | 0,0 | 52,375 | * | 59,5 |
| 60,5 | 30.259,6 | 65,995 | 406,290 | 11,600 | 23.405,3 | 23.631,5 | 52,275 | 20,420 | 60,5 |
| 61,5 | 15.617,5 | 68,635 | 205,670 | 12,500 | 24.126,6 | 35.317,6 | 52,485 | 22,365 | 61,5 |
| 62,5 | 11.138,3 | 68,330 | 252,030 | 13,550 | 23.904,1 | 37.703,8 | 53,160 | 24,500 | 62,5 |
| 63,5 | 7.419,1 | 65,120 | 332,340 | 14,700 | 23.374,2 | 39.552,9 | 54,385 | 26,850 | 63,5 |
| 64,5 | 4.361,2 | 59,835 | 488,190 | 15,950 | 22.573,0 | 40.923,5 | 56,160 | 29,430 | 64,5 |
| 65,5 | 1.901,6 | 53,740 | 728,710 | 17,400 | 21.558,9 | 41.816,9 | 58,455 | 32,265 | 65,5 |
| 66,5 | 380,6 | 47,965 | 339,350 | 19,150 | 20.397,9 | 41.831,0 | 61,250 | 35,375 | 66,5 |
| 67,5 | 225,9 | 43,180 | 271,330 | 21,150 | 19.166,2 | 40.478,1 | 64,535 | 38,790 | 67,5 |
| 68,5 | 150,1 | 39,660 | 135,970 | 23,350 | 17.938,8 | 38.968,1 | 68,290 | 42,545 | 68,5 |
| 69,5 | 120,2 | 37,400 | 122,770 | 25,750 | 16.719,5 | 37.330,2 | 72,485 | 46,660 | 69,5 |
| 70,5 | 97,9 | 36,155 | 117,780 | 28,350 | 15.511,9 | 35.602,8 | 77,090 | 51,160 | 70,5 |
| 71,5 | 80,0 | 0,000 | 1000,000 | 0,000 | 14.319,5 | 33.792,5 | 82,085 | 56,070 | 71,5 |
| 72,5 | 0,0 | 0,000 | 1000,000 | 0,000 | 13.144,1 | 31.975,6 | 87,480 | 61,425 | 72,5 |
| 73,5 | 0,0 | 0,000 | 1000,000 | 0,000 | 11.994,2 | 30.011,5 | 93,305 | 67,255 | 73,5 |
| 74,5 | 0,0 | 0,000 | 1000,000 | 0,000 | 10.875,1 | 27.993,1 | 99,595 | 73,580 | 74,5 |
| 75,5 | 0,0 | 0,000 | 1000,000 | 0,000 | 9.792,0 | 25.933,3 | 106,375 | 80,430 | 75,5 |

* $q'_{59,5} = 9,745$ halbjähriger Wert, nicht aufgeführt, da Pensionierung erst ab Alter 60.

Tabelle 2

Mit den beschriebenen Intensitäten errechnet sich folgende Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell:

| x | L^a | q^a | μ^a | i^i | ν^i | L^i | i^r | ν^r | L^r | l^i | q^i | μ^i | μ^r | μ | Diff |
|------|-----------|--------|---------|--------|---------|----------|---------|----------|----------|-----------|--------|---------|---------|--------|-------|
| 20,5 | 100.000,0 | ,694 | ,669 | ,231 | ,215 | 0,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 100.000,0 | 43,284 | 45,000 | ,581 | ,669 | -,000 |
| 21,5 | 99.907,5 | ,746 | ,720 | ,267 | ,248 | 22,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 95.671,6 | 43,736 | 45,000 | ,635 | ,730 | ,000 |
| 22,5 | 99.806,3 | ,803 | ,774 | ,308 | ,287 | 47,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 91.487,2 | 43,828 | 45,000 | ,694 | ,795 | ,000 |
| 23,5 | 99.695,4 | ,864 | ,833 | ,356 | ,331 | 75,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 87.477,6 | 43,867 | 45,000 | ,758 | ,867 | -,000 |
| 24,5 | 99.573,8 | ,929 | ,896 | ,411 | ,382 | 107,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 83.640,2 | 43,888 | 45,000 | ,829 | ,944 | ,000 |
| 25,5 | 99.440,4 | 1,000 | ,964 | ,474 | ,441 | 142,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 79.969,4 | 43,901 | 45,000 | ,906 | 1,027 | ,000 |
| 26,5 | 99.293,8 | 1,076 | 1,038 | ,548 | ,510 | 182,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 76.458,7 | 43,910 | 45,000 | ,990 | 1,118 | -,000 |
| 27,5 | 99.132,6 | 1,157 | 1,116 | ,632 | ,589 | 227,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 73.101,4 | 43,916 | 45,000 | 1,082 | 1,217 | ,000 |
| 28,5 | 98.955,2 | 1,245 | 1,201 | ,730 | ,680 | 278,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 69.891,1 | 43,921 | 45,000 | 1,183 | 1,324 | ,000 |
| 29,5 | 98.759,7 | 1,339 | 1,292 | ,843 | ,785 | 337,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 66.821,4 | 43,925 | 45,000 | 1,293 | 1,441 | ,000 |
| 30,5 | 98.544,2 | 1,441 | 1,390 | ,974 | ,906 | 403,8 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 63.886,3 | 43,927 | 45,000 | 1,413 | 1,568 | ,000 |
| 31,5 | 98.306,3 | 1,550 | 1,496 | 1,124 | 1,047 | 479,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 61.079,9 | 43,930 | 45,000 | 1,544 | 1,707 | -,000 |
| 32,5 | 98.043,4 | 1,667 | 1,609 | 1,298 | 1,208 | 566,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 58.396,7 | 43,932 | 45,000 | 1,688 | 1,859 | ,000 |
| 33,5 | 97.752,7 | 1,794 | 1,732 | 1,498 | 1,396 | 666,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 55.831,2 | 43,933 | 45,000 | 1,845 | 2,025 | -,000 |
| 34,5 | 97.430,9 | 1,929 | 1,863 | 1,730 | 1,611 | 780,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 53.378,4 | 43,934 | 45,000 | 2,016 | 2,206 | -,000 |
| 35,5 | 97.074,4 | 2,075 | 2,004 | 1,997 | 1,861 | 911,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 51.033,2 | 43,936 | 45,000 | 2,204 | 2,404 | -,000 |
| 36,5 | 96.679,0 | 2,232 | 2,157 | 2,306 | 2,149 | 1.060,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 48.791,1 | 43,937 | 45,000 | 2,409 | 2,622 | -,000 |
| 37,5 | 96.240,2 | 2,401 | 2,320 | 2,662 | 2,481 | 1.232,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 46.647,3 | 43,938 | 45,000 | 2,633 | 2,860 | -,000 |
| 38,5 | 95.752,9 | 2,583 | 2,496 | 3,073 | 2,866 | 1.428,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 44.597,8 | 43,939 | 45,000 | 2,878 | 3,121 | -,000 |
| 39,5 | 95.211,4 | 2,778 | 2,686 | 3,548 | 3,309 | 1.653,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 42.638,2 | 43,940 | 45,000 | 3,145 | 3,408 | -,000 |
| 40,5 | 94.609,1 | 2,988 | 2,890 | 4,095 | 3,821 | 1.911,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 40.764,7 | 43,941 | 45,000 | 3,438 | 3,724 | ,000 |
| 41,5 | 93.939,0 | 3,213 | 3,109 | 4,727 | 4,413 | 2.206,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 38.973,5 | 43,942 | 45,000 | 3,757 | 4,070 | -,000 |
| 42,5 | 93.193,1 | 3,455 | 3,345 | 5,456 | 5,096 | 2.543,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 37.260,9 | 43,943 | 45,000 | 4,107 | 4,452 | -,000 |
| 43,5 | 92.362,7 | 3,715 | 3,599 | 6,297 | 5,884 | 2.929,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 35.623,6 | 43,944 | 45,000 | 4,489 | 4,872 | ,000 |
| 44,5 | 91.438,0 | 3,995 | 3,872 | 7,267 | 6,795 | 3.369,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 34.058,1 | 43,945 | 45,000 | 4,906 | 5,334 | ,000 |
| 45,5 | 90.408,2 | 4,295 | 4,166 | 8,385 | 7,846 | 3.870,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 32.561,5 | 43,946 | 45,000 | 5,362 | 5,843 | ,000 |
| 46,5 | 89.261,8 | 4,617 | 4,482 | 9,675 | 9,061 | 4.442,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 31.130,5 | 43,948 | 45,000 | 5,861 | 6,403 | ,000 |
| 47,5 | 87.986,1 | 4,963 | 4,823 | 11,162 | 10,463 | 5.091,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 29.762,4 | 43,949 | 45,000 | 6,406 | 7,020 | ,000 |
| 48,5 | 86.567,3 | 5,334 | 5,189 | 12,876 | 12,083 | 5.828,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 28.454,4 | 43,951 | 45,000 | 7,001 | 7,700 | -,000 |
| 49,5 | 84.990,8 | 5,732 | 5,582 | 14,851 | 13,953 | 6.662,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 27.203,8 | 43,953 | 45,000 | 7,652 | 8,448 | ,000 |
| 50,5 | 83.241,4 | 6,159 | 6,006 | 17,126 | 16,112 | 7.604,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 26.008,1 | 43,955 | 45,000 | 8,364 | 9,270 | ,000 |
| 51,5 | 81.303,2 | 6,616 | 6,462 | 19,745 | 18,606 | 8.664,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 24.864,9 | 43,958 | 45,000 | 9,141 | 10,173 | ,000 |
| 52,5 | 79.159,9 | 7,106 | 6,953 | 22,760 | 21,485 | 9.853,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 23.771,9 | 43,960 | 45,000 | 9,991 | 11,164 | -,000 |
| 53,5 | 76.795,7 | 7,630 | 7,480 | 26,229 | 24,810 | 11.182,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 22.726,9 | 43,963 | 45,000 | 10,920 | 12,249 | ,000 |
| 54,5 | 74.195,5 | 8,190 | 8,048 | 30,217 | 28,650 | 12.660,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 21.727,7 | 43,967 | 45,000 | 11,936 | 13,434 | ,000 |
| 55,5 | 71.345,9 | 8,788 | 8,659 | 34,800 | 33,084 | 14.296,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 20.772,4 | 43,971 | 45,000 | 13,046 | 14,725 | ,000 |
| 56,5 | 68.236,1 | 9,426 | 9,316 | 40,063 | 38,205 | 16.096,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 19.859,0 | 43,975 | 45,000 | 14,259 | 16,127 | -,000 |
| 57,5 | 64.859,1 | 10,107 | 10,023 | 46,101 | 44,118 | 18.062,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 18.985,7 | 43,980 | 45,000 | 15,584 | 17,642 | -,000 |
| 58,5 | 61.213,6 | 10,831 | 10,784 | 53,022 | 50,946 | 20.191,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 18.150,8 | 43,985 | 45,000 | 17,033 | 19,271 | -,000 |
| 59,5 | 57.304,9 | 9,482 | 11,603 | 49,664 | 58,831 | 22.478,1 | 369,600 | 0,000 | 0,0 | 17.352,4 | 44,221 | 45,000 | 18,617 | 21,012 | -,000 |
| 60,5 | 32.735,7 | 9,577 | 12,483 | 53,780 | 67,936 | 24.267,2 | 379,553 | 550,000 | 20.979,6 | 16.585,1 | 44,138 | 45,000 | 20,348 | 24,718 | -,000 |
| 61,5 | 18.236,7 | 12,356 | 13,431 | 65,690 | 76,712 | 24.917,7 | 149,709 | 126,073 | 32.806,2 | 15.853,0 | 44,067 | 45,000 | 22,240 | 27,591 | ,000 |
| 62,5 | 14.083,2 | 12,576 | 14,450 | 57,652 | 71,054 | 24.991,3 | 251,096 | 224,722 | 34.751,9 | 15.154,4 | 44,062 | 45,000 | 24,308 | 29,432 | -,000 |
| 63,5 | 9.557,9 | 12,275 | 15,547 | 48,582 | 65,815 | 24.684,2 | 402,137 | 400,561 | 37.372,0 | 14.486,7 | 44,052 | 45,000 | 26,569 | 31,451 | -,000 |
| 64,5 | 5.132,7 | 11,204 | 16,727 | 38,364 | 60,961 | 24.050,9 | 597,893 | 713,987 | 40.137,4 | 13.848,5 | 44,036 | 45,000 | 29,039 | 33,665 | -,000 |
| 65,5 | 1.809,5 | 9,319 | 17,997 | 27,682 | 56,465 | 23.184,3 | 759,879 | 1272,661 | 41.955,4 | 13.238,7 | 44,016 | 45,000 | 31,739 | 35,960 | -,000 |
| 66,5 | 367,5 | 15,757 | 19,363 | 39,727 | 52,301 | 22.212,9 | 321,455 | 482,793 | 41.932,2 | 12.656,0 | 44,004 | 45,000 | 34,690 | 38,153 | ,001 |
| 67,5 | 229,0 | 18,080 | 20,832 | 39,180 | 48,444 | 21.249,7 | 234,599 | 331,951 | 40.553,9 | 12.099,1 | 44,003 | 45,000 | 37,916 | 40,279 | ,001 |
| 68,5 | 162,2 | 20,352 | 22,413 | 37,927 | 44,872 | 20.323,4 | 168,207 | 228,238 | 39.029,8 | 11.566,7 | 44,003 | 45,000 | 41,441 | 42,605 | -,002 |
| 69,5 | 125,4 | 22,599 | 24,115 | 36,229 | 41,563 | 19.435,1 | 119,091 | 156,928 | 37.401,1 | 11.057,7 | 44,003 | 45,000 | 45,295 | 45,147 | ,002 |
| 70,5 | 103,1 | 24,853 | 25,945 | 34,283 | 38,498 | 18.584,4 | 83,567 | 107,898 | 35.685,3 | 10.571,1 | 44,003 | 45,000 | 49,506 | 47,921 | -,001 |
| 71,5 | 88,4 | 27,147 | 27,914 | 32,228 | 35,659 | 17.770,1 | 58,272 | 74,187 | 33.893,1 | 10.106,0 | 44,003 | 45,000 | 54,109 | 50,937 | -,000 |

Die Entwicklung der Bestände im kontinuierlichen Modell zeigt, dass diese Ausscheideordnung eine recht gute Annäherung der diskreten Ausscheideordnung ist, und somit auch die verwendeten Funktionen eine gute Approximation der vorkommenden Intensitäten darstellen.

Aus der nach dem kontinuierlichen Modell ermittelten Ausscheideordnung wurden Übergangswahrscheinlichkeiten errechnet. Die Bezeichnung der Übergangswahrscheinlichkeiten folgt der Terminologie von *Klaus Heubeck* [5], *Müller* [8], *Saxer* [11] bzw. *Wolff* [14].

Abhängige und partielle Übergangswahrscheinlichkeiten

Die abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben sich nach folgenden Formeln:

$$q_x^a = \frac{V_{x+1}^a - V_x^a}{L_x^a}$$

$$i_x^i = \frac{R_{x+1}^i - R_x^i}{L_x^a}$$

$$i_x^r = \frac{R_{x+1}^r - R_x^r}{L_x^a}$$

Für die abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten gilt:

$$1 - \frac{L_{x+1}^a}{L_x^a} = q_x^a + i_x^i + i_x^r$$

Beide Seiten dieser Gleichung lassen sich bei der näherungsweise Berechnung der Ausscheideordnung bestimmen. Die dabei auftretenden Differenzen sind in Tabelle 2 in der Spalte "Diff." in tausendstel Promille als Kontrollwert angegeben.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten der Invaliden wurden näherungsweise aus der Beziehung

$$L_{x+1}^i = L_x^i + L_x^a i_x^i \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) - L_x^i q_x^i$$

errechnet.

Die errechneten abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten sind in Tabelle 2 "Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell" angegeben.

Die partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten ${}^*q_x^{aa}$, ${}^*i_x^i$ und ${}^*i_x^r$ wurden nach den gleichen Formeln berechnet, denen jedoch Ausscheideordnungen zugrundegelegt wurden, bei denen alle Übergangsintensitäten, bis auf jeweils eine, Null gesetzt wurden.

Für die partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten gilt:

$$1 - \frac{L_{x+1}^a}{L_x^a} = (1 - {}^*q_x^{aa})(1 - {}^*i_x^i)(1 - {}^*i_x^r)$$

Es ergeben sich folgende Werte:

Tabelle 3

Partielle Übergangswahrscheinlichkeiten

| x | ${}^*q^a$ | μ^a | ${}^*i^i$ | ν^i | x | ${}^*q^a$ | μ^a | ${}^*i^i$ | ν^i | ${}^*i^r$ | ν^r |
|------|-----------|---------|-----------|---------|------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|----------|
| 20,5 | ,694 | ,669 | ,231 | ,215 | 46,5 | 4,640 | 4,482 | 9,698 | 9,061 | 0,000 | 0,000 |
| 21,5 | ,746 | ,720 | ,267 | ,248 | 47,5 | 4,991 | 4,823 | 11,190 | 10,463 | 0,000 | 0,000 |
| 22,5 | ,803 | ,774 | ,308 | ,287 | 48,5 | 5,369 | 5,189 | 12,911 | 12,083 | 0,000 | 0,000 |
| 23,5 | ,864 | ,833 | ,356 | ,331 | 49,5 | 5,775 | 5,582 | 14,894 | 13,953 | 0,000 | 0,000 |
| 24,5 | ,930 | ,896 | ,411 | ,382 | 50,5 | 6,212 | 6,006 | 17,180 | 16,112 | 0,000 | 0,000 |
| 25,5 | 1,000 | ,964 | ,475 | ,441 | 51,5 | 6,682 | 6,462 | 19,812 | 18,606 | 0,000 | 0,000 |
| 26,5 | 1,076 | 1,038 | ,548 | ,510 | 52,5 | 7,187 | 6,953 | 22,843 | 21,485 | 0,000 | 0,000 |
| 27,5 | 1,158 | 1,116 | ,633 | ,589 | 53,5 | 7,731 | 7,480 | 26,331 | 24,810 | 0,000 | 0,000 |
| 28,5 | 1,245 | 1,201 | ,731 | ,680 | 54,5 | 8,315 | 8,048 | 30,344 | 28,650 | 0,000 | 0,000 |
| 29,5 | 1,340 | 1,292 | ,844 | ,785 | 55,5 | 8,943 | 8,659 | 34,958 | 33,084 | 0,000 | 0,000 |
| 30,5 | 1,441 | 1,390 | ,974 | ,906 | 56,5 | 9,619 | 9,316 | 40,258 | 38,205 | 0,000 | 0,000 |
| 31,5 | 1,551 | 1,496 | 1,125 | 1,047 | 57,5 | 10,345 | 10,023 | 46,342 | 44,118 | 0,000 | 0,000 |
| 32,5 | 1,668 | 1,609 | 1,299 | 1,208 | 58,5 | 11,126 | 10,784 | 53,320 | 50,946 | 0,000 | 0,000 |
| 33,5 | 1,795 | 1,732 | 1,500 | 1,396 | 59,5 | 11,965 | 11,603 | 61,314 | 58,831 | 384,063 | 0,000 |
| 34,5 | 1,931 | 1,863 | 1,732 | 1,611 | 60,5 | 12,868 | 12,483 | 70,377 | 67,936 | 392,924 | 550,000 |
| 35,5 | 2,077 | 2,004 | 1,999 | 1,861 | 61,5 | 13,838 | 13,431 | 71,186 | 76,712 | 156,902 | 126,073 |
| 36,5 | 2,235 | 2,157 | 2,309 | 2,149 | 62,5 | 14,880 | 14,450 | 66,114 | 71,054 | 262,300 | 224,722 |
| 37,5 | 2,404 | 2,320 | 2,665 | 2,481 | 63,5 | 16,000 | 15,547 | 61,391 | 65,815 | 418,567 | 400,561 |
| 38,5 | 2,587 | 2,496 | 3,077 | 2,866 | 64,5 | 17,204 | 16,727 | 56,996 | 60,961 | 619,610 | 713,987 |
| 39,5 | 2,783 | 2,686 | 3,553 | 3,309 | 65,5 | 18,498 | 17,997 | 52,906 | 56,465 | 781,495 | 1272,661 |
| 40,5 | 2,994 | 2,890 | 4,101 | 3,821 | 66,5 | 19,888 | 19,363 | 49,102 | 52,301 | 331,470 | 482,793 |
| 41,5 | 3,220 | 3,109 | 4,735 | 4,413 | 67,5 | 21,381 | 20,832 | 45,565 | 48,444 | 241,843 | 331,951 |
| 42,5 | 3,465 | 3,345 | 5,465 | 5,096 | 68,5 | 22,985 | 22,413 | 42,276 | 44,872 | 173,340 | 228,238 |
| 43,5 | 3,727 | 3,599 | 6,309 | 5,884 | 69,5 | 24,708 | 24,115 | 39,221 | 41,563 | 122,682 | 156,928 |
| 44,5 | 4,009 | 3,872 | 7,281 | 6,795 | 70,5 | 26,559 | 25,945 | 36,382 | 38,498 | 86,062 | 107,898 |
| 45,5 | 4,313 | 4,166 | 8,404 | 7,846 | 71,5 | 28,546 | 27,914 | 33,745 | 35,659 | 60,000 | 74,187 |

In jenem Altersbereich, in dem die Wahrscheinlichkeiten nur sehr kleine Werte annehmen, unterscheiden sich die abhängigen und die partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten kaum. Auffällig sind die Unterschiede in dem Altersbereich, in dem die Zugangswahrscheinlichkeit für Altersrente mit hohen Werten wirksam wird, wie z. B. beim Alter 65,5. Bei den abhängigen Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven für dieses Alter werden den Aktiven im Alter 65,5 die Todesfälle jener, die als Aktive sterben, gegenübergestellt. Da im Laufe des Jahres jedoch über 70 % der Aktiven in den Ruhestand treten und nur die Todesfälle jener gezählt werden, die als Aktive sterben, ergibt sich eine bedeutend niedrigere Zahl der Todesfälle und damit auch eine wesentlich niedrigere Sterbewahrscheinlichkeit als im Jahr davor.

Dem gegenüber zeigen die berechneten partiellen Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven einen monoton steigenden Verlauf.

Die Unterschiede der anderen Übergangswahrscheinlichkeiten erklären sich analog.

Anwendungen des kontinuierlichen Modells

Gewisse Fragen lassen sich nur mit dem kontinuierlichen Modell elegant untersuchen. So z. B. bedient sich *Wolff* des kontinuierlichen Modells bei der Untersuchung der Frage "In welcher Weise wirkt sich eine Verminderung der Sterblichkeit in einer Untergesamtheit für ein bestimmtes Alter auf die Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung aus?" [15]. Auch die umfangreichen Untersuchungen über verschiedene Todesursachen von *Preston/Keyfitz/Schoen* [13] verwenden das kontinuierliche Modell.

Das kontinuierliche Modell ermöglicht es auch, die oben beschriebenen Unterschiede zwischen den abhängigen und den partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten zu untersuchen.

Darüber hinaus ist es möglich, die Auswirkungen der Veränderung einer Übergangswahrscheinlichkeit auf die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten quantitativ zu bestimmen.

Im folgenden wird untersucht, wie sich eine Veränderung der Invalidisierung auf die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven und der Invaliden auswirkt.

Dabei wurde angenommen, dass aus z. B. wirtschaftlichen Gründen mehr Personen die Invaliditätspension in Anspruch nehmen, wobei sich jedoch die Invalidität und damit das individuelle Sterblichkeitsrisiko nicht erhöht.

Dies führt zu

Voraussetzung 1: Die Sterbeintensität des Gesamtbestandes bleibt unverändert (vor und nach der Änderung der Invalidisierungsintensität).

Die Auswirkungen einer Veränderung der Invalidisierungsintensität lassen sich nun in mehreren Schritten berechnen. Zunächst wird die Ausscheideordnung vor der Veränderung berechnet und damit auch die Sterbeintensität des Gesamtbestandes, nach folgender Beziehung:

$$\mu(x)L(x) = \mu^a(x)L^a(x) + \mu^i(x)L^i(x) \quad \text{für } x \leq 59,5$$

Dann wird die Invalidisierungsintensität erhöht und iterativ eine neue Ausscheideordnung berechnet. Durch die Veränderung der Invalidisierungsintensität ergeben sich an der Stelle $x + h$ neue Werte der Ausscheideordnung $\mu_1^a(x + h)$, $L_1^a(x + h)$, $\mu_1^i(x + h)$ und $L_1^i(x + h)$ sowie daraus auch $\mu_1(x + h)$ und $L_1(x + h)$.

h bedeutet dabei die Schrittweite im Runge-Kutta-Verfahren. Die Gesamt-Sterbeintensität erhöht sich bei diesem Berechnungsschritt zunächst von $\mu(x + h)$ auf $\mu_1(x + h)$.

Es ist nun noch eine Annahme notwendig, wie sich diese Änderung der Gesamt-Sterbeintensität μ auf die Sterbeintensität der Aktiven μ^a und jene der Invaliden μ^i aufteilt. Hier sind mehrere Annahmen möglich: z. B.

- dass sich die Änderung nur auf die Sterbeintensität der Invaliden auswirkt,
- oder dass sich die Sterbeintensitäten der Aktiven und Invaliden im gleichen Verhältnis ändern,
- oder dass sich die Änderung gewichtet mit der Anzahl der Aktiven und Invaliden auswirkt.

Für die hier im weiteren vorgestellte Untersuchung wurde folgende Annahme getroffen:

Voraussetzung 2: Die Sterbeintensitäten der Aktiven und der Invaliden ändern sich im gleichen Verhältnis.

Die Berechnung geht dann folgendermassen vor sich:

Man berechnet zunächst den Faktor $f_1(x + h) = \mu(x + h)/\mu_1(x + h)$. Der Faktor $f_1(x + h)$ ist kleiner als 1, da sich die Gesamt-Sterbeintensität bei den Iterationsschritten erhöhen würde. Mit diesem Faktor wird nun die

Sterbeintensität der Aktiven und der Invaliden vermindert:

$$\mu_2^a(x+h) = f_1(x+h)\mu^a(x+h)$$

und

$$\mu_2^i(x+h) = f_1(x+h)\mu^i(x+h)$$

Dann wird mit den neuen Werten $\mu_2^a(x+h)$ und $\mu_2^i(x+h)$ die Ausscheideordnung an der Stelle $x+h$ nochmals berechnet, und daraus mit der Beziehung

$$\mu_2(x+h) = \frac{\mu_2^a(x+h)L_2^a(x+h) + \mu_2^i(x+h)L_2^i(x+h)}{L_2^a(x+h) + L_2^i(x+h)}$$

die Gesamt-Sterbeintensität $\mu_2(x+h)$. Mit diesem neu gewonnenen $\mu_2(x+h)$ kann ein neuer Faktor $f_2(x+h) = \mu(x+h)/\mu_2(x+h)$ errechnet werden.

Mit dem $f_2(x+h)$ werden die bereits verminderten $\mu_2^a(x+h)$ und $\mu_2^i(x+h)$ nochmals vermindert. Man erhält so eine Folge von Faktoren

$$f_1(x+h), \quad f_2(x+h), \quad f_3(x+h), \dots$$

Die Berechnungen zeigen, dass sich diese Faktoren dem Wert 1 nähern. Nach drei Schritten unterscheidet sich $f_3(x+h)$ nur mehr in der achten bzw. neunten Dezimalstelle von 1, d. h. dass weitere Iterationsschritte nur mehr in einem vernachlässigbar geringen Ausmass zu einer Änderung der Sterbeintensitäten führen.

Die Berechnungen wurden mit drei Iterationsschritten durchgeführt. Für einige Alter wurden die Faktoren f_k in den folgenden drei Tabellen angegeben.

Tabelle 4

Entwicklung der Parameter C^a und C^i , des Faktors $f_k = \mu(x)/\mu_k(x)$ und der Differenzen $\mu_k(x) - \mu(x)$ bei einer Erhöhung der Invalidisierungsintensität um 40 % im Altersintervall $35,5 + \frac{1}{7}$ bis 36,5

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 35,643$ mit $\mu(x) = 2,43405E-003$

| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
|---------|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| 1 | 96.638,4 | 1,39756E-004 | 1.313,7 | 4,21232E-002 | 2,43556E-003 | ,99937829530 | 1,5E-006 |
| 2 | 96.638,4 | 1,39669E-004 | 1.313,7 | 4,20970E-002 | 2,43405E-003 | ,99999922981 | 1,9E-009 |
| 3 | 96.638,4 | 1,39669E-004 | 1.313,7 | 4,20970E-002 | 2,43405E-003 | ,99999999906 | 2,3E-012 |

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 35,786$ mit $\mu(x) = 2,46428E-003$

| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
|---------|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| 1 | 96.575,0 | 1,39669E-004 | 1.342,8 | 4,20970E-002 | 2,46582E-003 | ,99937681485 | 1,5E-006 |
| 2 | 96.575,0 | 1,39581E-004 | 1.342,8 | 4,20708E-002 | 2,46428E-003 | ,99999922225 | 1,9E-009 |
| 3 | 96.575,0 | 1,39581E-004 | 1.342,8 | 4,20707E-002 | 2,46428E-003 | ,99999999903 | 2,4E-012 |

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 35,929$ mit $\mu(x) = 2,49491E-003$

| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
|---------|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| 1 | 96.510,7 | 1,39581E-004 | 1.372,5 | 4,20707E-002 | 2,49647E-003 | ,99937532652 | 1,6E-006 |
| 2 | 96.510,7 | 1,39494E-004 | 1.372,5 | 4,20445E-002 | 2,49491E-003 | ,99999921465 | 2,0E-009 |
| 3 | 96.510,7 | 1,39494E-004 | 1.372,5 | 4,20444E-002 | 2,49491E-003 | ,99999999901 | 2,5E-012 |

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 36,071$ mit $\mu(x) = 2,52594E-003$

| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
|---------|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| 1 | 96.445,3 | 1,39494E-004 | 1.402,7 | 4,20444E-002 | 2,52753E-003 | ,99937383155 | 1,6E-006 |
| 2 | 96.445,4 | 1,39407E-004 | 1.402,7 | 4,20181E-002 | 2,52594E-003 | ,99999920705 | 2,0E-009 |
| 3 | 96.445,4 | 1,39407E-004 | 1.402,7 | 4,20181E-002 | 2,52594E-003 | ,99999999900 | 2,5E-012 |

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 36,214$ mit $\mu(x) = 2,55738E-003$

| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
|---------|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| 1 | 96.379,0 | 1,39407E-004 | 1.433,6 | 4,20181E-002 | 2,55899E-003 | ,99937233117 | 1,6E-006 |
| 2 | 96.379,0 | 1,39319E-004 | 1.433,6 | 4,19917E-002 | 2,55738E-003 | ,99999919943 | 2,0E-009 |
| 3 | 96.379,0 | 1,39319E-004 | 1.433,6 | 4,19917E-002 | 2,55738E-003 | ,99999999898 | 2,6E-012 |

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 36,357$ mit $\mu(x) = 2,58924E-003$

| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
|---------|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| 1 | 96.311,6 | 1,39319E-004 | 1.465,1 | 4,19917E-002 | 2,59087E-003 | ,99937082662 | 1,6E-006 |
| 2 | 96.311,6 | 1,39231E-004 | 1.465,1 | 4,19652E-002 | 2,58924E-003 | ,99999919179 | 2,1E-009 |
| 3 | 96.311,6 | 1,39231E-004 | 1.465,1 | 4,19652E-002 | 2,58924E-003 | ,99999999896 | 2,7E-012 |

Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 36,500$ mit $\mu(x) = 2,62152E-003$

| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
|---------|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| 1 | 96.243,1 | 1,39231E-004 | 1.497,1 | 4,19652E-002 | 2,62317E-003 | ,99936931916 | 1,7E-006 |
| 2 | 96.243,1 | 1,39143E-004 | 1.497,1 | 4,19387E-002 | 2,62152E-003 | ,99999918415 | 2,1E-009 |
| 3 | 96.243,1 | 1,39143E-004 | 1.497,1 | 4,19387E-002 | 2,62152E-003 | ,99999999895 | 2,8E-012 |

Tabelle 5

Entwicklung der Parameter C^a und C^i , des Faktors $f_k = \mu(x)/\mu_k(x)$ und der Differenzen $\mu_k(x) - \mu(x)$ bei einer Erhöhung der Invalidisierungsintensität um 40 % im Altersintervall $45,5 + \frac{1}{7}$ bis 46,5

| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 45,643$ mit $\mu(x) = 5,91945E-003$ | | | | | | | |
|--|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
| 1 | 88.616,5 | 1,33422E-004 | 5.585,3 | 4,02142E-002 | 5,92341E-003 | ,99933160814 | 4,0E-006 |
| 2 | 88.616,5 | 1,33333E-004 | 5.585,3 | 4,01873E-002 | 5,91946E-003 | ,99999881977 | 7,0E-009 |
| 3 | 88.616,5 | 1,33332E-004 | 5.585,3 | 4,01873E-002 | 5,91945E-003 | ,99999999792 | 1,2E-011 |

| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 45,786$ mit $\mu(x) = 5,99732E-003$ | | | | | | | |
|--|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
| 1 | 88.425,4 | 1,33332E-004 | 5.696,2 | 4,01873E-002 | 6,00132E-003 | ,99933312257 | 4,0E-006 |
| 2 | 88.425,5 | 1,33244E-004 | 5.696,2 | 4,01605E-002 | 5,99732E-003 | ,99999881931 | 7,1E-009 |
| 3 | 88.425,5 | 1,33243E-004 | 5.696,2 | 4,01604E-002 | 5,99732E-003 | ,99999999791 | 1,3E-011 |

| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 45,929$ mit $\mu(x) = 6,07626E-003$ | | | | | | | |
|--|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
| 1 | 88.231,4 | 1,33243E-004 | 5.809,1 | 4,01604E-002 | 6,08030E-003 | ,99933474497 | 4,0E-006 |
| 2 | 88.231,4 | 1,33155E-004 | 5.809,1 | 4,01337E-002 | 6,07627E-003 | ,99999881915 | 7,2E-009 |
| 3 | 88.231,4 | 1,33155E-004 | 5.809,1 | 4,01337E-002 | 6,07626E-003 | ,99999999790 | 1,3E-011 |

| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 46,071$ mit $\mu(x) = 6,15630E-003$ | | | | | | | |
|--|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
| 1 | 88.034,3 | 1,33155E-004 | 5.924,1 | 4,01337E-002 | 6,16039E-003 | ,99933647769 | 4,1E-006 |
| 2 | 88.034,3 | 1,33066E-004 | 5.924,1 | 4,01070E-002 | 6,15631E-003 | ,99999881927 | 7,3E-009 |
| 3 | 88.034,3 | 1,33066E-004 | 5.924,1 | 4,01070E-002 | 6,15630E-003 | ,99999999790 | 1,3E-011 |

| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 46,214$ mit $\mu(x) = 6,23745E-003$ | | | | | | | |
|--|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
| 1 | 87.834,0 | 1,33066E-004 | 6.041,2 | 4,01070E-002 | 6,24158E-003 | ,99933832307 | 4,1E-006 |
| 2 | 87.834,1 | 1,32978E-004 | 6.041,3 | 4,00805E-002 | 6,23746E-003 | ,99999881970 | 7,4E-009 |
| 3 | 87.834,1 | 1,32978E-004 | 6.041,3 | 4,00804E-002 | 6,23745E-003 | ,99999999790 | 1,3E-011 |

| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 46,357$ mit $\mu(x) = 6,31973E-003$ | | | | | | | |
|--|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
| 1 | 87.630,6 | 1,32978E-004 | 6.160,5 | 4,00804E-002 | 6,32390E-003 | ,99934028351 | 4,2E-006 |
| 2 | 87.630,7 | 1,32890E-004 | 6.160,5 | 4,00540E-002 | 6,31973E-003 | ,99999882044 | 7,5E-009 |
| 3 | 87.630,7 | 1,32890E-004 | 6.160,5 | 4,00539E-002 | 6,31973E-003 | ,99999999789 | 1,3E-011 |

| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 46,500$ mit $\mu(x) = 6,40314E-003$ | | | | | | | |
|--|----------|--------------|---------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|
| Schritt | L^a | C^a | L^i | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ |
| 1 | 87.424,1 | 1,32890E-004 | 6.281,9 | 4,00539E-002 | 6,40736E-003 | ,99934236141 | 4,2E-006 |
| 2 | 87.424,1 | 1,32803E-004 | 6.281,9 | 4,00276E-002 | 6,40315E-003 | ,99999882149 | 7,5E-009 |
| 3 | 87.424,1 | 1,32802E-004 | 6.281,9 | 4,00275E-002 | 6,40314E-003 | ,99999999789 | 1,4E-011 |

Tabelle 6

Entwicklung der Parameter C^a und C^i , des Faktors $f_k = \mu(x)/\mu_k(x)$ und der Differenzen $\mu_k(x) - \mu(x)$ bei einer Erhöhung der Invalidisierungsintensität um 40 % im Altersintervall $55,5 + \frac{1}{7}$ bis 56,5

| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 55,643$ mit $\mu(x) = 1,49188E-002$ | | | | | | | |
|--|----------|--------------|------------|-------------------|---------------------|--------------|----------|
| Schritt | C^a | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ | | |
| 1 | 65.332,5 | 1,28851E-004 | 20.132,4 | 3,88366E-002 | 1,49210E-002 | ,99984765574 | 2,3E-006 |
| 2 | 65.332,5 | 1,28832E-004 | 20.132,4 | 3,88307E-002 | 1,49188E-002 | ,99999974541 | 3,8E-009 |
| 3 | 65.332,5 | 1,28831E-004 | 20.132,4 | 3,88307E-002 | 1,49188E-002 | ,99999999957 | 6,4E-012 |
| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 55,786$ mit $\mu(x) = 1,51144E-002$ | | | | | | | |
| Schritt | C^a | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ | | |
| 1 | 64.817,8 | 1,28831E-004 | 20.463,9 | 3,88307E-002 | 1,51165E-002 | ,99986354329 | 2,1E-006 |
| 2 | 64.817,8 | 1,28814E-004 | 20.463,9 | 3,88254E-002 | 1,51144E-002 | ,99999977324 | 3,4E-009 |
| 3 | 64.817,8 | 1,28814E-004 | 20.463,9 | 3,88253E-002 | 1,51144E-002 | ,99999999962 | 5,8E-012 |
| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 55,929$ mit $\mu(x) = 1,53123E-002$ | | | | | | | |
| Schritt | C^a | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ | | |
| 1 | 64.297,4 | 1,28814E-004 | 20.799,2 | 3,88253E-002 | 1,53142E-002 | ,99987974166 | 1,8E-006 |
| 2 | 64.297,4 | 1,28798E-004 | 20.799,2 | 3,88207E-002 | 1,53123E-002 | ,99999980131 | 3,0E-009 |
| 3 | 64.297,4 | 1,28798E-004 | 20.799,2 | 3,88207E-002 | 1,53123E-002 | ,99999999967 | 5,0E-012 |
| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 56,071$ mit $\mu(x) = 1,55125E-002$ | | | | | | | |
| Schritt | C^a | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ | | |
| 1 | 63.771,2 | 1,28798E-004 | 21.138,2 | 3,88207E-002 | 1,55141E-002 | ,99989625310 | 1,6E-006 |
| 2 | 63.771,2 | 1,28785E-004 | 21.138,2 | 3,88166E-002 | 1,55125E-002 | ,99999982962 | 2,6E-009 |
| 3 | 63.771,2 | 1,28785E-004 | 21.138,2 | 3,88166E-002 | 1,55125E-002 | ,99999999972 | 4,4E-012 |
| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 56,214$ mit $\mu(x) = 1,57150E-002$ | | | | | | | |
| Schritt | C^a | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ | | |
| 1 | 63.239,3 | 1,28785E-004 | 21.481,0 | 3,88166E-002 | 1,57164E-002 | ,99991307970 | 1,4E-006 |
| 2 | 63.239,3 | 1,28774E-004 | 21.481,0 | 3,88133E-002 | 1,57150E-002 | ,99999985814 | 2,2E-009 |
| 3 | 63.239,3 | 1,28774E-004 | 21.481,0 | 3,88133E-002 | 1,57150E-002 | ,99999999977 | 3,6E-012 |
| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 56,357$ mit $\mu(x) = 1,59198E-002$ | | | | | | | |
| Schritt | C^a | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ | | |
| 1 | 62.701,6 | 1,28774E-004 | 21.827,5 | 3,88133E-002 | 1,59209E-002 | ,99993022345 | 1,1E-006 |
| 2 | 62.701,6 | 1,28765E-004 | 21.827,5 | 3,88106E-002 | 1,59198E-002 | ,99999988685 | 1,8E-009 |
| 3 | 62.701,6 | 1,28765E-004 | 21.827,5 | 3,88105E-002 | 1,59198E-002 | ,99999999981 | 3,0E-012 |
| Werte nach der St.intens.-Iterat. an d.Stelle $x = 56,500$ mit $\mu(x) = 1,61269E-002$ | | | | | | | |
| Schritt | C^a | C^i | $\mu_k(x)$ | $\mu(x)/\mu_k(x)$ | $\mu_k(x) - \mu(x)$ | | |
| 1 | 62.158,1 | 1,28765E-004 | 22.177,7 | 3,88105E-002 | 1,61278E-002 | ,99994768620 | 8,4E-007 |
| 2 | 62.158,1 | 1,28758E-004 | 22.177,7 | 3,88085E-002 | 1,61269E-002 | ,99999991574 | 1,4E-009 |
| 3 | 62.158,1 | 1,28758E-004 | 22.177,7 | 3,88085E-002 | 1,61269E-002 | ,99999999986 | 2,3E-012 |

Wie am Anfang der Arbeit dargelegt, wurde die Ausscheideordnung beginnend mit dem Alter 20,5 berechnet.

Beim nächsten Schritt an der Stelle $20,5 + 2h$ wurde bereits von den neu gewonnenen Werten der Intensitätsfunktionen an der Stelle $20,5 + h$ ausgegangen. Die Berechnungen wurden bis zum Alter 58,5 durchgeführt. Über diesem Alter sind die Annahmen, welche zur Voraussetzung 1 geführt haben, nicht mehr zutreffend. In diesem Altersbereich führt diese Annahme wohl eher zu einem Anstieg der Inanspruchnahme der Frühpension.

Bei den Berechnungen ist die Schrittweite h abhängig von der Anzahl der Schritte im Runge-Kutta-Verfahren. $h = 1$ bedeutet, dass die Ausscheideordnung in Ganzjahresintervallen berechnet wird. Durch das kontinuierliche Modell ist es möglich, h kleiner als 1 zu wählen.

Die folgende Zusammenstellung zeigt die Abhängigkeit der Bestände von der Schrittweite h für das Alter 55,5 bei einer Erhöhung der Invalidisierung um 20 %:

Abhängigkeit der Bestände und Sterbewahrscheinlichkeiten von der Schrittweite h

| h | $L_{55,5}^a$ | $q_{55,5}^a$ | $L_{55,5}^i$ | $q_{55,5}^i$ |
|---------------|--------------|------------------------------------|--------------|-------------------------------------|
| 1 | 68 568 | 8,104 ⁰ / ₀₀ | 17 087 | 40,746 ⁰ / ₀₀ |
| $\frac{1}{3}$ | 68 563 | 8,106 ⁰ / ₀₀ | 17 084 | 40,755 ⁰ / ₀₀ |
| $\frac{1}{5}$ | 68 562 | 8,106 ⁰ / ₀₀ | 17 083 | 40,757 ⁰ / ₀₀ |
| $\frac{1}{7}$ | 68 562 | 8,106 ⁰ / ₀₀ | 17 083 | 40,757 ⁰ / ₀₀ |

Die Zusammenstellung zeigt, dass sich die errechneten Bestände und Sterbewahrscheinlichkeiten (bei der angegebenen Genauigkeit) nicht mehr ändern. Die weiteren Berechnungen wurden mit der Schrittweite $1/7$ durchgeführt.

Die Ausscheideordnung wurde für drei Erhöhungen der Invalidisierungsintensität aufgestellt: für 20 %, 40 % und 60 % Steigerung. Dies entspricht einer Steigerung der Invalidisierungswahrscheinlichkeit ungefähr im gleichen Ausmass.

Die folgenden drei Tabellen zeigen die Ausscheideordnungen, wie sie sich durch die Erhöhung der Invalidisierungsintensität ergeben.

Tabelle 7

Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell bei einer Erhöhung der Invaliddisierungsintensität um 20 % $h = \frac{1}{7}$, $k = 3$, $v_x^i = 1,125 \cdot 10^{-5} \cdot 1,2 \cdot e^{0,1439x}$

| x | L ^a | q ^a | μ ^a | i ⁱ | v ⁱ | L ⁱ | i ^r | v ^r | L ^r | l ⁱ | q ⁱ | μ ⁱ | μ ^r | μ | Diff |
|------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|-------|
| 20,5 | 100.000,0 | ,693 | ,669 | ,277 | ,258 | 0,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 100.000,0 | 43,198 | 45,000 | ,581 | ,669 | -,000 |
| 21,5 | 99.903,0 | ,743 | ,718 | ,320 | ,298 | 27,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 95.680,2 | 43,549 | 44,877 | ,635 | ,730 | ,000 |
| 22,5 | 99.796,8 | ,798 | ,770 | ,370 | ,344 | 57,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 91.513,4 | 43,537 | 44,762 | ,694 | ,795 | -,000 |
| 23,5 | 99.680,3 | ,856 | ,827 | ,427 | ,397 | 90,8 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 87.529,2 | 43,477 | 44,654 | ,758 | ,867 | ,000 |
| 24,5 | 99.552,4 | ,919 | ,887 | ,493 | ,459 | 128,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 83.723,6 | 43,403 | 44,552 | ,829 | ,944 | ,000 |
| 25,5 | 99.411,9 | ,986 | ,953 | ,569 | ,530 | 170,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 80.089,8 | 43,324 | 44,453 | ,906 | 1,027 | -,000 |
| 26,5 | 99.257,2 | 1,059 | 1,023 | ,657 | ,612 | 218,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 76.620,0 | 43,243 | 44,357 | ,990 | 1,118 | -,000 |
| 27,5 | 99.086,9 | 1,137 | 1,098 | ,759 | ,706 | 273,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 73.306,7 | 43,161 | 44,264 | 1,082 | 1,217 | ,000 |
| 28,5 | 98.899,0 | 1,220 | 1,179 | ,876 | ,816 | 335,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 70.142,7 | 43,078 | 44,171 | 1,183 | 1,324 | ,000 |
| 29,5 | 98.691,7 | 1,310 | 1,266 | 1,012 | ,942 | 405,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 67.121,1 | 42,994 | 44,080 | 1,293 | 1,441 | -,000 |
| 30,5 | 98.462,5 | 1,407 | 1,359 | 1,168 | 1,088 | 485,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 64.235,3 | 42,909 | 43,988 | 1,413 | 1,568 | ,000 |
| 31,5 | 98.209,0 | 1,510 | 1,459 | 1,349 | 1,256 | 577,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 61.479,0 | 42,823 | 43,896 | 1,544 | 1,707 | -,000 |
| 32,5 | 97.928,3 | 1,621 | 1,567 | 1,557 | 1,450 | 682,3 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 58.846,3 | 42,736 | 43,804 | 1,688 | 1,859 | -,000 |
| 33,5 | 97.617,0 | 1,740 | 1,682 | 1,798 | 1,675 | 802,3 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 56.331,4 | 42,647 | 43,710 | 1,845 | 2,025 | -,000 |
| 34,5 | 97.271,7 | 1,867 | 1,806 | 2,076 | 1,934 | 939,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 53.929,0 | 42,557 | 43,615 | 2,016 | 2,206 | ,000 |
| 35,5 | 96.886,2 | 2,004 | 1,938 | 2,396 | 2,233 | 1.097,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 51.634,0 | 42,465 | 43,519 | 2,204 | 2,404 | -,000 |
| 36,5 | 96.461,8 | 2,151 | 2,081 | 2,767 | 2,579 | 1.278,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 49.441,3 | 42,371 | 43,420 | 2,409 | 2,622 | -,000 |
| 37,5 | 95.987,4 | 2,308 | 2,234 | 3,194 | 2,978 | 1.485,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 47.346,4 | 42,276 | 43,321 | 2,633 | 2,860 | ,000 |
| 38,5 | 95.459,3 | 2,477 | 2,398 | 3,687 | 3,439 | 1.722,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 45.344,8 | 42,179 | 43,219 | 2,878 | 3,121 | -,000 |
| 39,5 | 94.871,0 | 2,657 | 2,573 | 4,256 | 3,971 | 1.994,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 43.432,2 | 42,081 | 43,116 | 3,145 | 3,408 | -,000 |
| 40,5 | 94.215,1 | 2,851 | 2,762 | 4,913 | 4,585 | 2.305,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 41.604,5 | 41,981 | 43,012 | 3,438 | 3,724 | ,000 |
| 41,5 | 93.483,7 | 3,058 | 2,964 | 5,670 | 5,295 | 2.662,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 39.857,9 | 41,881 | 42,906 | 3,757 | 4,070 | ,000 |
| 42,5 | 92.667,8 | 3,280 | 3,182 | 6,544 | 6,115 | 3.069,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 38.188,6 | 41,779 | 42,800 | 4,107 | 4,452 | ,000 |
| 43,5 | 91.757,5 | 3,518 | 3,414 | 7,552 | 7,061 | 3.535,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 36.593,1 | 41,678 | 42,693 | 4,489 | 4,872 | ,000 |
| 44,5 | 90.741,7 | 3,773 | 3,664 | 8,715 | 8,154 | 4.066,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 35.068,0 | 41,577 | 42,586 | 4,906 | 5,334 | -,000 |
| 45,5 | 89.608,6 | 4,046 | 3,933 | 10,055 | 9,416 | 4.671,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 33.610,0 | 41,477 | 42,479 | 5,362 | 5,843 | -,000 |
| 46,5 | 88.345,0 | 4,338 | 4,221 | 11,600 | 10,873 | 5.360,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 32.215,9 | 41,379 | 42,374 | 5,861 | 6,403 | -,000 |
| 47,5 | 86.936,9 | 4,651 | 4,530 | 13,382 | 12,556 | 6.141,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 30.882,9 | 41,283 | 42,271 | 6,406 | 7,020 | -,000 |
| 48,5 | 85.369,2 | 4,987 | 4,862 | 15,434 | 14,499 | 7.027,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 29.607,9 | 41,191 | 42,170 | 7,001 | 7,700 | -,000 |
| 49,5 | 83.625,9 | 5,346 | 5,219 | 17,798 | 16,743 | 8.028,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 28.388,4 | 41,104 | 42,074 | 7,652 | 8,448 | -,000 |
| 50,5 | 81.690,5 | 5,731 | 5,603 | 20,520 | 19,334 | 9.156,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 27.221,5 | 41,022 | 41,982 | 8,364 | 9,270 | -,000 |
| 51,5 | 79.546,0 | 6,143 | 6,017 | 23,653 | 22,327 | 10.422,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 26.104,8 | 40,948 | 41,898 | 9,141 | 10,173 | ,000 |
| 52,5 | 77.175,9 | 6,584 | 6,461 | 27,257 | 25,782 | 11.838,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 25.035,9 | 40,882 | 41,821 | 9,991 | 11,164 | -,000 |
| 53,5 | 74.564,2 | 7,057 | 6,941 | 31,400 | 29,772 | 13.415,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 24.012,3 | 40,828 | 41,754 | 10,920 | 12,249 | -,000 |
| 54,5 | 71.696,7 | 7,564 | 7,457 | 36,161 | 34,380 | 15.161,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 23.032,0 | 40,785 | 41,698 | 11,936 | 13,434 | -,000 |
| 55,5 | 68.561,8 | 8,106 | 8,015 | 41,627 | 39,701 | 17.082,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 22.092,6 | 40,757 | 41,656 | 13,046 | 14,725 | -,000 |
| 56,5 | 65.152,0 | 8,687 | 8,618 | 47,897 | 45,846 | 19.182,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 21.192,2 | 40,746 | 41,630 | 14,259 | 16,127 | -,000 |
| 57,5 | 61.465,4 | 9,309 | 9,271 | 55,083 | 52,941 | 21.457,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 20.328,7 | 40,754 | 41,621 | 15,584 | 17,642 | ,000 |
| 58,5 | 57.507,5 | 9,975 | 9,977 | 63,309 | 61,135 | 23.899,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 19.500,2 | 40,784 | 41,633 | 17,033 | 19,271 | -,000 |

Tabelle 8

Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell bei einer Erhöhung der Invaldisierungsintensität um 40 % $h = \frac{1}{7}$, $k = 3$, $v_x^i = 1,125 \cdot 10^{-5} \cdot 1,4 \cdot e^{0,1439x}$

| x | L ^a | q ^a | μ^a | i ⁱ | v ⁱ | L ⁱ | i ^r | v ^r | L ^r | l ⁱ | q ⁱ | μ^i | μ^r | μ | Diff |
|------|----------------|----------------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|---------|--------|-------|
| 20,5 | 100.000,0 | ,691 | ,669 | ,323 | ,301 | 0,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 100.000,0 | 43,111 | 45,000 | ,581 | ,669 | -,000 |
| 21,5 | 99.898,5 | ,740 | ,716 | ,374 | ,347 | 31,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 95.688,9 | 43,364 | 44,754 | ,635 | ,730 | -,000 |
| 22,5 | 99.787,3 | ,792 | ,766 | ,431 | ,401 | 66,8 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 91.539,4 | 43,251 | 44,527 | ,694 | ,795 | ,000 |
| 23,5 | 99.665,2 | ,848 | ,820 | ,498 | ,463 | 106,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 87.580,3 | 43,094 | 44,314 | ,758 | ,867 | -,000 |
| 24,5 | 99.531,0 | ,909 | ,879 | ,575 | ,535 | 150,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 83.806,0 | 42,929 | 44,112 | ,829 | ,944 | -,000 |
| 25,5 | 99.383,3 | ,973 | ,941 | ,664 | ,618 | 199,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 80.208,4 | 42,762 | 43,918 | ,906 | 1,027 | -,000 |
| 26,5 | 99.220,6 | 1,043 | 1,008 | ,767 | ,714 | 255,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 76.778,5 | 42,595 | 43,732 | ,990 | 1,118 | ,000 |
| 27,5 | 99.041,1 | 1,117 | 1,080 | ,885 | ,824 | 319,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 73.508,2 | 42,429 | 43,550 | 1,082 | 1,217 | -,000 |
| 28,5 | 98.842,7 | 1,197 | 1,158 | 1,022 | ,951 | 391,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 70.389,3 | 42,264 | 43,371 | 1,183 | 1,324 | -,000 |
| 29,5 | 98.623,4 | 1,282 | 1,240 | 1,180 | 1,099 | 473,8 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 67.414,3 | 42,099 | 43,194 | 1,293 | 1,441 | ,000 |
| 30,5 | 98.380,5 | 1,374 | 1,329 | 1,363 | 1,269 | 567,8 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 64.576,2 | 41,933 | 43,017 | 1,413 | 1,568 | ,000 |
| 31,5 | 98.111,3 | 1,472 | 1,424 | 1,573 | 1,465 | 675,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 61.868,3 | 41,767 | 42,841 | 1,544 | 1,707 | -,000 |
| 32,5 | 97.812,5 | 1,577 | 1,526 | 1,817 | 1,692 | 798,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 59.284,3 | 41,598 | 42,664 | 1,688 | 1,859 | ,000 |
| 33,5 | 97.480,6 | 1,689 | 1,635 | 2,097 | 1,954 | 939,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 56.818,2 | 41,428 | 42,486 | 1,845 | 2,025 | 0,000 |
| 34,5 | 97.111,6 | 1,809 | 1,752 | 2,421 | 2,256 | 1.100,3 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 54.464,3 | 41,256 | 42,306 | 2,016 | 2,206 | -,000 |
| 35,5 | 96.700,8 | 1,937 | 1,876 | 2,795 | 2,605 | 1.285,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 52.217,3 | 41,081 | 42,123 | 2,204 | 2,404 | 0,000 |
| 36,5 | 96.243,1 | 2,074 | 2,010 | 3,227 | 3,008 | 1.497,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 50.072,2 | 40,904 | 41,939 | 2,409 | 2,622 | ,000 |
| 37,5 | 95.732,9 | 2,221 | 2,153 | 3,725 | 3,474 | 1.740,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 48.024,0 | 40,725 | 41,752 | 2,633 | 2,860 | ,000 |
| 38,5 | 95.163,6 | 2,378 | 2,306 | 4,300 | 4,012 | 2.018,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 46.068,2 | 40,544 | 41,563 | 2,878 | 3,121 | ,000 |
| 39,5 | 94.528,1 | 2,546 | 2,469 | 4,964 | 4,633 | 2.337,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 44.200,4 | 40,361 | 41,372 | 3,145 | 3,408 | -,000 |
| 40,5 | 93.818,3 | 2,725 | 2,644 | 5,729 | 5,350 | 2.703,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 42.416,5 | 40,177 | 41,179 | 3,438 | 3,724 | -,000 |
| 41,5 | 93.025,1 | 2,916 | 2,832 | 6,612 | 6,178 | 3.121,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 40.712,3 | 39,992 | 40,986 | 3,757 | 4,070 | -,000 |
| 42,5 | 92.138,7 | 3,121 | 3,032 | 7,631 | 7,134 | 3.599,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 39.084,2 | 39,807 | 40,791 | 4,107 | 4,452 | -,000 |
| 43,5 | 91.148,1 | 3,339 | 3,247 | 8,806 | 8,238 | 4.145,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 37.528,3 | 39,622 | 40,597 | 4,489 | 4,872 | ,000 |
| 44,5 | 90.041,1 | 3,573 | 3,477 | 10,161 | 9,513 | 4.767,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 36.041,4 | 39,440 | 40,405 | 4,906 | 5,334 | -,000 |
| 45,5 | 88.804,5 | 3,822 | 3,723 | 11,722 | 10,985 | 5.476,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 34.619,9 | 39,261 | 40,214 | 5,362 | 5,843 | ,000 |
| 46,5 | 87.424,1 | 4,090 | 3,987 | 13,522 | 12,685 | 6.281,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 33.260,7 | 39,086 | 40,028 | 5,861 | 6,403 | -,000 |
| 47,5 | 85.884,4 | 4,375 | 4,270 | 15,597 | 14,648 | 7.195,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 31.960,7 | 38,917 | 39,846 | 6,406 | 7,020 | -,000 |
| 48,5 | 84.169,1 | 4,681 | 4,574 | 17,986 | 16,916 | 8.228,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 30.716,8 | 38,756 | 39,671 | 7,001 | 7,700 | ,000 |
| 49,5 | 82.261,3 | 5,008 | 4,901 | 20,737 | 19,534 | 9.394,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 29.526,4 | 38,605 | 39,506 | 7,652 | 8,448 | -,000 |
| 50,5 | 80.143,5 | 5,358 | 5,252 | 23,903 | 22,557 | 10.704,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 28.386,5 | 38,467 | 39,351 | 8,364 | 9,270 | -,000 |
| 51,5 | 77.798,4 | 5,734 | 5,631 | 27,545 | 26,048 | 12.171,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 27.294,6 | 38,342 | 39,210 | 9,141 | 10,173 | 0,000 |
| 52,5 | 75.209,3 | 6,137 | 6,039 | 31,733 | 30,079 | 13.807,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 26.248,0 | 38,235 | 39,084 | 9,991 | 11,164 | ,000 |
| 53,5 | 72.361,1 | 6,569 | 6,479 | 36,545 | 34,735 | 15.620,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 25.244,4 | 38,149 | 38,978 | 10,920 | 12,249 | -,000 |
| 54,5 | 69.241,3 | 7,034 | 6,956 | 42,070 | 40,110 | 17.618,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 24.281,4 | 38,087 | 38,894 | 11,936 | 13,434 | -,000 |
| 55,5 | 65.841,3 | 7,533 | 7,473 | 48,408 | 46,318 | 19.804,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 23.356,6 | 38,051 | 38,837 | 13,046 | 14,725 | ,000 |
| 56,5 | 62.158,1 | 8,070 | 8,034 | 55,670 | 53,487 | 22.177,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 22.467,8 | 38,048 | 38,809 | 14,259 | 16,127 | -,000 |
| 57,5 | 58.196,2 | 8,648 | 8,645 | 63,984 | 61,765 | 24.728,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 21.613,0 | 38,079 | 38,814 | 15,584 | 17,642 | -,000 |
| 58,5 | 53.969,3 | 9,271 | 9,312 | 73,487 | 71,324 | 27.439,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 20.790,0 | 38,150 | 38,858 | 17,033 | 19,271 | -,000 |

Tabelle 9

Ausscheideordnung – kontinuierliches Modell bei einer Erhöhung der Invaliderungsintensität um 60 % $h = \frac{1}{7}$, $k = 3$, $v_x^i = 1,125 \cdot 10^{-5} \cdot 1,6 \cdot e^{0,1439x}$

| x | L ^a | q ^a | μ ^a | i ⁱ | v ⁱ | L ⁱ | i ^r | v ^r | L ^r | l ⁱ | q ⁱ | μ ⁱ | μ ^r | μ | Diff |
|------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|-------|
| 20,5 | 100.000,0 | ,690 | ,669 | ,370 | ,344 | 0,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 100.000,0 | 43,025 | 45,000 | ,581 | ,669 | -,000 |
| 21,5 | 99.894,0 | ,737 | ,714 | ,427 | ,397 | 36,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 95.697,5 | 43,180 | 44,632 | ,635 | ,730 | -,000 |
| 22,5 | 99.777,7 | ,787 | ,762 | ,493 | ,459 | 76,3 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 91.565,2 | 42,968 | 44,294 | ,694 | ,795 | -,000 |
| 23,5 | 99.650,0 | ,841 | ,814 | ,569 | ,530 | 121,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 87.630,9 | 42,718 | 43,978 | ,758 | ,867 | -,000 |
| 24,5 | 99.509,5 | ,899 | ,870 | ,657 | ,612 | 171,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 83.887,4 | 42,464 | 43,680 | ,829 | ,944 | -,000 |
| 25,5 | 99.354,7 | ,961 | ,930 | ,759 | ,706 | 228,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 80.325,2 | 42,212 | 43,396 | ,906 | 1,027 | -,000 |
| 26,5 | 99.183,9 | 1,027 | ,994 | ,876 | ,815 | 292,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 76.934,5 | 41,965 | 43,123 | ,990 | 1,118 | -,000 |
| 27,5 | 98.995,1 | 1,098 | 1,063 | 1,012 | ,942 | 365,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 73.706,0 | 41,720 | 42,857 | 1,082 | 1,217 | -,000 |
| 28,5 | 98.786,3 | 1,174 | 1,137 | 1,168 | 1,087 | 448,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 70.630,9 | 41,478 | 42,597 | 1,183 | 1,324 | -,000 |
| 29,5 | 98.554,9 | 1,255 | 1,216 | 1,349 | 1,256 | 542,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 67.701,3 | 41,238 | 42,340 | 1,293 | 1,441 | -,000 |
| 30,5 | 98.298,2 | 1,342 | 1,300 | 1,557 | 1,450 | 650,3 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 64.909,4 | 40,997 | 42,085 | 1,413 | 1,568 | -,000 |
| 31,5 | 98.013,2 | 1,435 | 1,391 | 1,798 | 1,674 | 773,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 62.248,3 | 40,756 | 41,832 | 1,544 | 1,707 | -,000 |
| 32,5 | 97.696,3 | 1,535 | 1,487 | 2,076 | 1,934 | 914,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 59.711,3 | 40,515 | 41,578 | 1,688 | 1,859 | -,000 |
| 33,5 | 97.343,6 | 1,641 | 1,590 | 2,397 | 2,233 | 1.076,3 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 57.292,1 | 40,271 | 41,322 | 1,845 | 2,025 | -,000 |
| 34,5 | 96.950,6 | 1,754 | 1,700 | 2,767 | 2,578 | 1.261,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 54.984,9 | 40,025 | 41,066 | 2,016 | 2,206 | -,000 |
| 35,5 | 96.512,3 | 1,874 | 1,818 | 3,194 | 2,977 | 1.473,9 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 52.784,1 | 39,778 | 40,807 | 2,204 | 2,404 | -,000 |
| 36,5 | 96.023,2 | 2,003 | 1,943 | 3,687 | 3,438 | 1.717,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 50.684,5 | 39,528 | 40,547 | 2,409 | 2,622 | -,000 |
| 37,5 | 95.476,8 | 2,140 | 2,077 | 4,257 | 3,970 | 1.996,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 48.681,1 | 39,276 | 40,284 | 2,633 | 2,860 | -,000 |
| 38,5 | 94.866,0 | 2,286 | 2,220 | 4,913 | 4,585 | 2.316,6 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 46.769,1 | 39,022 | 40,020 | 2,878 | 3,121 | -,000 |
| 39,5 | 94.183,0 | 2,442 | 2,373 | 5,671 | 5,294 | 2.683,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 44.944,1 | 38,767 | 39,753 | 3,145 | 3,408 | -,000 |
| 40,5 | 93.418,9 | 2,609 | 2,536 | 6,545 | 6,114 | 3.103,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 43.201,7 | 38,511 | 39,486 | 3,438 | 3,724 | -,000 |
| 41,5 | 92.563,7 | 2,786 | 2,710 | 7,554 | 7,060 | 3.583,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 41.538,0 | 38,256 | 39,219 | 3,757 | 4,070 | -,000 |
| 42,5 | 91.606,6 | 2,975 | 2,896 | 8,717 | 8,153 | 4.132,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 39.948,9 | 38,003 | 38,953 | 4,107 | 4,452 | -,000 |
| 43,5 | 90.535,6 | 3,177 | 3,094 | 10,058 | 9,415 | 4.758,3 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 38.430,7 | 37,752 | 38,689 | 4,489 | 4,872 | -,000 |
| 44,5 | 89.337,3 | 3,392 | 3,307 | 11,605 | 10,872 | 5.472,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 36.979,9 | 37,505 | 38,428 | 4,906 | 5,334 | -,000 |
| 45,5 | 87.997,6 | 3,622 | 3,534 | 13,387 | 12,554 | 6.284,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 35.593,0 | 37,264 | 38,172 | 5,362 | 5,843 | -,000 |
| 46,5 | 86.500,8 | 3,867 | 3,777 | 15,441 | 14,497 | 7.206,1 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 34.266,6 | 37,031 | 37,923 | 5,861 | 6,403 | -,000 |
| 47,5 | 84.830,7 | 4,129 | 4,038 | 17,807 | 16,741 | 8.250,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 32.997,7 | 36,808 | 37,683 | 6,406 | 7,020 | -,000 |
| 48,5 | 82.969,8 | 4,410 | 4,318 | 20,531 | 19,332 | 9.429,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 31.783,1 | 36,598 | 37,454 | 7,001 | 7,700 | -,000 |
| 49,5 | 80.900,4 | 4,711 | 4,620 | 23,667 | 22,324 | 10.756,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 30.619,9 | 36,403 | 37,239 | 7,652 | 8,448 | -,000 |
| 50,5 | 78.604,6 | 5,033 | 4,944 | 27,275 | 25,779 | 12.244,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 29.505,3 | 36,226 | 37,041 | 8,364 | 9,270 | -,000 |
| 51,5 | 76.065,1 | 5,378 | 5,294 | 31,423 | 29,769 | 13.906,3 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 28.436,4 | 36,071 | 36,864 | 9,141 | 10,173 | -,000 |
| 52,5 | 73.265,8 | 5,750 | 5,672 | 36,191 | 34,376 | 15.751,8 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 27.410,7 | 35,942 | 36,711 | 9,991 | 11,164 | -,000 |
| 53,5 | 70.193,0 | 6,149 | 6,081 | 41,664 | 39,697 | 17.789,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 26.425,5 | 35,842 | 36,585 | 10,920 | 12,249 | -,000 |
| 54,5 | 66.836,8 | 6,580 | 6,526 | 47,944 | 45,840 | 20.024,0 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 25.478,4 | 35,777 | 36,492 | 11,936 | 13,434 | -,000 |
| 55,5 | 63.192,6 | 7,045 | 7,011 | 55,142 | 52,935 | 22.454,7 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 24.566,8 | 35,750 | 36,436 | 13,046 | 14,725 | -,000 |
| 56,5 | 59.262,8 | 7,548 | 7,540 | 63,382 | 61,128 | 25.074,2 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 23.688,6 | 35,767 | 36,422 | 14,259 | 16,127 | -,000 |
| 57,5 | 55.059,3 | 8,093 | 8,120 | 72,802 | 70,588 | 27.866,4 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 22.841,3 | 35,834 | 36,456 | 15,584 | 17,642 | -,000 |
| 58,5 | 50.605,3 | 8,683 | 8,757 | 83,557 | 81,513 | 30.804,5 | 0,000 | 0,000 | 0,0 | 22.022,8 | 35,957 | 36,543 | 17,033 | 19,271 | -,000 |

Die folgende Zusammenstellung gibt eine Übersicht über das Resultat:
Eine Erhöhung der Invalidisierungsintensität um α % führt (unter den angeführten beiden Voraussetzungen) zu einer Verringerung der Sterblichkeit der Aktiven und der Invaliden

| Alter | Verringerung von | | |
|---------------------|---------------------|--------|--------|
| | μ^a und μ^i | q^a | q^i |
| bei $\alpha = 20$ % | | | |
| 35,5 | 3,3 % | 3,4 % | 3,3 % |
| 45,5 | 5,6 % | 5,8 % | 5,6 % |
| 55,5 | 7,4 % | 7,8 % | 7,3 % |
| bei $\alpha = 40$ % | | | |
| 35,5 | 6,4 % | 6,6 % | 6,5 % |
| 45,5 | 10,6 % | 11,0 % | 10,7 % |
| 55,5 | 13,7 % | 14,8 % | 13,5 % |
| bei $\alpha = 60$ % | | | |
| 35,5 | 9,3 % | 9,7 % | 9,5 % |
| 45,5 | 15,2 % | 15,7 % | 15,2 % |
| 55,5 | 19,0 % | 19,8 % | 18,7 % |

Die Verringerung der Invalidisierungsintensität wirkt sich, bedingt durch die rekursive Berechnung der Ausscheideordnung, mit zunehmendem Alter immer mehr auf die Sterblichkeit der Aktiven und jene der Invaliden aus.

Vereinfacht dargestellt ergibt sich folgendes Resultat:

Die prozentuale Änderung der Sterblichkeit der Aktiven und der Sterblichkeit der Invaliden beträgt bei Alter 56 rund ein Drittel und bei Alter 46 rund ein Viertel der prozentuellen Änderung der Invalidisierung.

Dr. Franz G. Liebmann
Kalmanstrasse 63
A-1130 Wien

Literatur

- [1] *Herbert Amann*: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Walter de Gruyter, Berlin/New York 1983.
- [2] *P. E. Böhmer*: Die Grundlagen der Theorie der Invaliditätsversicherung. Jahrbuch für Versicherungsmathematik. Verlag Deutsche Versicherungs-Presse, Berlin 1914; wiederveröffentlicht in: Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, April 1967, Band VIII, Heft 2.
- [3] *Earl A. Coddington/Norman Levinson*: Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, New York/Toronto/London 1955.
- [4] *Wolfgang Hahn*: Stability of Motion. Springer Verlag, "Gelbe Reihe", Band 138, Berlin/Heidelberg/New York 1967.
- [5] *Klaus Heubeck*: Neue Rechnungsgrundlagen für die betriebliche Altersversorgung "Richttafeln 1982". Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XV, 1982.
- [6] *Franz G. Liebmann*: Demographische Entwicklung der Versichertenstände bis 1990. Schriftenreihe des Forschungsinstitutes für Soziale Sicherheit beim Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger, 1974.
- [7] *Franz G. Liebmann*: Analytische Modelle in der Personenversicherung. Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, Heft 1, Dez. 1983.
- [8] *Nikolaus E. Müller*: Einführung in die Mathematik der Pensionsversicherung. Verfasser-Verlag, D-8011 Baldham 1973.
- [9] *Georg Reichel*: Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. Heft 5 der Schriftenreihe "Angewandte Versicherungsmathematik der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik", Teil 2: Vom Versicherungsspiel zum Äquivalenzbeitrag, 1976.
- [10] *Georg Reichel*: Gibt es "unabhängige" Verbleibswahrscheinlichkeiten in der Personenversicherungsmathematik? Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XVI, Heft 2, Oktober 1983.
- [11] *W. Saxer*: Versicherungsmathematik, Erster Teil. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
- [12] *Stoer/Burlisch*: Einführung in die Numerische Mathematik II. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1973.
- [13] *S. H. Preston/N. Keyfitz/R. Schoen*: Causes of Death. Life Tables for National Populations. Seminar Press, New York/London 1972.
- [14] *Karl-H. Wolff*: Versicherungsmathematik. Springer-Verlag, Wien/New York 1970.
- [15] *Karl-H. Wolff*: Zur Frage der zeitlichen Veränderung der Sterbehäufigkeiten. Mitteilungsblatt der österreichischen Gesellschaft für Statistik und Informatik, 3. Jhg., Juli 1973.
- [16] *Karl-H. Wolff/Josef Juch/Karl Grillitsch*: Entwicklungstendenzen im Bereich der Pensionsversicherung 1956–2000. Schriftenreihe des Forschungsinstitutes für Soziale Sicherheit beim Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger, Heft 8, 1980.

Zusammenfassung

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten in einer Personengesamtheit mit mehreren Ausscheideursachen wird ein kontinuierliches Modell der Ausscheideordnung aufgestellt, d. h. die Ausscheideordnung wird mit Hilfe von Intensitäten durch ein Differentialgleichungssystem approximiert.

Die Untersuchung erfolgt an einer Ausscheideordnung, die auf Übergangswahrscheinlichkeiten aufbaut, welche vom Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger Mitte der siebziger Jahre ermittelt wurden.

Die Anwendung des kontinuierlichen Modells liefert Einblick in die Unterschiede zwischen den abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten und den partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten. Darüber hinaus ermöglicht das kontinuierliche Modell quantitative Aussagen über die Auswirkungen der Veränderung einer Übergangswahrscheinlichkeit auf die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten.

Unter den Voraussetzungen, dass die Sterbeintensität des Gesamtbestandes unverändert bleibt und sich die Sterbeintensitäten der Aktiven und der Invaliden im gleichen Verhältnis ändern, ergibt sich für die Alter vor dem Übergang in die Alterspension folgendes Resultat:

Die prozentuale Änderung der Sterblichkeit der Aktiven und der Invaliden beträgt rund ein Drittel der prozentuellen Änderung der Invalidisierung.

Résumé

Afin d'analyser la dépendance entre les probabilités de transition dans un groupe de personnes où plusieurs causes de sortie sont présentes, un modèle continu de tables à décrets multiples est établi: plus précisément les tables à décrets multiples sont approximées par un système d'équations différentielles à l'aide de fonctions d'intensité.

L'investigation est basée sur une table construite à partir des probabilités de transition calculées dans les années septante par le «Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger».

L'application du modèle continu permet d'apprécier les différences entre les probabilités de transition dépendantes et partielles. De plus, le modèle continu permet de faire des prédictions sur l'influence de changements effectués sur l'une des probabilités de transition aux autres.

Pour autant que l'intensité globale de la mortalité du groupe de personnes demeure constante et que les intensités de mortalité des actifs et des invalides changent dans le même rapport, pour les âges précédant l'âge normal de la retraite on observe le résultat suivant: la variation relative de la mortalité des actifs et des invalides équivaut à peu près au tiers de la variation du taux d'invalidité.

Summary

To analyze the dependency of transition probabilities in an collective of persons with several causes of lapse a continuous model of decrement tables is made up i.e. the multiple decrement tables are approximated by a system of differential equations by means of intensities.

The investigation is based on a decrement table made up from transition probabilities which were calculated in the seventies by the "Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger".

The application of the continuous model gives insight into the differences between dependent and partial transition probabilities. Moreover, the continuous model allows one to make statements on the influence of changes of one transition probability upon the others.

Provided that the overall mortality intensity of the collective remains constant and provided that both the mortality intensities of the active and the disabled lives change at the same rate, for the ages prior the normal retirement the following result is obtained: The relative change of the mortality of the active and the disabled lives equals about one third of the relative change of the rate of disablement.

