BRUNO KOLLER, Basel

Die Makrovkette als Modell der Personenversicherung am Beispiel einer Pflegeversicherung

1 Einleitung

Markovketten als Modelle der Personenversicherung wurden insbesondere von *M-H. Amsler* vorgeschlagen (siehe z. B. die Berichte zum 21. und 23. Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker 1980 und 1988). Wir wollen am Beispiel einer Pflegeversicherung zeigen, dass ein derartiges Modell nicht nur in der Theorie Vorteile hat, sondern sich auch für die Berechnung von Barwerten eignet.

2 Theorie

Die Markovkette beschreibt die zeitliche Entwicklung einer Personenversicherung (zur Theorie der Markovketten siehe z. B. *W. Feller;* An introduction to probability theory and its applications, vol. I). Die versicherte Person befindet sich zu jedem Zeitpunkt t in einem von mehreren *Zuständen:* aktiv, tot, invalid, krank, verwitwet usw. Die *Übergangswahrscheinlichkeit* vom Zustand z_k zum Zeitpunkt t in den Zustand z_j zum Zeitpunkt $t+1$ hängt nur von den beiden Zuständen, nicht aber von früheren Zuständen ab (Markov - Eigenschaft). Je nach Zustand steht dem Versicherten eine Versicherungsleistung L_k (evt. null) zu.

Es sei:

x	zeitlicher Bezugspunkt der Barwertberechnung
$z_k(x+t)$	Zustand k zur Zeit $x+t$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$
$z_0(x)$	Zustand des Versicherten zur Zeit x
$L(x+t)$	mögliche Versicherungsleistungen zur Zeit $x+t$
$L_k(x+t)$	Versicherungsleistung für den Zustand z_k zur Zeit $x+t$, bezogen auf den Zeitpunkt x
$P(z_k(T+t)\|z_j(T))$	Wahrscheinlichkeit, dass sich der Versicherte zur Zeit $T+t$ im Zustand z_k befindet, unter der Bedingung, dass er sich zur Zeit T im Zustand z_j befindet

Ein *Leistungsbarwert* BW kann dann als Summe bedingter Erwartungswerte aufgefasst werden:

$$BW(x) = \sum_{t=0}^{\infty} EW(L(x+t) \mid z_0(x)),$$

mit

$$EW(L(x+t) \mid z_0(x)) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x+t) \cdot P(z_k(x+t) \mid z_0(x)).$$

Die möglichen Zustände der versicherten Personen zu einem gewissen Zeitpunkt bilden ein *vollständiges Ereignissystem* und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten eine *Verteilung:*

$$\sum_{k=0}^{n} P(z_k(T+t) \mid z_j(T)) = 1.$$

Die auf den Zeitpunkt x bezogene (diskontierten) Versicherungsleistungen bilden eine *Folge von Zufallsvariablen.*
In der Personenversicherung wird üblicherweise angenommen, dass die Markov - Eigenschaft erfüllt ist. Somit können die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(z_k(x+t) \mid z_0(x))$ rekursiv aus den einstufigen Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet werden:

$$P(z_k(x+t) \mid z_0(x)) = \sum_{j=0}^{n} P(z_k(x+t) \mid z_j(x+t-1)) \cdot P(z_j(x+t-1) \mid z_0(x)).$$

Dabei ist $P(z_k(x) \mid z_0(x))$ für $k = 0$ gleich eins, sonst gleich null.
Das Modell erlaubt natürlich nicht nur die Berechnung von Leistungs - Barwerten, sondern auch von Prämien - Barwerten und von Endwerten. Der Ansatz eignet sich auch zur Beschreibung unterjähriger Zahlungen.

3 Die Pflegeversicherung

Die Pflegeversicherung orientiere sich an den Musterbedingungen der deutschen Lebens- und Krankenversicherungsverbände für die Pflegerenten- bzw. Pflegekrankenversicherung (siehe Punkt 8).

Massgebend für die Einstufung des Pflegefalles sind Art und Umfang der täglichen persönlichen Hilfe bei folgenden sechs Tätigkeiten:

- Aufstehen und Zubettgehen,
- An- und Auskleiden,
- Waschen, Kämmen und Rasieren,
- Einnehmen von Mahlzeiten und Getränken,
- Stuhlgang,
- Wasserlassen.

Die Pflegebedürftigkeit wird nach dessen Schwere klassifiziert. Pflegebedürftigkeit der Stufe 1, 2, 3 oder 4 liegt vor, wenn der Versicherte 3, 4, 5 bzw. 6 der aufgeführten Verrichtungen nicht mehr allein erledigen kann.

4 Die Markovkette

Das Modell habe sechs mögliche Zustände l, $b1$, $b2$, $b3$, $b4$ und d. Es bedeuten:

l: keine Pflegebedürftigkeit
$b1$: Pflegebedürftigkeit der Pflegestufe 1
$b2$: Pflegebedürftigkeit der Pflegestufe 2
$b3$: Pflegebedürftigkeit der Pflegestufe 3
$b4$: Pflegebedürftigkeit der Pflegestufe 4
d: tot

Zum Zeitpunkt des Eintritts in die Versicherung befindet sich der Versicherte im Zustand l. Vom Zustand l kann er in die Zustände $b1$, $b2$, $b3$ $b4$ und d wechseln.
Das Intervall zwischen zwei Zuständen betrage 1 Jahr. Vorgegeben werden die einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten.

5 Die Rechnungsannahmen

Bezüglich der einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten werden folgende Annahmen getroffen:

I. *Ein Pflegebedürftiger kann nicht gesunden.*
Diese vorsichtige Annahme ist vertretbar, wenn die Leistungspflicht erst nach einer ausreichenden Wartefrist beginnt.

II. *Ein Pflegebedürftiger wechselt die Pflegestufe nicht.*
Die Annahme ist unrealistisch, vereinfacht aber die Wahl der Rechnungsgrundlagen. Zumindest an die Möglichkeit, in *höhere* Pflegestufen zu wechseln, sollte in einem verfeinerten Modell gedacht werden.
(Die stochastische Matrix der einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung der bisherigen Annahmen ist aus Tab. 1 im Anhang ersichtlich; die Summe der Zeilen ist 1.)

III. *Die Sterbewahrscheinlichkeiten der Versicherten basieren auf den q_x nach ERM 80:*

$$
\begin{aligned}
P(d(t+1) \mid l(t)) &= q_t \\
P(d(t+1) \mid b1(t)) &= q_t + 0.035 \\
P(d(t+1) \mid b2(t)) &= q_t + 0.045 \\
P(d(t+1) \mid b3(t)) &= q_t + 0.055 \\
P(d(t+1) \mid b4(t)) &= q_t + 0.065.
\end{aligned}
$$

Die additive Übersterblichkeit wurde in Anlehnung an die deutsche Pflegerentenversicherung gewählt. Dort wird zur Ableitung der Pflegefallwahrscheinlichkeiten einheitlich ohne nach Pflegestufe zu unterscheiden, mit 5 % additiver Übersterblichkeit gerechnet (siehe *A. Holl / P. Kakies / H. Richter)*.
Aus den Sterblichkeitsannahmen für die Pflegebedürftigen ergeben sich zwangsläufig die Überlebenswahrscheinlichkeiten der Pflegebedürftigen:

$$
\begin{aligned}
P(b1(t+1) \mid b1(t)) &= 1 - P(d(t+1) \mid b1(t)) \\
P(b2(t+1) \mid b2(t)) &= 1 - P(d(t+1) \mid b2(t)) \\
P(b3(t+1) \mid b3(t)) &= 1 - P(d(t+1) \mid b3(t)) \\
P(b4(t+1) \mid b4(t)) &= 1 - P(d(t+1) \mid b4(t)).
\end{aligned}
$$

IV. *Die einjährigen Pflegefallwahrscheinlichkeiten sind:*

$$
\begin{aligned}
P(b1(t+1) \mid l(t)) &= 0.45 \cdot 0.00005 \cdot e^{0.075\,t} \\
P(b2(t+1) \mid l(t)) &= 0.20 \cdot 0.00005 \cdot e^{0.075\,t} \\
P(b3(t+1) \mid l(t)) &= 0.20 \cdot 0.00005 \cdot e^{0.075\,t} \\
P(b4(t+1) \mid l(t)) &= 0.15 \cdot 0.00005 \cdot e^{0.075\,t}.
\end{aligned}
$$

Die vorsichtig gewählten altersunabhängigen Faktoren 0.45, 0.20, 0.20, 0.15 zur Verteilung der gesamten Pflegefallwahrscheinlichkeit auf die vier

Pflegestufen basieren auf den (altersabhängigen) Werten der deutschen Pflegetagegeldversicherung.
Die gesamte Wahrscheinlichkeit $P(b(t+1)\,|\,l(t))$ im Alter t pflegebedürftig zu werden, d.h. die Wahrscheinlichkeit vom Zustand l in einen der Zustände $b1$, $b2$, $b3$ oder $b4$ zu wechseln, ist gleich der Summe der obigen Übergangswahrscheinlichkeiten: $0.00005 \cdot e^{0.075\,t}$.
Die Gestalt der Funktion in Abhänigkeit des Alters wurde aus den Pflegefallwahrscheinlichkeiten der deutschen Pflegerentenversicherung abgeleitet. Wie aus Graphik 1 im Anhang ersichtlich, nehmen die Wahrscheinlichkeiten in Funktion des Alters angenähert exponentiell zu.
Die Parameter der Exponentialfunktion, 0.00005 und 0.075, wurden aus schweizerischen Statistiken über den Anteil der pflegebedürftigen Personen an der Gesamtbevölkerung und aus den entsprechenden Zahlen der deutschen Pflegerentenversicherung abgeleitet (siehe Literaturverzeichnis). Eine Gegenüberstellung der Modellannahmen mit den statistischen Werten ist der Graphik 2 zu entnehmen.
Man beachte den Unterschied zwischen der Wahrscheinlichkeit pflegebedürftig zu *werden* aus Graphik 1, $P(b(t+1)\,|\,l(t))$, und der Wahrscheinlichkeit im Alter t pflegebedürftig zu *sein* aus Graphik 2:

$$\frac{P(b(t)\,|\,l(0))}{P(l(t)\,|\,l(0)) + P(b(t)\,|\,l(0))}.$$

Aus den getroffenen Annahmen folgt zwangsläufig die Verbleibswahrscheinlichkeit für "gesund" Versicherte:

$$\begin{aligned} P(l(t+1)\,|\,l(t)) = 1 &- P(b1(t+1)\,|\,l(x)) \\ &- P(b2(t+1)\,|\,l(x)) \\ &- P(b3(t+1)\,|\,l(x)) \\ &- P(b4(t+1)\,|\,l(x)) \\ &- P(d(t+1)\,|\,l(x)). \end{aligned}$$

Die einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten sind der Tabelle 2 zu entnehmen.

6 Die Barwerte

Die Barwerte $BW(x)$ der Pflegeversicherung berechnen sich nach:

$$BW(x) = \sum_{t=1}^{100-x} EW(L(x+t)\,|\,l(x))$$

mit

$$
\begin{aligned}
EW(L(x+t)\mid l(x)) = {} & v^t \cdot 0.2 \cdot P(b1(x+t)\mid l(x)) \\
& +v^t \cdot 0.4 \cdot P(b2(x+t)\mid l(x)) \\
& +v^t \cdot 0.7 \cdot P(b3(x+t)\mid l(x)) \\
& +v^t \cdot 1.0 \cdot P(b4(x+t)\mid l(x)).
\end{aligned}
$$

Die Formel entspricht einer jährlichen Versicherungsleistung von 0.2, 0.4, 0.7 und 1.0 Franken bei Pflegestufe 1, 2, 3 bzw. 4; v ist der Diskontierungsfaktor zum Zinsfuss 3 %.

Die Berechnungsformeln lassen sich leicht auf einem Computer programmieren. Die mehrjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten oder Zustandswahrscheinlichkeiten $P(\cdot(x+t)\mid l(x))$ können rekursiv aus den einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten ermittelt werden. Die Graphiken 3 und 4 zeigen die zeitliche Entwicklung der Zustandswahrscheinlichkeiten und der Erwartungswerte. Barwerte für ausgewählte Alter sind der Tabelle 3 zu entnehmen.

7 Schlussbemerkungen

Ein Leistungsbarwert kann anstatt nach der hier beschriebenen Methode auch als Erwartungswert der "Gesamtschadenverteilung"eines Personenrisikos bestimmt werden. Allerdings gestaltet sich die Berechnung umständlicher als beim Markovketten - Ansatz: die Wahrscheinlichkeit jeder möglichen Realisierung des stochastischen Prozesses und die entsprechenden Gesamtleistungen müssen berechnet werden. Selbstverständlich gelangt man in beiden Fällen zu identischen Resultaten. Dies gilt auch für die Prämienberechnung, falls die Prämie – wie in der Personenversicherung üblich – nach dem Erwartungswertprinzip (Erwartungswert plus proportionaler Zuschlag; siehe z. B. *H. U. Gerber:* An introduction to mathematical risk theory) gerechnet wird. Im allgemeinen ergibt jedoch ein Prämienberechnungsprinzip, angewandt auf die Gesamtverteilung, ein anderes Resultat als eine wiederholte Anwendung des Prinzips auf die einzelnen, zeitlich gestaffelten Verteilungen des Markovketten - Modells. Theoretisch korrekt ist die Prämienberechnung auf der Gesamtverteilung.

Die Beschreibung einer Personenversicherung mit Hilfe von Markovketten besitzt theoretische, didaktische und praktische Vorteile:

– Das Modell trennt konsequent Ereignis (Zustand), Zufallsvariable (Leistung) und Wahrscheinlichkeit. Beim traditionellen Ansatz mit Kommutationszahlen wird aus rechnerischen Gründen die Eintretenswahrscheinlichkeit mit der Leistung (diskontierte Versicherungssumme 1) verknüpft; der stochastische Charakter der Barwerte kommt nicht zum Ausdruck.

- Alle Zustände sind "gleichberechtigt"; den Sterbe- bzw. Erlebensfallwahrscheinlichkeiten kommt keine Sonderstellung zu. Beliebig viele Zustände können modellmässig erfasst werden.
- Das Rechnen mit Kollektiven ist einfach: die versicherte Gesamtheit bleibt konstant, die Mitglieder wechseln lediglich den Zustand. Aus der Zustandsverteilung des Kollektivs zu einem gewissen Zeitpunkt kann ohne grossen Aufwand jede zukünftige Verteilung berechnet werden.
- Das Modell ist anschaulich.
- Das Modell kann leicht in ein Programm zur Berechnung von Barwerten umgesetzt werden.

Dr. B. Koller
Basler Lebensversicherungs - Gesellschaft
Aeschengraben 21
4002 Basel

Literaturverzeichnis

Deutscher Verband der Lebensversicherungs - Unternehmen: Mustergeschäftsplan für die Pflegerentenversicherung. Verbandsrundschreiben 22 vom 15. 5. 1985.

Deutscher Verband der privaten Krankenversicherung: Musterbedingungen für die Pflegekrankenversicherung. Fassung vom 11. 12. 1984.

Holle, A. / Kakies, P. / Richter, H.: Die Ableitung der Pflegefallwahrscheinlichkeiten für den Mustergeschäftsplan der Pflegerentenversicherung. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. XVII 1985/86, Tab. 1: Auswertung der Pflegefallhäufigkeiten der NCHS - Studie 1979/80, endgültige Pflegehäufigkeiten, Männer.

Abelin, T. / Schlettwein - Gsell, D. / Minder, C. / Marti-Nagy, Z. / Skaleric, K.: Die Sozialmedizinische Lage der Betagten in der Schweiz. Institut für Sozial- und Präventivmedizin der Universität Bern, Bd. I, Tab. 5: Bedarf an täglicher Pflegehilfe, Männer.

Gilliand, P.: Rentiers AVS, une autre image de la Suisse. Editions "Réalités sociales" 1983, Tab. 8.2: Degré de dépendance selon l'âge, "tout à fait dépendants" und "partiellement dépendants", Männer und Frauen.

Bundesamt für Statistik 1981: Sozialindikatoren für die Schweiz. Bd. 1, Gesundheit, Indikator VII: Prozentsatz der Schweizer Männer von 60 und mehr Jahren, die an einer schweren chronischen Beeinträchtigung ihrer körperlichen Leistungsfähigkeit leidet, 1978.

Tabelle 1: Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{pmatrix}
P(l(t+1) \mid l(t)) & P(b1(t+1) \mid l(t)) & P(b2(t+1) \mid l(t)) & P(b3(t+1) \mid l(t)) & P(b4(t+1) \mid l(t)) & P(d(t+1) \mid l(t)) \\
0 & P(b1(t+1) \mid b1(t)) & 0 & 0 & 0 & P(d(t+1) \mid b1(t)) \\
0 & 0 & P(b2(t+1) \mid b2(t)) & 0 & 0 & P(d(t+1) \mid b2(t)) \\
0 & 0 & 0 & P(b3(t+1) \mid b3(t)) & 0 & P(d(t+1) \mid b3(t)) \\
0 & 0 & 0 & 0 & P(b4(t+1) \mid b4(t)) & P(d(t+1) \mid b4(t)) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Tabelle 2: Einjährige Übergangswahrscheinlichkeiten

x	$P(l(x+1) \mid l(x))$	$P(b1(x+1) \mid l(x))$	$P(b2(x+1) \mid l(x))$	$P(b3(x+1) \mid l(x))$	$P(b4(x+1) \mid l(x))$	$P(d(x+1) \mid l(x))$	$P(b1(x+1) \mid b1(x))$
0	0.999425	0.000023	0.000010	0.000010	0.000008	0.000525	0.964475
1	0.999421	0.000024	0.000011	0.000011	0.000008	0.000525	0.964475
2	0.999417	0.000026	0.000012	0.000012	0.000009	0.000525	0.964475
3	0.999412	0.000028	0.000013	0.000013	0.000009	0.000525	0.964475
4	0.999408	0.000030	0.000013	0.000013	0.000010	0.000525	0.964475
5	0.999402	0.000033	0.000015	0.000015	0.000011	0.000525	0.964475
6	0.999397	0.000035	0.000016	0.000016	0.000012	0.000525	0.964475
7	0.999390	0.000038	0.000017	0.000017	0.000013	0.000525	0.964475
8	0.999384	0.000041	0.000018	0.000018	0.000014	0.000525	0.964475
9	0.999377	0.000044	0.000020	0.000020	0.000015	0.000525	0.964475
10	0.999369	0.000048	0.000021	0.000021	0.000016	0.000525	0.964475
11	0.999361	0.000051	0.000023	0.000023	0.000017	0.000525	0.964475
12	0.999352	0.000055	0.000025	0.000025	0.000018	0.000525	0.964475
13	0.999342	0.000060	0.000027	0.000027	0.000020	0.000525	0.964475
14	0.999332	0.000064	0.000029	0.000029	0.000021	0.000525	0.964475
15	0.999321	0.000069	0.000031	0.000031	0.000023	0.000525	0.964475
16	0.999309	0.000075	0.000033	0.000033	0.000025	0.000525	0.964475
17	0.999296	0.000081	0.000036	0.000036	0.000027	0.000525	0.964475
18	0.999282	0.000087	0.000039	0.000039	0.000029	0.000525	0.964475
19	0.999267	0.000094	0.000042	0.000042	0.000031	0.000525	0.964475
20	0.999251	0.000101	0.000045	0.000045	0.000034	0.000525	0.964475
21	0.999227	0.000109	0.000048	0.000048	0.000036	0.000531	0.964469
22	0.999199	0.000117	0.000052	0.000052	0.000039	0.000541	0.964459
23	0.999166	0.000126	0.000056	0.000056	0.000042	0.000553	0.964447
24	0.999129	0.000136	0.000060	0.000060	0.000045	0.000569	0.964431
25	0.999086	0.000147	0.000065	0.000065	0.000049	0.000588	0.964412
26	0.999039	0.000158	0.000070	0.000070	0.000053	0.000610	0.964390
27	0.998985	0.000170	0.000076	0.000076	0.000057	0.000636	0.964364
28	0.998927	0.000184	0.000082	0.000082	0.000061	0.000665	0.964335
29	0.998862	0.000198	0.000088	0.000088	0.000066	0.000698	0.964302
30	0.998793	0.000213	0.000095	0.000095	0.000071	0.000733	0.964267
31	0.998717	0.000230	0.000102	0.000102	0.000077	0.000772	0.964228
32	0.998634	0.000248	0.000110	0.000110	0.000083	0.000815	0.964185
33	0.998546	0.000267	0.000119	0.000119	0.000089	0.000860	0.964140
34	0.998451	0.000288	0.000128	0.000128	0.000096	0.000909	0.964091
35	0.998348	0.000311	0.000138	0.000138	0.000104	0.000962	0.964038
36	0.998239	0.000335	0.000149	0.000149	0.000112	0.001017	0.963983
37	0.998122	0.000361	0.000160	0.000160	0.000120	0.001076	0.963924
38	0.997998	0.000389	0.000173	0.000173	0.000130	0.001138	0.963862
39	0.997864	0.000419	0.000186	0.000186	0.000140	0.001204	0.963796
40	0.997723	0.000452	0.000201	0.000201	0.000151	0.001273	0.963727
41	0.997570	0.000487	0.000216	0.000216	0.000162	0.001348	0.963652
42	0.997397	0.000525	0.000233	0.000233	0.000175	0.001436	0.963564
43	0.997203	0.000566	0.000252	0.000252	0.000189	0.001539	0.963461
44	0.996983	0.000610	0.000271	0.000271	0.000203	0.001661	0.963339
45	0.996736	0.000658	0.000292	0.000292	0.000219	0.001803	0.963197
46	0.996455	0.000709	0.000315	0.000315	0.000236	0.001970	0.963030
47	0.996138	0.000764	0.000340	0.000340	0.000255	0.002164	0.962836
48	0.995782	0.000823	0.000366	0.000366	0.000274	0.002388	0.962612
49	0.995383	0.000888	0.000394	0.000394	0.000296	0.002645	0.962355
50	0.994936	0.000957	0.000425	0.000425	0.000319	0.002938	0.962062

Tabelle 2: Einjährige Übergangswahrscheinlichkeiten Fortsetzung

x	$P(l(x+1)\mid l(x))$	$P(b1(x+1)\mid l(x))$	$P(b2(x+1)\mid l(x))$	$P(b3(x+1)\mid l(x))$	$P(b4(x+1)\mid l(x))$	$P(d(x+1)\mid l(x))$	$P(b1(x+1)\mid b1(x))$
51	0.994439	0.001031	0.000458	0.000458	0.000344	0.003269	0.961731
52	0.993887	0.001112	0.000494	0.000494	0.000371	0.003643	0.961357
53	0.993276	0.001198	0.000533	0.000533	0.000399	0.004061	0.960939
54	0.992603	0.001291	0.000574	0.000574	0.000430	0.004527	0.960473
55	0.991863	0.001392	0.000619	0.000619	0.000464	0.005044	0.959956
56	0.991052	0.001500	0.000667	0.000667	0.000500	0.005614	0.959386
57	0.990165	0.001617	0.000719	0.000719	0.000539	0.006241	0.958759
58	0.989199	0.001743	0.000775	0.000775	0.000581	0.006927	0.958073
59	0.988145	0.001879	0.000835	0.000835	0.000626	0.007679	0.957321
60	0.986993	0.002025	0.000900	0.000900	0.000675	0.008506	0.956494
61	0.985734	0.002183	0.000970	0.000970	0.000728	0.009415	0.955585
62	0.984357	0.002353	0.001046	0.001046	0.000784	0.010414	0.954586
63	0.982851	0.002536	0.001127	0.001127	0.000845	0.011512	0.953488
64	0.981205	0.002734	0.001215	0.001215	0.000911	0.012719	0.952281
65	0.979405	0.002947	0.001310	0.001310	0.000982	0.014046	0.950954
66	0.977437	0.003176	0.001412	0.001412	0.001059	0.015504	0.949496
67	0.975284	0.003424	0.001522	0.001522	0.001141	0.017107	0.947893
68	0.972931	0.003690	0.001640	0.001640	0.001230	0.018868	0.946132
69	0.970357	0.003978	0.001768	0.001768	0.001326	0.020803	0.944197
70	0.967542	0.004288	0.001906	0.001906	0.001429	0.022930	0.942070
71	0.964464	0.004622	0.002054	0.002054	0.001541	0.025266	0.939734
72	0.961096	0.004982	0.002214	0.002214	0.001661	0.027834	0.937166
73	0.957412	0.005370	0.002387	0.002387	0.001790	0.030655	0.934345
74	0.953384	0.005788	0.002572	0.002572	0.001929	0.033754	0.931246
75	0.948977	0.006239	0.002773	0.002773	0.002080	0.037159	0.927841
76	0.944158	0.006725	0.002989	0.002989	0.002242	0.040899	0.924101
77	0.938885	0.007248	0.003221	0.003221	0.002416	0.045008	0.919992
78	0.933118	0.007813	0.003472	0.003472	0.002604	0.049520	0.915480
79	0.926811	0.008421	0.003743	0.003743	0.002807	0.054475	0.910525
80	0.919913	0.009077	0.004034	0.004034	0.003026	0.059916	0.905084
81	0.912368	0.009784	0.004348	0.004348	0.003261	0.065890	0.899110
82	0.904116	0.010546	0.004687	0.004687	0.003515	0.072448	0.892552
83	0.895092	0.011368	0.005052	0.005052	0.003789	0.079647	0.885353
84	0.885224	0.012253	0.005446	0.005446	0.004084	0.087547	0.877453
85	0.874435	0.013207	0.005870	0.005870	0.004402	0.096216	0.868784
86	0.862639	0.014236	0.006327	0.006327	0.004745	0.105726	0.859274
87	0.849744	0.015345	0.006820	0.006820	0.005115	0.116157	0.848843
88	0.835649	0.016540	0.007351	0.007351	0.005513	0.127596	0.837404
89	0.820247	0.017828	0.007923	0.007923	0.005943	0.140136	0.824864
90	0.803417	0.019216	0.008541	0.008541	0.006405	0.153880	0.811120
91	0.785031	0.020713	0.009206	0.009206	0.006904	0.168940	0.796060
92	0.764951	0.022326	0.009923	0.009923	0.007442	0.185435	0.779565
93	0.743026	0.024065	0.010696	0.010696	0.008022	0.203496	0.761504
94	0.719094	0.025939	0.011529	0.011529	0.008646	0.223263	0.741737
95	0.692979	0.027960	0.012426	0.012426	0.009320	0.244889	0.720111
96	0.664491	0.030137	0.013394	0.013394	0.010046	0.268537	0.696463
97	0.633430	0.032484	0.014438	0.014438	0.010828	0.294382	0.670618
98	0.599576	0.035014	0.015562	0.015562	0.011671	0.322614	0.642386
99	0.562698	0.037741	0.016774	0.016774	0.012580	0.353432	0.611568
100	0.522546	0.040681	0.018080	0.018080	0.013560	0.387052	0.577948

Tabelle 2: Einjährige Übergangswahrscheinlichkeiten

x	$P(d(x+1) \mid b1(x))$	$P(b2(x+1) \mid b2(x))$	$P(d(x+1) \mid b2(x))$	$P(b3(x+1) \mid b3(x))$	$P(d(x+1) \mid b3(x))$	$P(b4(x+1) \mid b4(x))$	$P(d(x+1) \mid b4(x))$
0	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
1	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
2	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
3	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
4	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
5	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
6	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
7	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
8	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
9	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
10	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
11	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
12	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
13	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
14	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
15	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
16	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
17	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
18	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
19	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
20	0.035525	0.954475	0.045525	0.944475	0.055525	0.934475	0.065525
21	0.035531	0.954469	0.045531	0.944469	0.055531	0.934469	0.065531
22	0.035541	0.954459	0.045541	0.944459	0.055541	0.934459	0.065541
23	0.035553	0.954447	0.045553	0.944447	0.055553	0.934447	0.065553
24	0.035569	0.954431	0.045569	0.944431	0.055569	0.934431	0.065569
25	0.035588	0.954412	0.045588	0.944412	0.055588	0.934412	0.065588
26	0.035610	0.954390	0.045610	0.944390	0.055610	0.934390	0.065610
27	0.035636	0.954364	0.045636	0.944364	0.055636	0.934364	0.065636
28	0.035665	0.954335	0.045665	0.944335	0.055665	0.934335	0.065665
29	0.035698	0.954302	0.045698	0.944302	0.055698	0.934302	0.065698
30	0.035733	0.954267	0.045733	0.944267	0.055733	0.934267	0.065733
31	0.035772	0.954228	0.045772	0.944228	0.055772	0.934228	0.065772
32	0.035815	0.954185	0.045815	0.944185	0.055815	0.934185	0.065815
33	0.035860	0.954140	0.045860	0.944140	0.055860	0.934140	0.065860
34	0.035909	0.954091	0.045909	0.944091	0.055909	0.934091	0.065909
35	0.035962	0.954038	0.045962	0.944038	0.055962	0.934038	0.065962
36	0.036017	0.953983	0.046017	0.943983	0.056017	0.933983	0.066017
37	0.036076	0.953924	0.046076	0.943924	0.056076	0.933924	0.066076
38	0.036138	0.953862	0.046138	0.943862	0.056138	0.933862	0.066138
39	0.036204	0.953796	0.046204	0.943796	0.056204	0.933796	0.066204
40	0.036273	0.953727	0.046273	0.943727	0.056273	0.933727	0.066273
41	0.036348	0.953652	0.046348	0.943652	0.056348	0.933652	0.066348
42	0.036436	0.953564	0.046436	0.943564	0.056436	0.933564	0.066436
43	0.036539	0.953461	0.046539	0.943461	0.056539	0.933461	0.066539
44	0.036661	0.953339	0.046661	0.943339	0.056661	0.933339	0.066661
45	0.036803	0.953197	0.046803	0.943197	0.056803	0.933197	0.066803
46	0.036970	0.953030	0.046970	0.943030	0.056970	0.933030	0.066970
47	0.037164	0.952836	0.047164	0.942836	0.057164	0.932836	0.067164
48	0.037388	0.952612	0.047388	0.942612	0.057388	0.932612	0.067388
49	0.037645	0.952355	0.047645	0.942355	0.057645	0.932355	0.067645
50	0.037938	0.952062	0.047938	0.942062	0.057938	0.932062	0.067938

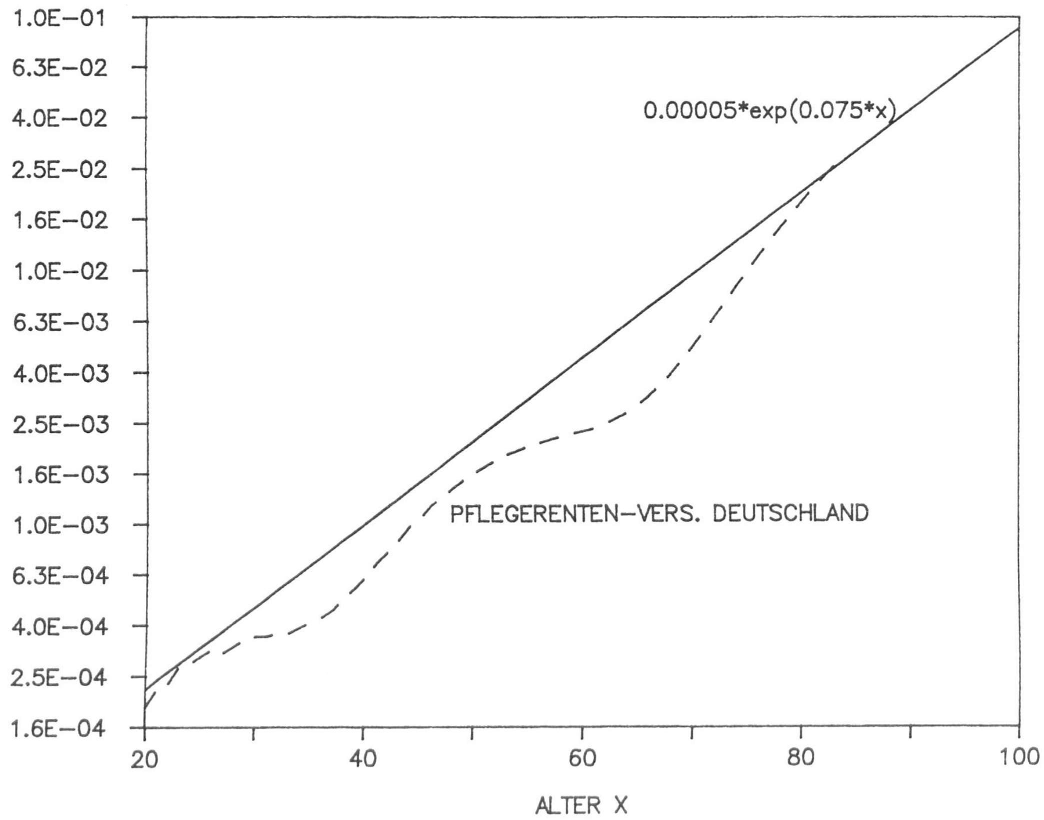
Tabelle 2: Einjährige Übergangswahrscheinlichkeiten Fortsetzung

x	$P(d(x+1) \mid b1(x))$	$P(b2(x+1) \mid b2(x))$	$P(d(x+1) \mid b2(x))$	$P(b3(x+1) \mid b3(x))$	$P(d(x+1) \mid b3(x))$	$P(b4(x+1) \mid b4(x))$	$P(d(x+1) \mid b4(x))$
51	0.038269	0.951731	0.048269	0.941731	0.058269	0.931731	0.068269
52	0.038643	0.951357	0.048643	0.941357	0.058643	0.931357	0.068643
53	0.039061	0.950939	0.049061	0.940939	0.059061	0.930939	0.069061
54	0.039527	0.950473	0.049527	0.940473	0.059527	0.930473	0.069527
55	0.040044	0.949956	0.050044	0.939956	0.060044	0.929956	0.070044
56	0.040614	0.949386	0.050614	0.939386	0.060614	0.929386	0.070614
57	0.041241	0.948759	0.051241	0.938759	0.061241	0.928759	0.071241
58	0.041927	0.948073	0.051927	0.938073	0.061927	0.928073	0.071927
59	0.042679	0.947321	0.052679	0.937321	0.062679	0.927321	0.072679
60	0.043506	0.946494	0.053506	0.936494	0.063506	0.926494	0.073506
61	0.044415	0.945585	0.054415	0.935585	0.064415	0.925585	0.074415
62	0.045414	0.944586	0.055414	0.934586	0.065414	0.924586	0.075414
63	0.046512	0.943488	0.056512	0.933488	0.066512	0.923488	0.076512
64	0.047719	0.942281	0.057719	0.932281	0.067719	0.922281	0.077719
65	0.049046	0.940954	0.059046	0.930954	0.069046	0.920954	0.079046
66	0.050504	0.939496	0.060504	0.929496	0.070504	0.919496	0.080504
67	0.052107	0.937893	0.062107	0.927893	0.072107	0.917893	0.082107
68	0.053868	0.936132	0.063868	0.926132	0.073868	0.916132	0.083868
69	0.055803	0.934197	0.065803	0.924197	0.075803	0.914197	0.085803
70	0.057930	0.932070	0.067930	0.922070	0.077930	0.912070	0.087930
71	0.060266	0.929734	0.070266	0.919734	0.080266	0.909734	0.090266
72	0.062834	0.927166	0.072834	0.917166	0.082834	0.907166	0.092834
73	0.065655	0.924345	0.075655	0.914345	0.085655	0.904345	0.095655
74	0.068754	0.921246	0.078754	0.911246	0.088754	0.901246	0.098754
75	0.072159	0.917841	0.082159	0.907841	0.092159	0.897841	0.102159
76	0.075899	0.914101	0.085899	0.904101	0.095899	0.894101	0.105899
77	0.080008	0.909992	0.090008	0.899992	0.100008	0.889992	0.110008
78	0.084520	0.905480	0.094520	0.895480	0.104520	0.885480	0.114520
79	0.089475	0.900525	0.099475	0.890525	0.109475	0.880525	0.119475
80	0.094916	0.895084	0.104916	0.885084	0.114916	0.875084	0.124916
81	0.100890	0.889110	0.110890	0.879110	0.120890	0.869110	0.130890
82	0.107448	0.882552	0.117448	0.872552	0.127448	0.862552	0.137448
83	0.114647	0.875353	0.124647	0.865353	0.134647	0.855353	0.144647
84	0.122547	0.867453	0.132547	0.857453	0.142547	0.847453	0.152547
85	0.131216	0.858784	0.141216	0.848784	0.151216	0.838784	0.161216
86	0.140726	0.849274	0.150726	0.839274	0.160726	0.829274	0.170726
87	0.151157	0.838843	0.161157	0.828843	0.171157	0.818843	0.181157
88	0.162596	0.827404	0.172596	0.817404	0.182596	0.807404	0.192596
89	0.175136	0.814864	0.185136	0.804864	0.195136	0.794864	0.205136
90	0.188880	0.801120	0.198880	0.791120	0.208880	0.781120	0.218880
91	0.203940	0.786060	0.213940	0.776060	0.223940	0.766060	0.233940
92	0.220435	0.769565	0.230435	0.759565	0.240435	0.749565	0.250435
93	0.238496	0.751504	0.248496	0.741504	0.258496	0.731504	0.268496
94	0.258263	0.731737	0.268263	0.721737	0.278263	0.711737	0.288263
95	0.279889	0.710111	0.289889	0.700111	0.299889	0.690111	0.309889
96	0.303537	0.686463	0.313537	0.676463	0.323537	0.666463	0.333537
97	0.329382	0.660618	0.339382	0.650618	0.349382	0.640618	0.359382
98	0.357614	0.632386	0.367614	0.622386	0.377614	0.612386	0.387614
99	0.388432	0.601568	0.398432	0.591568	0.408432	0.581568	0.418432
100	0.422052	0.567948	0.432052	0.557948	0.442052	0.547948	0.452052

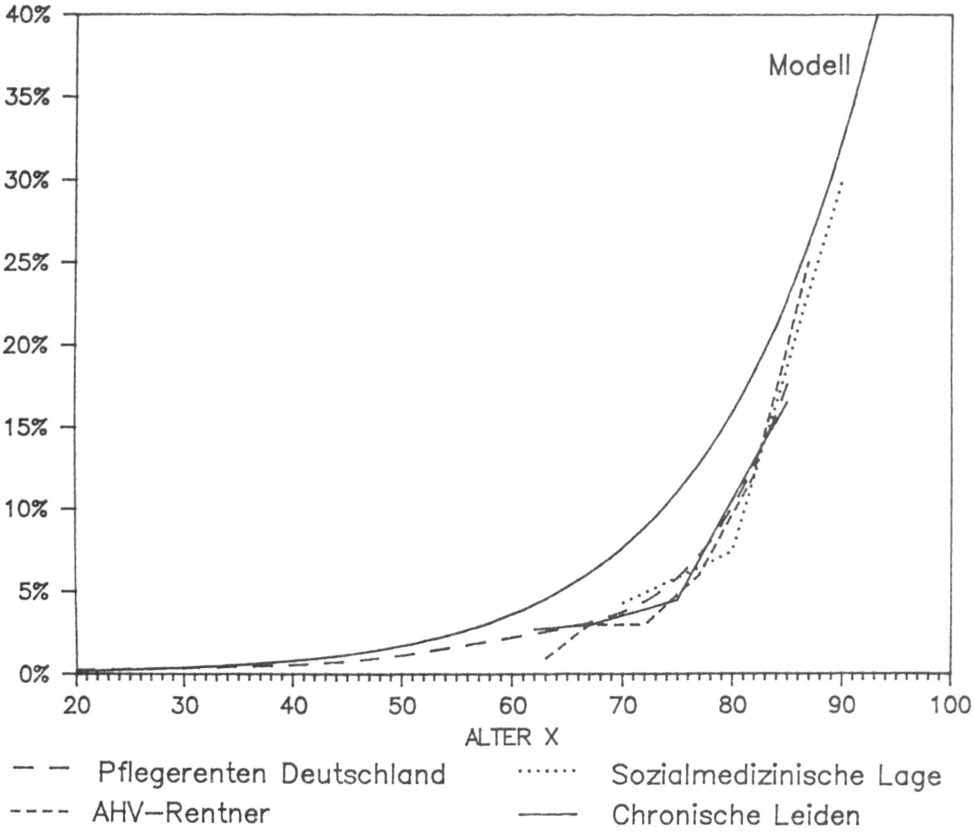
Tabelle 3: Barwerte

x	$BW(x)$
20	0.247
25	0.279
30	0.314
35	0.350
40	0.386
45	0.420
50	0.449
55	0.471
60	0.482
65	0.480
70	0.463

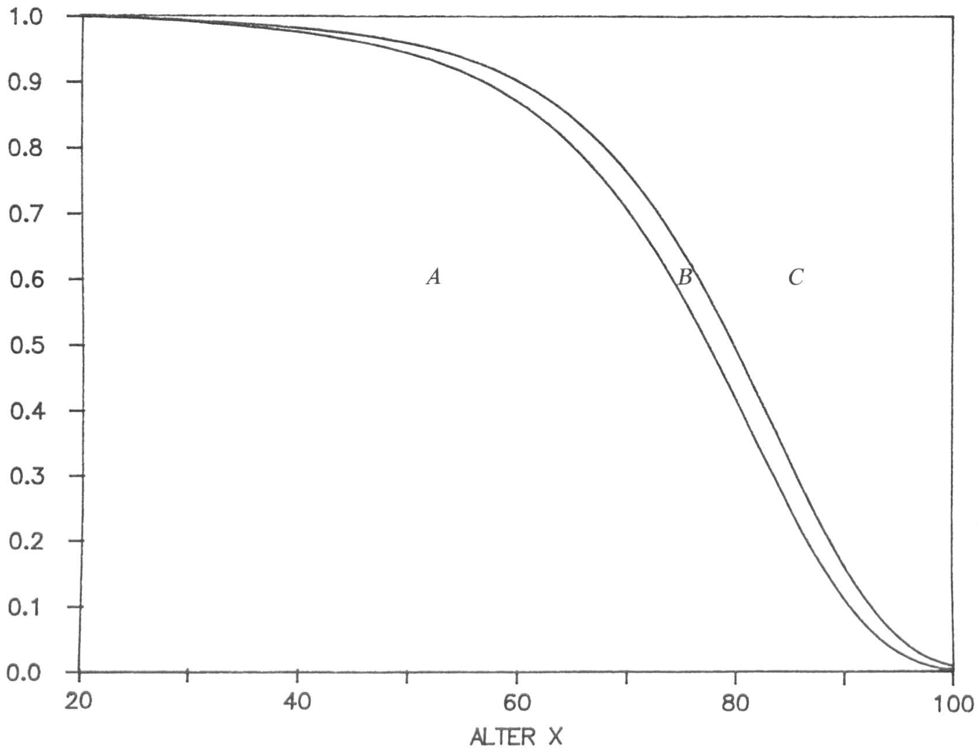
Graphik 1: Pflegefallwahrscheinlichkeiten



Graphik 2: Anteil Pflegefälle

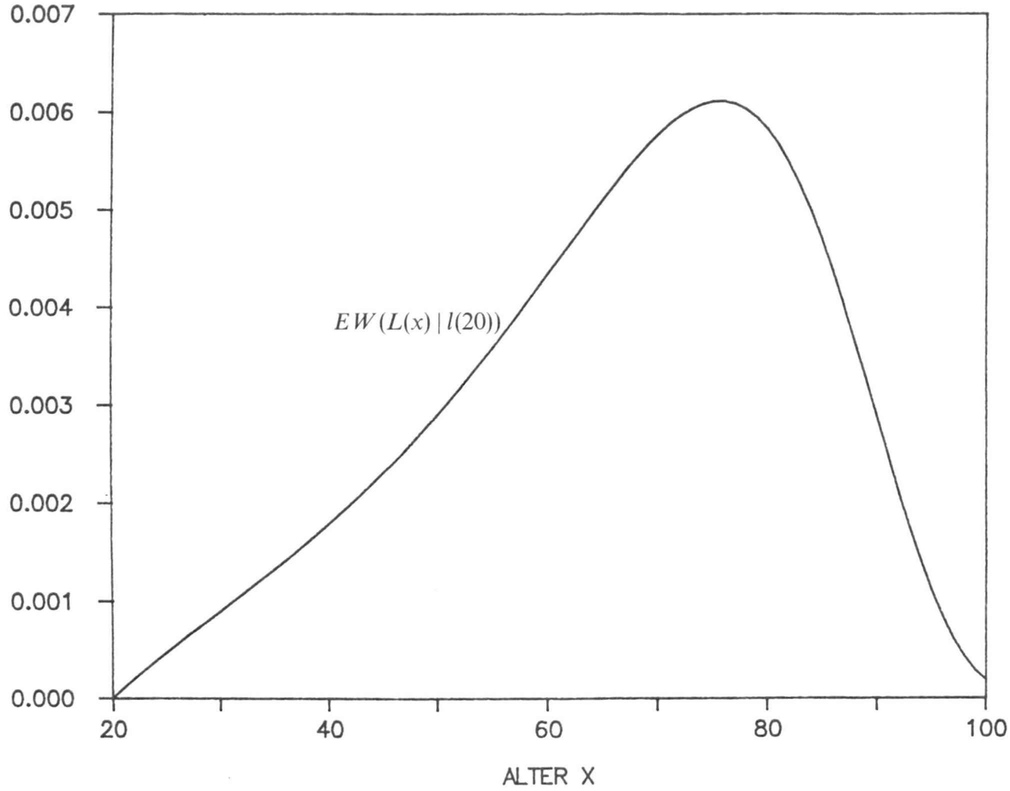


Graphik 3: Zustandswahrscheinlichkeiten



A) $P(l(x) \mid l(20))$ B) $P(b(x) \mid l(20))$ C) $P(d(x) \mid l(20))$

Graphik 4: Erwartungswerte



Zusammenfassung

Mit Markovketten kann die zeitliche Entwicklung eines Risikos modellmässig erfasst werden. In periodischen Abständen beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung die möglichen "Zustände des Versicherten". Die (diskontierten) Versicherungsleistungen bilden eine Folge von Zufallsvariablen. Barwerte sind Summen bedingter Erwartungswerte.
Am Beispiel einer Pflegeversicherung nach deutschem Muster wird gezeigt, dass sich das Modell sowohl in der Theorie als auch in der Praxis bewährt.

Résumé

Les chaînes de Markov permettent de décrire l'évolution d'un risque au cours du temps. Le modèle mathématique correspondant définit les probabilités des divers "états possibles d'un assuré" à des époques équidistantes. Les prestations d'assurance (escomtées) forment une suite de variables aléatoires. Les valeurs actuelles sont des sommes d'espérances mathématiques conditionelles.
L'article montre – sur l'exemple de l'assurance des soins pour impotents exploitée en Allemagne – que le modèle est efficace aussi bien au point de vue théorique que pratique.

Summary

The development of an individual risk can often be described by means of Markov chains. In each discrete time point a probability distribution on the possible states of the insured is defined. The discounted insurance payments form a sequence of random variables. Present values are sums of conditional expected values.
The German medical care insurance is taken as an example to show that the above model stands the test in theory as well as in practice.