Die Interpolation der Prämiensätze bei kapitalbildenden Tarifen der Lebensversicherung

Autor(en): **Bosshard, Fridolin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **- (1988)**

Heft 2

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967003

Fridolin Bosshard, Zürich

Die Interpolation der Prämiensätze bei kapitalbildenden Tarifen der Lebensversicherung

1 Problemstellung

Es sei $E_{x:\overline{s-x}|}$ der Barwert einer während $s-x$ Jahren anwartschaftlich versicherten Leistung 1 für das ganzzahlige Alter x eines kapitalbildenden Tarifes. Ebenfalls sei $\ddot{a}_{x:\overline{s-x}|}$ für ganzzahliges Alter x der Barwert einer während $s-x$ Jahren, längstens aber bis zum Tode, jährlich vorschüssig zu bezahlenden Rente vom Betrage 1.

Um in den Genuss des Versicherungsschutzes der Leistung 1 zu kommen, muss ein Versicherter des Alters x entweder sofort und einmalig den Betrag $E_{x:\overline{s-x}|}$ bezahlen oder eine jährlich vorschüssige Prämie der Höhe $P_{x:\overline{s-x}|} = E_{x:\overline{s-x}|}/\ddot{a}_{x:\overline{x-x}|}$, erstmals im Alter x und letztmals im Alter $s-1$ entrichten. $P_{x:\overline{s-x}|}$ ist der Prämiensatz für die während n Jahren anwartschaftlich versicherte Leistung 1 für das Alter x.

Wir setzen nun voraus, dass $E_{x:\overline{s-x}|}$, $\ddot{a}_{x:\overline{s-x}|}$ und damit auch $P_{x:\overline{s-x}|}$ tabellarisch für Alter $x = 15, 16, \ldots, s-1$ vorliegen. Es stellt sich nun die Frage, welche jährlich vorschüssige Prämie $P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ ein Versicherter des Alters $\bar{x} = x + \vartheta$, $0 \leq \vartheta < 1$ bezahlen muss, um in den Genuss des Versicherungsschutzes der Leistung 1 zu kommen. Dabei wird vorausgesetzt, dass die erste Prämie als Rata-Prämie der Höhe $(1-\vartheta)P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ im Alter $\bar{x}$ fällig wird. In der Praxis werden zwei Methoden angewandt, um den fraglichen Prämiensatz aus den tabellierten Werten zu bestimmen, nämlich

a) die durch lineare Barwertinterpolation definierte Prämiensatzfunktion

$$^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} := \frac{(1-\vartheta)E_{x:\overline{s-x}|} + \vartheta E_{x+1:\overline{s-x-1}|}}{(1-\vartheta)\ddot{a}_{x:\overline{s-x}|} + \vartheta \ddot{a}_{x+1:\overline{s-x-1}|}} =: \frac{E_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}{\ddot{a}_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}} \tag{1.1}$$

und

b) die Prämiensatzinterpolation

$$^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} := (1-\vartheta)P_{x:\overline{s-x}|} + \vartheta P_{x+1:\overline{s-x-1}|} \tag{1.2}$$

${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ ist eine stückweise rationale Funktion. Sie berücksichtigt im Innern eines Intervalles $[x, x+1]$ die globale Form der durch $P_{x:\overline{s-x}|}$ gegebenen diskreten Funktion. Allerdings ist ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ an den Stützstellen x nur stetig, jedoch nicht stetig differenzierbar.

Für $x \to s$ strebt die Prämiensatzfunktion ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ über alle Schranken. Die im Alter $s-1+\vartheta$ zu bezahlende Rata-Prämie beträgt jedoch

$$
\begin{aligned}
(1-\vartheta)^{E/A}P_{s-1+\vartheta:\overline{1-\vartheta}|} &= (1-\vartheta)\frac{(1-\vartheta)E_{s-1:\overline{1}|}+\vartheta\cdot 1}{(1-\vartheta)\cdot 1+\vartheta\cdot 0} \\
&= (1-\vartheta)E_{s-1:\overline{1}|}+\vartheta\cdot 1 = E_{s-1+\vartheta:\overline{1-\vartheta}|} < \infty
\end{aligned}
$$

Die stückweise lineare Interpolationsfunktion ${}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ ist etwas einfacher als ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$, wird aber der globalen Form der durch $P_{x:\overline{s-x}|}$ gegebenen diskreten Funktion nicht gerecht, vor allem nicht in höheren Altern $\bar{x}$. Dies ist auch der Grund, warum diese Methode in [1] zehn Jahre vor dem Schlussalter s nicht mehr toleriert wird.

Die Prämiensatzfunktion ${}^{E/P}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ wird in der Praxis als diejenige Funktion betrachtet, deren Wert für jedes Alter $\bar{x} = x+\vartheta$, $0 \leq \vartheta < 1$, $x < s$, den "exakten" Prämiensatz darstellt. Unter diesen Voraussetzungen beträgt der absolute Fehler, den man bei Verwendung von ${}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ anstelle von ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ begeht

$$
\varepsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} := {}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} - {}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}
$$

und der relative Fehler

$$
\frac{\varepsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}{{}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}} = \frac{{}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} - {}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}{{}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}
$$

Die Grössenordnung des eben noch tolerierten relativen Fehlers eines repräsentativen Tarifes der Lebensversicherung ist in Tabelle 1 illustriert.

Nun ist es jedoch lediglich eine – allerdings praktische – Konvention, ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ als diejenige Prämiensatzfunktion zu definieren, deren Werte die "exakten" Prämiensätze darstellen. Da ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ nur stückweise stetig differenzierbar ist, kann sie auch als eine stückweise rationale Interpolation einer überall stetig differenzierbaren Prämiensatzfunktion aufgefasst werden. Im folgenden soll versucht werden, durch die den Stützstellen $x = 15, 16, \ldots, s-1$ zugeordneten Stützwerte $P_{x:\overline{s-x}|}$ eine mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion ${}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$, $\bar{x} = x+\vartheta$, $0 \leq \vartheta < 1$, zu legen. Anschliessend werden die

Abweichungen verschiedener Approximationsfunktionen von ${}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ untersucht und bewertet.

Tabelle 1

Relative Abweichung des linear interpolierten Prämiensatzes ${}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ vom "exakten" Prämiensatz im 55. Altersjahr (Grundlagen: GKM 80, Tarif: gemischte Versicherung, $s = 65$)

Alter	$\epsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}} \,/\, {}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$	Alter	$\epsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}} \,/\, {}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$
54 1/12	0.000656	54 7/12	0.001967
54 2/12	0.001160	54 8/12	0.001785
54 3/12	0.001553	54 9/12	0.001497
54 4/12	0.001801	54 10/12	0.001086
54 5/12	0.001978	54 11/12	0.000580
54 6/12	0.002028		

2 Die kubische Splineinterpolation

Zur Konstruktion überall stetig differenzierbarer, d. h. glatter Interpolationsfunktionen drängen sich kubische Splinefunktionen auf. Zu deren Einführung und Begründung wollen wir uns jedoch von den in der Lebensversicherungsmathematik üblichen Bezeichnungen lösen. Die Übertragung und Anwendung solcher Funktionen auf Barwerte und Prämiensätze ist leicht und wird in Abschnitt 2.2 vorgenommen.

2.1 Die Einführung und Charakterisierung von kubischen Splinefunktionen

Über Splinefunktionen existiert eine reiche Auswahl von Literatur. Wir folgen in unserer Einführung im wesentlichen den Ausführungen von *Schwarz* [3], S. 125–140, unterlassen jedoch Details. Wenn zu $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ Stützwerte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ vorgegeben sind, so kann man sich eine glatte Interpolation der gegebenen y_i als eine Kurve vorstellen, welche durch eine homogene Latte (= Spline), die alle diese Punkte berührt, beschrieben wird. Wir bezeichnen nun eine derart erhaltene Interpolationsfunktion mit $s(x)$. Die natürliche Form, welche eine solche Latte annimmt, ist dadurch charakterisiert, dass die Deformationsenergie der Latte durch die angenommene Form minimiert wird. Die Deformationsenergie wird aber, abgesehen von physikalischen und geometrischen Konstanten, beschrieben durch den Ausdruck

$$E = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_n} s''(x)^2 \, dx. \tag{2.1}$$

Die gesuchte Funktion $s(x)$ ist daher die Lösung einer Variationsaufgabe unter folgenden Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a)} & s(x_i) = y_i \\
\text{b)} & s(x) \text{ ist an den Stellen } x_1, \ldots, x_{n-1} \text{ stetig differenzierbar} \\
\text{c)} & s(x) \text{ ist zwischen den Stützstellen viermal stetig differen-} \\
 & \text{zierbar} \\
\text{d)} & s(x) \text{ minimiert das Integral} \\
 & \displaystyle J = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_n} s''(x)^2 \, dx.
\end{array}\right\} \quad (2.2)$$

Die Bedingung c ist notwendig, damit die erste Variation des Integralausdruckes

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_n} s''(x) \, \delta s''(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''(x) \, \delta s''(x) \, dx$$

in den Teilintervallen partiell integriert werden kann. Gemäss der klassischen Variationsrechnung muss für die Lösung $s(x)$ $\delta J = 0$ werden, woraus folgende notwendigen Bedingungen resultieren:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{e)} & s^{(4)}(x) = 0 \text{ zwischen den Stützstellen} \\
\text{f)} & s(x) \text{ ist an den Stellen } x_1, \ldots, x_{n-1} \text{ zweimal stetig} \\
 & \text{differenzierbar} \\
\text{g)} & s''(x_0) = s''(x_n) = 0.
\end{array}\right\} \quad (2.3)$$

Für die gesuchte Funktion $s(x)$ gilt deshalb

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & s(x) \text{ ist ein stückweise kubisches Polynom} \\ 2. & s''(x) \text{ ist an den Stellen } x_1, \ldots, x_{n-1} \text{ stetig} \\ 3. & s''(x) = 0 \text{ für } x = x_0 \text{ und } x = x_n \end{array}\right\} \quad (2.4)$$

Wir wählen daher in einem beliebigen Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ den Ansatz

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i\,. \quad (2.5)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$s_i''(x_i) =: y_i''$$

und

$$s_i''(x_{i+1}) =: y_{i+1}''$$

so folgt aus (2.4) und (2.5) und der für unsere späteren Zwecke zu treffenden Annahme, dass $x_{i+1} - x_i = 1$, $i = 0, \ldots, n-1$, für die Polynomkoeffizienten

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{6}(y_{i+1}'' - y_i'') \\ b_i &= \frac{1}{2}y_i'' \\ c_i &= (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6}(y_{i+1}'' + 2y_i'') \\ d_i &= y_i\,. \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

Die Unbekannten y_i'' in (2.6) lassen sich bestimmen aus der Bedingung

$$s_{i-1}'(x_i) = s_i'(x_i),$$

was auf die Gleichung

$$y_{i-1}'' + 4y_i'' + y_{i+1}'' = 6(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \quad (2.7)$$

führt, welche an allen innern Stützstellen erfüllt sein muss. Wir erhalten daher unter Berücksichtigung von $s''(x_0) = y_0'' = s''(x_n) = y_n'' = 0$ das einfache lineare Gleichungssystem

$$A\underline{y}'' - \underline{b} = \underline{0} \tag{2.8}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{y}'' = [y_1'', y_2'', \ldots, y_{n-1}'']^T$$

$$\underline{b} = [-6(y_2 - 2y_1 + y_0), -6(y_3 - 2y_2 + y_1), \ldots, -6(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2})]^T.$$

Um in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ die Polynomkoeffizienten durch die Gleichungen (2.6) zu bestimmen, ist es daher notwendig, vorgängig das lineare Gleichungssystem (2.8) aufzulösen.

2.2 Die Anwendung der Splineinterpolation auf Barwerte und Prämiensätze

Wir wollen nun die Splineinterpolation anwenden, um eine durch die Stützwerte $P_{x:\overline{s-x}|}$ führende, mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion ${}^0P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$, $\bar{x} = x + \vartheta$, $0 \leq \vartheta < 1$, zu konstruieren. Allerdings sprechen zwei Gründe dagegen, die Funktion ${}^0P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ als Splineinterpolierende aus $P_{x:\overline{s-x}|}$ zu gewinnen:

a) $P_{x:\overline{s-x}|}$ existiert für $x = 65$ nicht. Für $x = 64$ könnte daher z. B. c_{64} in (2.6) nicht bestimmt werden.

b) ${}^0P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ ist wegen der Singularität bei $x = 65$ von der Form her mit einer rationalen Funktion vergleichbar. Eine rationale Funktion lässt sich mit stückweise kubischen Polynomen nicht ideal approximieren.

Bezeichnen wir mit ${}^{0}E_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ und ${}^{0}\ddot{a}_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ die Splineinterpolierenden von $E_{x:\overline{s-x}|}$ und $\ddot{a}_{x:\overline{s-x}|}$, so soll ${}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ wie folgt definiert werden:

$$ {}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} := {}^{0}E_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} / {}^{0}\ddot{a}_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}. \tag{2.9} $$

Dabei wird analog zu den in Abschnitt 1 bestimmten Prämiensätzen ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ bzw. ${}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ verlangt, dass die erste Prämie als Rata-Prämie der Höhe $(1-\vartheta)\,{}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ im Alter $\bar{x}$ fällig wird. ${}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ erfüllt die Eigenschaften a) und b) von (2.2), nicht mehr jedoch die Eigenschaften c) und d). Andererseits bleibt durch (2.9) das Äquivalenzprinzip im allgemeinen bewahrt. Eine Ausnahme bildet das letzte Versicherungsjahr, wo $(1-\vartheta)^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ von ${}^{0}E_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ abweicht. Da für $s-1<x$ $(1-\vartheta)^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ von ${}^{0}E_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ abweicht, kann dort ${}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ offensichtlich nicht mehr die Rolle einer Referenzfunktion übernehmen, woran andere Prämiensatzinterpolationen gemessen werden können. Wir schliessen daher diesen Altersbereich zukünftig von unseren Betrachtungen aus.

Wir wollen nun für den gleichen Tarif wie in Tabelle 1 die üblichen Prämieninterpolationsformeln ${}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ und ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ an ${}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ messen und die relativen Fehler

$$ \frac{{}^{L}\varepsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}{{}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}} := \frac{{}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} - {}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}{{}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}} $$

bzw.

$$ \frac{{}^{E/A}\varepsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}{{}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}} := \frac{{}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} - {}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}{{}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}} $$

berechnen. Interessant sind dabei diejenigen Jahre mit den höchsten Fehlerbeträgen. Tabelle 2 zeigt die entsprechenden Grössen für die Alter 54–55 und 63–64.

Da lineare Interpolation gemäss den Anwendungsvorschriften [1] nur bis zehn Jahre vor dem Schlussalter erlaubt ist, wurde für das Alter 63–64 der Interpolationsfehler nur für ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ berechnet. Tabelle 2 zeigt beträchtliche Abweichungen der üblichen Interpolationsformeln, wenn wir die glatte, d. h. überall mindestens einmal stetig differenzierbare Interpolationsfunktion ${}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ als "exakte" Funktion betrachten.

Tabelle 2

Relative Abweichungen der interpolierten Prämiensätze ${}^{L}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}$ und ${}^{E/A}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}$ von ${}^{0}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}$ in zwei Altersjahren (Grundlagen: GKM 80, Tarif: gemischte Versicherung, $s = 65$)

Alter	$\frac{{}^{L}\epsilon_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}}{{}^{L}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}}$	$\frac{{}^{E/A}\epsilon_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}}{{}^{E/A}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}}$	Alter	$\frac{{}^{E/A}\epsilon_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}}{{}^{E/A}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}}$
54 1/12	0.00074	0.00011	63 1/12	0.00105
54 2/12	0.00133	0.00020	63 2/12	0.00201
54 3/12	0.00180	0.00027	63 3/12	0.00287
54 4/12	0.00213	0.00032	63 4/12	0.00361
54 5/12	0.00233	0.00035	63 5/12	0.00419
54 6/12	0.00239	0.00036	63 6/12	0.00460
54 7/12	0.00232	0.00035	63 7/12	0.00478
54 8/12	0.00212	0.00033	63 8/12	0.00468
54 9/12	0.00179	0.00028	63 9/12	0.00425
54 10/12	0.00133	0.00021	63 10/12	0.00340
54 11/12	0.00073	0.00011	63 11/12	0.00203

3 Die rationale Interpolation der Prämiensätze

Die "exakte" Interpolationsfunktion ${}^{0}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}$ hat den grossen Nachteil, dass sie aufwendig zu berechnen ist. Will man einen interpolierten Prämiensatz für ein bestimmtes Alter $\overline{x}$ aus den Kommutationszahlen oder den Sterbetafeln berechnen, müsste man zuerst $E_{x:\overline{s-x|}}$ und $\ddot{a}_{x:\overline{s-x|}}$ für *alle* x berechnen, sodann das Gleichungssystem (2.8) lösen, für das entsprechende Alter x die notwendigen Polynomkoeffizienten gemäss (2.6) ermitteln und anschliessend $s_x(\overline{x})$ berechnen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die interpolierten Werte einmal zu berechnen, zu speichern und bei Berechnungen abzurufen. Würde man dies für jeden Tarif, jedes Schlussalter, beide Geschlechter und alle Alter durchführen, so resultierte daraus eine riesige Flut von Prämiensätzen. Beide Möglichkeiten vermögen nicht zu befriedigen.

Um mit vernünftigem Aufwand ein gutes Ergebnis zu erzielen, suchen wir eine neue Interpolationsformel. Wie bereits in Abschnitt 2.2 erwähnt, ist ${}^{0}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}|}}$

von der Form her mit einer rationalen Funktion vergleichbar. Diese Tatsache legt es nahe, $P_{x:\overline{s-x}|}$ mit einer rationalen Funktion

$$^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} := \frac{1}{q_0 + q_1 \vartheta},$$

wobei

$$P_{x:\overline{s-x}|} = \frac{1}{q_0}$$

und

$$P_{x+1:\overline{s-x-1}|} = \frac{1}{q_0 + q_1},$$

zu interpolieren. Durch Umformung erhält man sofort

$$^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} = \frac{1}{1/P_{x:\overline{s-x}|} + \vartheta(1/P_{x+1:\overline{s-x-1}|} - 1/P_{x:\overline{s-x}|})}. \tag{3.1}$$

Wie bereits bei den Prämiensätzen $^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ und $^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ wird vorausgesetzt, dass die erste Prämie als Rata-Prämie der Höhe $(1-\vartheta)^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ im Alter $\bar{x}$ fällig wird.

Mit $1/P_{65:\overline{0}|} = 0$ bekommt die durch (3.1) definierte Funktion $^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ auch für $s-1 < \bar{x} < s$ einen Wert. Wir erhalten für das im letzten Versicherungsjahr liegende Alter $\bar{x}$ den Prämiensatz

$$^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} = \frac{1}{1/P_{64:\overline{1}|} - \vartheta\ 1/P_{64:\overline{1}|}} = \frac{P_{64:\overline{1}|}}{(1-\vartheta)}$$

und die Rata-Prämie $P_{64:\overline{1}|}$. Dieses Resultat, dass im letzten Versicherungsjahr die Rata-Prämie konstant bleibt, schliesst die Anwendbarkeit der rationalen Prämiensatzinterpolation in diesem Altersbereich aus.

Tabelle 3 zeigt, wiederum für den repräsentativen Tarif der gemischten Versicherung, verschieden definierte Prämiensätze, Rata-Prämien und Barwerte in den Altern 54 6/12 und 64 6/12.

Für das Alter 64 6/12 sind auch solche Werte aufgeführt, deren Anwendung wenig sinnvoll ist. Sie sind mit einem (*) versehen.

In Tabelle 4 sind, für den repräsentativen Tarif der gemischten Versicherung, die relativen Abweichungen

$$\frac{^{R}\varepsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}{^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}} := \frac{^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} - {}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}{^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}}$$

für das 62. und 63. Altersjahr aufgeführt. Zum Vergleich sind auch die entsprechenden Abweichungen $^{E/A}\varepsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|} / {}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ angegeben.

Tabelle 3

Prämiensätze, Rata-Prämien und Barwerte in den Altern $\overline{x} = 54\ 6/12$ und $\overline{x} = 64\ 6/12$ (Grundlagen : GKM 80, Tarif: gemischte Versicherung, $s = 65$)

Alter	54 6/12	64 6/12
$^{L}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.08924	
$(1-\vartheta)\,^{L}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.04462	
$^{E/A}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.08905	1.97357
$(1-\vartheta)\,^{E/A}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.04453	0.98679
$^{0}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.08902	1.95739*
$(1-\vartheta)\,^{0}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.04451	0.97870*
$^{R}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.08900	1.94714*
$(1-\vartheta)\,^{R}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.04450	0.97357*
$E_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.77116	0.98679
$^{0}E_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	0.77110	0.98668
$\ddot{a}_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	8.65946	0.5
$^{0}\ddot{a}_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$	8.66186	0.50408

4 Diskussion der rationalen Interpolation

4.1 Interpolationsfehler

Wie aus Tabelle 4 ersichtlich wird, bringt die durch (3.1) definierte rationale Interpolation $^{R}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$ gegenüber der üblicherweise vorgeschriebenen Interpolation $^{E/A}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$ mit Ausnahme des 65. Altersjahres, wo die rationale Interpolation ausgeschlossen wurde, bessere Werte, dies immer gemessen an der glatten Prämiensatzkurve $^{0}P_{\overline{x}:\overline{s-\overline{x}}\rceil}$, welche mittels Splineinterpolation der Barwerte und (2.9) definiert wird. Folgende Feststellungen können aufgrund der Resultate, welche teilweise in den Tabellen 4 und 5 aufgeführt sind, gemacht werden:

Tabelle 4

Relative Abweichungen der rational interpolierten Prämiensätze ${}^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ und ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ von ${}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ im 63. und 64. Altersjahr (Grundlagen: GKM 80, Tarif: gemischte Versicherung, $s = 65$)

Alter	$\frac{{}^{R}\epsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}}{{}^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}}$	$\frac{{}^{E/A}\epsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}}{{}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}}$	Alter	$\frac{{}^{R}\epsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}}{{}^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}}$	$\frac{{}^{E/A}\epsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}}{{}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}}$
62 1/12	-0.00009	0.00059	63 1/12	-0.00001	0.00105
62 2/12	-0.00018	0.00103	63 2/12	0.00001	0.00201
62 3/12	-0.00025	0.00151	63 3/12	0.00005	0.00287
62 4/12	-0.00031	0.00184	63 4/12	0.00011	0.00361
62 5/12	-0.00035	0.00207	63 5/12	0.00017	0.00419
62 6/12	-0.00038	0.00219	63 6/12	0.00024	0.00460
62 7/12	-0.00039	0.00219	63 7/12	0.00030	0.00478
62 8/12	-0.00037	0.00207	63 8/12	0.00034	0.00468
62 9/12	-0.00033	0.00180	63 9/12	0.00036	0.00425
62 10/12	-0.00025	0.00138	63 10/12	0.00032	0.00340
62 11/12	-0.00015	0.00079	63 11/12	0.00021	0.00203

a) ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}} > {}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ für alle Alter $\bar{x}$

b) ${}^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}} < {}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ bis $\bar{x} = 63\ 1/12$

c) Die Überlegenheit der rationalen Interpolation ${}^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ gegenüber ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ ist in Bezug auf den Fehler stark altersabhängig (siehe Tab. 5).

d) Im letzten Jahr vor dem Schlussalter kann die Rata-Prämie nur als $(1-\vartheta)\,{}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}}$ sinnvoll aus dem Prämiensatz bestimmt werden.

4.2 *Die Anwendung der rationalen Interpolation*

Die Formel (3.1) der rationalen Interpolation ist sowohl für maschinelle wie für manuelle Berechnungen einfach anzuwenden. Für manuelle Anwendungen ist folgende Unformung für Alter $\bar{x} < 64$ vorteilhaft:

$$ {}^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}|}} = \frac{P_{x:\overline{s-x|}}\, P_{x+1:\overline{s-x-1|}}}{P_{x:\overline{s-x|}} + (1-\vartheta)(P_{x+1:\overline{s-x-1|}} - P_{x:\overline{s-x|}})}. $$

Sie benötigt, zusammen mit der Ermittlung des Faktors $1-\vartheta = (12-m)/12$, lediglich

Tabelle 5

Relative Interpolationsfehler im Vergleich, in Abhängigkeit vom Alter (Grundlagen: GKM 80, Tarif: gemischte Versicherung, $s = 65$)

Alter	$\frac{L_{\epsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}\rceil}}}{L_{P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}\rceil}}}$	$\frac{E/A_{\epsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}\rceil}}}{E/A_{P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}\rceil}}}$	$\frac{R_{\epsilon_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}\rceil}}}{R_{P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}\rceil}}}$
25 6/12	0.00025	0.00013	-0.00006
26 6/12	0.00027	0.00013	-0.00005
27 6/12	0.00028	0.00014	-0.00006
28 6/12	0.00029	0.00014	-0.00006
29 6/12	0.00031	0.00015	-0.00006
30 6/12	0.00032	0.00015	-0.00007
31 6/12	0.00034	0.00015	-0.00007
32 6/12	0.00035	0.00015	-0.00008
33 6/12	0.00037	0.00015	-0.00009
34 6/12	0.00039	0.00015	-0.00009
35 6/12	0.00041	0.00015	-0.00010
36 6/12	0.00042	0.00015	-0.00011
37 6/12	0.00045	0.00015	-0.00012
38 6/12	0.00047	0.00016	-0.00012
39 6/12	0.00050	0.00016	-0.00013
40 6/12	0.00053	0.00016	-0.00014
41 6/12	0.00057	0.00016	-0.00015
42 6/12	0.00061	0.00016	-0.00015
43 6/12	0.00066	0.00017	-0.00016
44 6/12	0.00071	0.00018	-0.00017
45 6/12	0.00077	0.00018	-0.00017
46 6/12	0.00085	0.00019	-0.00018
47 6/12	0.00094	0.00020	-0.00019
48 6/12	0.00104	0.00022	-0.00019
49 6/12	0.00116	0.00023	-0.00020
50 6/12	0.00131	0.00024	-0.00021
51 6/12	0.00150	0.00027	-0.00021
52 6/12	0.00172	0.00029	-0.00022
53 6/12	0.00201	0.00032	-0.00023
54 6/12	0.00239	0.00036	-0.00024
55 6/12		0.00041	-0.00025
56 6/12		0.00047	-0.00026
57 6/12		0.00056	-0.00027
58 6/12		0.00067	-0.00029
59 6/12		0.00084	-0.00029
60 6/12		0.00109	-0.00031
61 6/12		0.00152	-0.00029
62 6/12		0.00219	-0.00038
63 6/12		0.00460	0.00024

4 Multiplikationen / Divisionen und
3 Additionen / Subtraktionen

gegenüber

5 Multiplikationen / Divisionen und
5 Additionen / Subtraktionen

bei der in (1.1) definierten Interpolationsformel ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$. Das Äquivalenzprinzip wird durch die Anwendung von ${}^{R}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ leicht verletzt, jedoch in sehr viel kleinerem Ausmass als durch die Anwendung der linearen Interpolation ${}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ in Altern bis 10 Jahre vor dem Schlussalter. Allerdings geht hier die Verletzung des Äquivalenzprinzips (abgesehen von den Prämiensätzen im 64. Altersjahr) in Richtung zu kleiner Prämien, im Gegensatz zu ${}^{L}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ oder ${}^{E/A}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$, wenn die glatte Prämiensatzfunktion ${}^{0}P_{\bar{x}:\overline{s-\bar{x}}|}$ als die exakte Prämie angesehen wird.

4.3 Ein Anwendungsbeispiel

Um die Auswirkungen der verschiedenen Prämieninterpolationsformeln zu veranschaulichen, sollen an einem Beispiel aus der Praxis der Betrag der Prämien ${}^{0}\pi$, ${}^{E/A}\pi$, ${}^{L}\pi$ und ${}^{R}\pi$ für eine vorgegebene Leistung dargestellt werden.

Beispiel:

Grundlage: GKM 80, Tarif: gemischte Versicherung
$x = 54\ 7/12$, $s = 65$, Leistung = 100 000

${}^{0}\pi = 8979$ ${}^{E/A}\pi = 8982$ ${}^{L}\pi = 9000$ ${}^{R}\pi = 8977$

Dr. Fridolin Bosshard
VITA Lebensversicherungs-Gesellschaft
Postfach
8022 Zürich

Referenzen

[1] *Vereinigung Schweizerischer Lebensversicherungsgesellschaften:* Kollektivversicherung Tarif 1984, Bd. I, 1984.

[2] *Vereinigung Schweizerischer Lebensversicherungsgesellschaften:* Kollektivversicherung Tarif 1980, Bd. II, 1979.

[3] *Schwarz, H. R.:* Numerische Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart 1986.

Zusammenfassung

In der Lebensversicherung werden Barwerte für diskrete Alter $x = 15, 16, \ldots, s$ berechnet, woraus für die entsprechenden Alter die Prämiensätze gewonnen werden mittels Division der Barwerte durch die Prämienbarwerte. Für beliebige Alter muss der Prämiensatz durch geeignete Interpolation der gegebenen Prämiensätze errechnet werden. Um die Güte einer Interpolation zu beurteilen, muss sie an einer Referenzfunktion gemessen werden. Als Referenzfunktion dient in dieser Arbeit, anders als in der Praxis, der Quotient der kubischen Spline-Interpolierenden je von Barwert und Prämienbarwert. Die übliche Interpolation, der Quotient der linearen Interpolation von Barwert und Prämienbarwert, wird nur noch als eine Näherung aufgefasst. Als weitere Näherung der Prämiensätze werden die lineare und rationale Interpolation im Vergleich zu unserer Referenzinterpolierenden diskutiert.

Résumé

En assurance-vie les valeurs actuelles sont calculées pour des âges entiers. Les taux de primes sont obtenus par division de la valeur actuelle des prestations par la valeur actuelle des primes. Pour un âge quelconque, le taux de prime doit être déterminé par une interpolation appropriée des taux de primes "entiers". Pour estimer la qualité d'une interpolation celle-ci doit être comparée á une fonction de référence. Dans ce travail, l'auteur choisit pour fonction de référence, contrairement á l'habitude, la fonction cubique de spline interpolant respectivement les valeurs actuelles des prestations et les valeurs actuelles des primes. L'interpolation courante obtenue par divison des résultats de l'interpolation linéaire des valeurs actuelles des prestations et des valeurs actuelles des primes est considérée comme simple approximation. L'auteur présente encore d'autres approximations soit l'interpolation linéaire et l'interpolation rationnelle et les compare á la fonction de référence choisie.

Summary

In life insurance the present values are computed for discrete ages. Premium rates for the respective ages are obtained by division of the present values by the present value of premiums. For any given age premium rates may be computed by applying an appropriate interpolation of the given premium rates. In order to estimate the quality of an interpolation it has to be compared with a reference function. In the present paper we choose as a reference function, unlike in daily work, the quotient of the spline functions interpolating the present values and the present values of premium respectively. The conventional interpolation, the quotient of the linear interpolation of the present values and the present values of premium, is considered as an approximation to our reference function. Other approximations to the premium rates such as linear interpolation and rational interpolation in comparsion with our reference function are discussed.