

# Stochastische Modelle zur Altersrentenindexierung in der beruflichen Vorsorge

Autor(en): **Lüthy, Herbert**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): - **(1988)**

Heft 1

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966992>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen

HERBERT LÜTHY, Basel

Stochastische Modelle zur Altersrentenindexierung in der beruflichen Vorsorge<sup>1,2</sup>

### 1 Einleitung

#### 1.1 Fragestellung und Ziel der vorliegenden Arbeit

Im folgenden soll versucht werden, die Frage der Versicherbarkeit des Teuerungsrisikos bei laufenden Altersrenten in der beruflichen Vorsorge anzugehen.

Beim Teuerungsproblem bezüglich laufender Altersrenten in einem Finanzierungs-System mit Kapitaldeckung handelt es sich um eine in vielen Ländern sozialpolitisch wichtige, wenn auch zur Zeit nicht sehr aktuelle Frage.

Für die Schweiz gilt es jedoch speziell zu beachten, dass nach dem Wortlaut der Bundesverfassung (Art. 34quater) und zwei dazu ausgearbeiteten Rechtsgutachten (durch die Herren Prof. Fleiner und Jagmetti) die Indexierung laufender Altersrenten in der 2. Säule vermutlich bei einer Gesetzesrevision obligatorisch eingeführt werden dürfte, da nur so die gewohnte Lebenshaltung aufrechterhalten werden kann und die geforderte parallele Entwicklung zur 1. Säule möglich ist. Im weiteren ist auch denkbar – und dies gilt bereits heute – dass solche Indexierungen freiwillig vorgenommen werden.

Im Zusammenhang mit dem gewählten Thema ergeben sich sehr viele Fragen. Die wohl wichtigsten können etwa mit folgenden Stichworten angedeutet werden (Aufzählung nicht abschliessend):

- Grenzen der Versicherbarkeit des Teuerungsrisikos, also z. B. Kriterien einer eventuellen Grenze des vollen Teuerungsausgleichs;
- Finanzierungsverfahren, Ausmass der Kapitalbildung;
- Stellung und erwünschtes Ausmass allfälliger Schwankungsreserven;

<sup>1</sup> Dieser Artikel stellt eine Weiterentwicklung eines Teils meiner Habilitationsschrift dar, die ich im Sommer 1986 an der Universität Basel eingereicht habe. Für die genauen Herleitungen verschiedener mathematischer Aussagen oder weitere Zahlenbeispiele, die hier aus Platzgründen nicht veröffentlicht werden können, bin ich gerne zu näheren Auskünften bereit.

<sup>2</sup> An dieser Stelle möchte ich auch Frau Marie-Thérèse Kohler für ihre Anregungen und für viele lehrreiche Gespräche sowie Herrn Edy Gerber für die praktische Durchführung der oft sehr komplizierten EDV-Berechnungen herzlich danken.

- Notwendigkeit einer gesamtstaatlichen Risikotragung oder Tragung durch kleinere Einheiten, beispielsweise private Lebensversicherungsgesellschaften oder Vorsorgeeinrichtungen selbst;
- Möglichkeiten freiwilliger Versicherung;
- Abgrenzungsprobleme obligatorische/überobligatorische Versicherung.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, die notwendigen mathematischen Methoden zur Beantwortung der genannten Fragen bereitzustellen.

Dazu gehören vor allem:

- Aufzeigen von Möglichkeiten/Modellen;
- Fragen nach der Durchführbarkeit solcher Modelle;
- Fragen nach der grundsätzlichen Berechenbarkeit solcher Modelle und Beispiele entsprechender Berechnungen.

## 1.2 *Das zugrundegelegte Finanzierungsverfahren*

Normalerweise werden drei Grundtypen von Finanzierungsverfahren unterschieden, nämlich das Kapitaldeckungsverfahren, das Rentenwertumlageverfahren und das Ausgabenumlageverfahren. Bei den nachfolgenden Modellen wird zunächst davon ausgegangen, dass die Finanzierung der Teuerungsanpassung laufender Altersrenten in der 2. Säule nach dem Rentenwertumlageverfahren erfolgt. Dies aus folgenden Gründen:

- Das Kapitaldeckungsverfahren ist mit hoher Kapitalbildung verbunden, die gerade dem Inflationsproblem kaum angemessen ist. Oft könnten dabei zu hohe Leistungen versichert werden, aber trotz dieser hohen Kapitalbildung ist die Finanzierbarkeit des Teuerungsausgleichs ohne weitere Massnahmen dennoch nicht in allen Fällen gesichert.
- Beim Ausgabenumlageverfahren besteht dagegen die Gefahr, dass die Problematik zeitlich hinausgeschoben wird, da bei Altrenten jedes Jahr die kumulierte Teuerung seit Rentenbeginn finanziert werden muss. Die entsprechend hohen Belastungen können dann gerade in einer Zeitphase auftreten, die ohnehin infolge eines äußerst ungünstigen Rentnerverhältnisses Finanzierungsprobleme bringen dürfte.
- Das Rentenwertumlageverfahren erscheint dagegen der Teuerungsfinanzierung angemessen (Bereitstellung der jeweils benötigten Barwerte der Rentensteigerungen). Für die Wahl des Rentenwertumlageverfahrens in den folgenden Modellen vielleicht noch wichtiger als diese Feststellung ist jedoch die Tatsache, dass dieses Verfahren im vorliegenden Zusammenhang die allgemeinste Form darstellt. Andere Finanzierungssysteme

---

ergeben entweder gar keine entsprechenden Fragen oder diese lassen sich relativ einfach mit den hier behandelten Methoden ebenfalls lösen. Das Rentenwertumlageverfahren ist in diesem Sinne das allgemeinste Finanzierungssystem; die damit gewonnenen Erkenntnisse lassen sich rasch auf andere Finanzierungssysteme übertragen.

### 1.3 Das Problem der Schwankungen

Die Untersuchung verschiedener Schwankungen ist das Hauptthema der vorliegenden Arbeit. Schwankungen ergeben sich grundsätzlich in folgender Hinsicht:

1. Wirtschaftliche Schwankungen (im hier behandelten Zusammenhang vor allem Lohnentwicklung, Preisentwicklung und Zins),
2. Bestandesschwankungen (Aktive, Rentner).

In der vorliegenden Arbeit werden solche Schwankungen wie folgt erfasst:

- Die wirtschaftlichen Schwankungen werden, als exogene Variable, einerseits durch die Wahl verschiedener Kombinationen der vorkommenden Grössen erfasst, andererseits durch verschiedene (tatsächlich vorgekommene) Szenarien. Die Annahme gewisser Verteilungen für wirtschaftliche Grössen dürfte ein zu grosses spekulatives Moment enthalten und ist zur Berechnung numerischer Werte auch gar nicht notwendig. Zum Problem der Änderungsrisiken vgl. etwa auch *Hutter* [6].
- Schwankungen des Aktivenbestandes werden ebenfalls als exogene Variable und nicht als Zufallsvariable aufgefasst, da die Zahl der aktiven Versicherten einer Vorsorgeeinrichtung weniger vom Zufall als vielmehr von der unternehmerischen Entscheidung und der wirtschaftlichen Situation abhängt. Im folgenden wird die Anzahl der aktiven Versicherten einer Vorsorgeeinrichtung als deren "Grösse" bezeichnet.
- Im Gegensatz dazu wird die Rentnerbestandesentwicklung, als eine der wichtigsten Grundlagen zur Bestimmung der finanziellen Belastung einer Vorsorgeeinrichtung, hier als zufallsbedingte Grösse aufgefasst. Dies ist ein grundlegender Unterschied zu den bisherigen Arbeiten zu Fragen der Teuerung in der Sozial- und Rentenversicherung, in welchen meines Wissens nur deterministische Modelle verwendet werden (vgl. etwa *Niedermann* [7], *Thullen* [9]).

Als allgemeine Lösung zu den Schwankungsproblemen bieten sich grundsätzlich an:

- Bei wirtschaftlichen Schwankungen: Reservebildung;



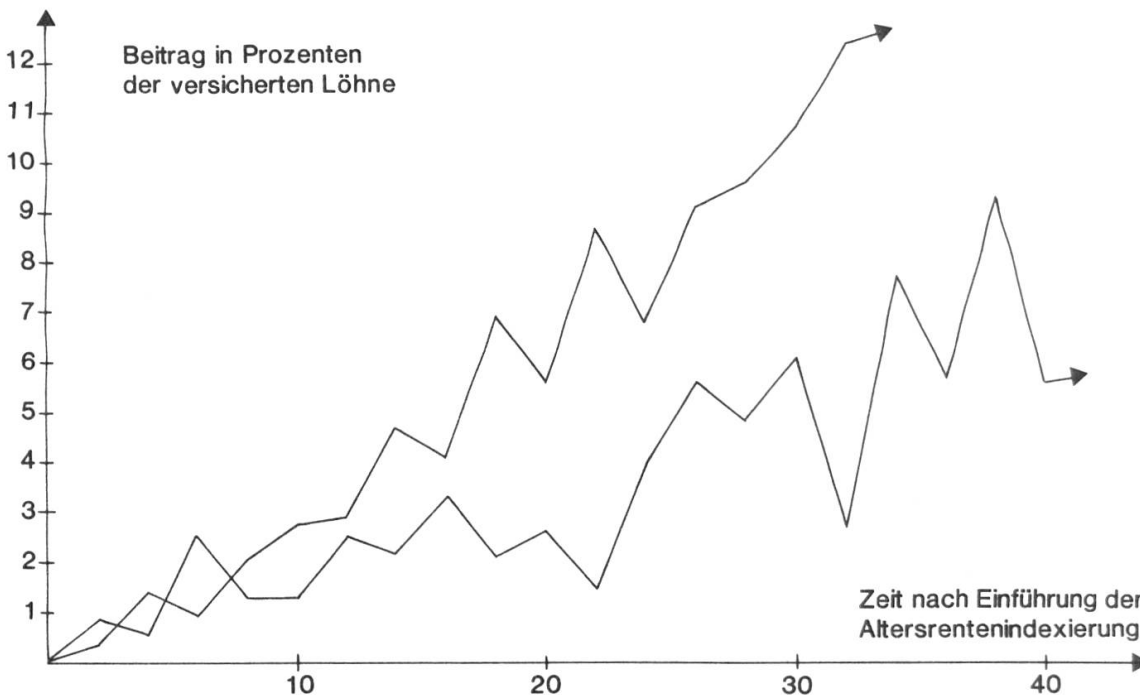
- Bei Bestandesschwankungen: Solidarität zwischen den Vorsorgeeinrichtungen, nachfolgend in allgemeiner Form eines Stop loss-Modells behandelt.

Die nachstehende Figur zeigt, wie der Beitrag für die Teuerungsanpassung der Altersrenten, finanziert nach dem Rentenwertumlageverfahren, in Prozenten des versicherten Lohnes für eine beliebige Vorsorgeeinrichtung aussehen könnte, wenn *keine* weiteren Massnahmen der Solidarität oder der Reservebildung ergriffen werden.

Zu beachten ist, dass nicht nur infolge der wirtschaftlichen Unsicherheiten, sondern vor allem auch infolge von Bestandesschwankungen (insbesondere bei kleineren und mittleren Vorsorgeeinrichtungen) der Beitrag jedes vernünftige Mass übersteigen könnte, eine Obergrenze ist nicht gegeben.

#### Typusbild

Entwicklung des Beitrages für das Teuerungsrisiko für eine Vorsorgeeinrichtung, *ohne* Massnahmen der Solidarität oder der Reservebildung (2 Beispiele):



#### 1.4 Die untersuchten Modelle

Ausgangspunkt der nachfolgenden Untersuchungen ist das folgende Grundmodell:

Die Teuerung wird im Barwert finanziert, d. h. der Barwert der Rentenerhöhung ist bei jeder Teuerungsanpassung zu finanzieren. Diese Finanzierung erfolgt durch die Aktiven, wobei jede Vorsorgeeinrichtung bis zu einem bestimmten Prämienatz (z. B. in Prozent der versicherten Löhne der Aktiven) die Finanzierung selbst übernimmt. Falls die notwendige Finanzierung in einem bestimmten Jahr höher ist als die dafür bezahlten Beiträge, wird die Restfinanzierung durch einen Dritten übernommen (Staat, Rückversicherung, Pool). Dafür ist diesem Dritten eine entsprechende Rückversicherungsprämie zu bezahlen (Stop loss-Prämie).

Zu diesem Grundmodell müssen mehrere grundlegend unterschiedliche Varianten betrachtet werden, um die in Ziffer 1.1 genannten Fragen möglichst umfassend beantworten zu können.

Je nachdem, ob der Beitritt zu einem solchen Rückversicherungsvertrag obligatorisch ist oder nicht, ob dabei Reserven gebildet werden oder ob der Rückversicherer genaue Information hat über eine Vorsorgeeinrichtung, ergeben sich sehr unterschiedliche mathematische Modelle.

Im folgenden werden drei Modelle untersucht, die zu den genannten Fragen eine umfassende Antwort erlauben dürften:

#### *Modell 1 (Ziffer 2)*

Gesamtschweizerisches Obligatorium, keine Reservebildung.

#### *Modell 2 (Ziffer 3)*

Teuerungsausgleich auf Altersrenten freiwillig oder obligatorisch, Vertrag mit Reservebildung, ohne Information über eine Vorsorgeeinrichtung ausser über deren Aktivenanzahl.

#### *Modell 3 (Ziffer 4)*

Wie Modell 2, aber vollständige Information des Rückversicherers über eine Vorsorgeeinrichtung (geeignet für den überobligatorischen Bereich der beruflichen Vorsorge).

Die drei Modelle erfordern eine vollständig unterschiedliche mathematische Behandlung. Durch Gleichsetzung gewisser Parameter wird es jedoch möglich, numerische Resultate zu gleichen Fragestellungen zu erhalten und damit die verschiedenen Modelle zu vergleichen. Es zeigt sich dabei, dass die Resultate erstaunlich gut übereinstimmen (auf wenige Prozente genau).

### *1.5 Einige wichtige Resultate zur Gesamtentwicklung*

Neben den Auswirkungen der verschiedenen Schwankungen interessieren natürlich auch die globalen Entwicklungen "im Durchschnitt", also unter

Zugrundelegung deterministischer Grössen. Gefragt wird in diesem Falle nach dem Beitrag für die Teuerungsanpassung laufender Altersrenten unter der Annahme bestimmter Werte für die Teuerung, die Lohnentwicklung und den Zins einerseits, für die gesamtschweizerische durchschnittliche Änderung des Rentnerverhältnisses andererseits.

Diese Fragen lassen sich als einfache Grenzfälle der in den Ziffern 2, 3 und 4 beschriebenen Modelle betrachten, indem die entsprechenden Schwankungen Null gesetzt werden. In Ziffer 5.1 sind einige grundlegende Resultate angegeben, um die allgemeinen Tendenzen und Grössenordnungen im gesamtschweizerischen Durchschnitt aufzuzeigen.

## **2 Gesamtschweizerische Lösung (Obligatorische Exzendentenversicherung; ohne Reservebildung)**

### *2.1 Modell-Beschreibung*

Es wird zunächst angenommen, dass nicht nur eine ganz bestimmte Vorsorgeeinrichtung einen solchen Rückversicherungsvertrag im Sinne des einleitend beschriebenen Grundmodells abschliesst, sondern die Gesamtheit aller Vorsorgeeinrichtungen der Grösse  $n$ . Da  $n$  beliebig ist, kann daraus sofort auch das Modell berechnet werden, bei welchem sämtliche Vorsorgeeinrichtungen eines Landes einen solchen Rückversicherungsvertrag abschliessen.

Das bereits einleitend beschriebene Grundmodell sei dabei wie folgt präzisiert:

- Jede Vorsorgeeinrichtung erhebt von den Aktiven den im voraus für alle Vorsorgeeinrichtungen bestimmten Beitrag  $b$  zur ganzen oder teilweisen Finanzierung der Kosten, welche durch die Indexierung der laufenden Altersrenten nach dem Rentenwertumlageverfahren entstehen.  $b$  kann lohnprozentual oder in anderer Weise definiert sein, ist aber für alle Vorsorgeeinrichtungen in gleicher Weise festgelegt.
- Der Rückversicherer (Staat, Versicherungsgesellschaft, Pool) zahlt einen allfälligen Überschaden, d. h. die Differenz aus den Ausgaben eines Jahres (für den Einkauf der teuerungsbedingten Erhöhung der Altersrenten im Barwert) und den Einnahmen aus den Beiträgen  $b$  der Aktiven.
- Es besteht keine Reservebildungspflicht im Rahmen des Rückversicherungsabkommens.
- Über die Dauer des Vertrages wird an sich nichts ausgesagt. Zur Berechnung der Rückversicherungsprämie (Stop loss-Prämie) wird zunächst von einem einjährigen Vertrag ausgegangen.

## 2.2 Das mathematische Modell

### 2.2.1 Gegebene Grössen

Da eine Vielzahl von Vorsorgeeinrichtungen (der Grösse  $n$ ) ohne spezielle Information über die einzelne Vorsorgeeinrichtung betrachtet wird, sind die folgenden Durchschnitts- und Gesamtwerte als gegeben angenommen.

#### a) Bestandesgrössen

$m_n$  Anzahl der Vorsorgeeinrichtungen der Grösse  $n$

$r_n$  Totale Zahl aller Rentner in allen Vorsorgeeinrichtungen der Grösse  $n$

Aus diesen beiden Werten lässt sich das Rentnerverhältnis  $r_n^*$  in den Vorsorgeeinrichtungen der Grösse  $n$  bestimmen, also das Verhältnis der Zahl der Rentner zur Zahl der Aktiven. Es gilt:

$$r_n^* = \frac{r_n}{n \cdot m_n}$$

Es könnte auch umgekehrt  $r_n^*$  gegeben sein und daraus  $r_n$  bestimmt werden.

#### Bemerkung:

Das Verhältnis  $r_n^*$  kann für verschiedene  $n$  verschieden sein. Da in der Praxis aber weder  $r_n$  noch  $r_n^*$  bekannt sein dürften, wird man bei konkreten Rechnungen wohl  $r_n^*$  durch das allgemeine, für die Gesamtheit der Bevölkerung geltende und bekannte Rentnerverhältnis  $r^*$  annähern müssen. Für die Herleitung der interessierenden Verteilung ist aber die Annahme, dass  $r_n^*$  für alle  $n$  gleich sei, nicht notwendig.

#### b) Finanzielle Grössen

$\kappa$  Rentenanpassungsrate eines bestimmten Jahres (z. B. entsprechend der Teuerungsrate)

$\bar{g}$  Durchschnittliches Gehalt der Aktiven

$\bar{c}$  Durchschnittlicher Betrag der laufenden Renten

$\bar{a}$  Durchschnittlicher Barwert der laufenden Raten

### 2.2.2 Gesuchte Grössen

#### Gesucht wird:

- a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Rentnerzahl  $R$  in einer beliebig herausgegriffenen Vorsorgeeinrichtung der Grösse  $n$  (Ziffer 2.3).

- b) Die Stop loss-Prämie  $\pi(n)$ , welche jede Vorsorgeeinrichtung der Grösse  $n$  an einen Rückversicherer bei Abschluss des oben beschriebenen Vertrags zahlen muss (Ziffer 2.4).

### 2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung der Rentnerzahl $R$ in einer Vorsorgeeinrichtung der Grösse $n$

Um zur gesuchten Verteilung der Zufallsvariablen  $R$  zu gelangen, kann von der Annahme ausgegangen werden, dass die Gesamtzahl der vorhandenen Rentner in allen Vorsorgeeinrichtungen der Grösse  $n$ ,  $r_n$ , beliebig auf die dafür "zur Verfügung stehenden" Vorsorgeeinrichtungen der Grösse  $n$  (Anzahl  $m_n$ ) verteilt werden. Wichtig ist dabei die Voraussetzung der "beliebigen" Verteilung, d. h. die Verteilungsfunktion der Rentnerzahl ist für jede Kasse gleich.

Die beschriebenen Annahmen führen unmittelbar zur Binomialverteilung:

$$p(R = k) = \binom{r_n}{k} \left(\frac{1}{m_n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m_n}\right)^{r_n - k}$$

In praktischen Berechnungen sind nun stets folgende Voraussetzungen erfüllt:

$$\begin{array}{ll} r_n & \text{ist gross;} \\ \frac{r_n}{m_n} = n \cdot r_n^* = \lambda & \text{ist für jedes gegebene } n \text{ konstant (bei wachsendem} \\ & \text{\(} r_n \text{ und } m_n \text{ für } n \text{ wachsend)} \end{array}$$

Setzt man  $r_n/m_n = \lambda$  und  $r_n \rightarrow \infty$ , dann gilt

$$\binom{r_n}{k} \left(\frac{1}{m_n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m_n}\right)^{r_n - k} \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Es zeigt sich denn auch sofort, dass für alle praktisch interessierenden Werte von  $m_n$  bzw.  $r_n$  die Annäherung gegen die Poisson-Verteilung sehr gut ist, so dass auch geschrieben werden kann

$$p(R = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; \quad \text{mit } \lambda = \frac{r_n}{m_n} = n \cdot r_n^*$$

Das heisst, es gilt der

**Satz:** Die Rentnerzahl  $R$  in einer Vorsorgeeinrichtung der Grösse  $n$  ( $n$  beliebig) ist näherungsweise Poisson-verteilt mit

$$\lambda = n \cdot r_n^*,$$

wobei  $r_n^*$  das durchschnittliche Rentnerverhältnis aller Vorsorgeeinrichtungen der Grösse  $n$  darstellt (vermutlich  $\approx r^*$ , also dem Rentnerverhältnis im Landesmittel)<sup>3</sup>.

#### 2.4 Stop loss-Prämie bei Annahme einer deterministisch gegebenen Rentenanpassungsrate $\kappa$

Wählen wir als Ausgangspunkt für die Berechnung der Stop loss-Prämie das Varianz- oder Streuungsprinzip, dann benötigen wir die beiden ersten Momente der Zufallsvariablen  $S(n)$ , wobei mit  $S(n)$  der Überschaden für eine Vorsorgeeinrichtung der Grösse  $n$  bezeichnet wird.

Mit dem im folgenden verwendeten Symbol  $[y]^+ = \max(y, 0)$  kann für  $S(n)$  geschrieben werden

$$S(n) = [k \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \kappa - n \cdot \bar{g} \cdot b]^+$$

Setzen wir ferner

$$d(n, k) = k \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \kappa - n \cdot \bar{g} \cdot b$$

und

$$Q(n) = \left[ \frac{n \cdot \bar{g} \cdot b}{\bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \kappa} \right]$$

wobei  $[x]$ : grösste ganze Zahl kleiner gleich  $x$ , dann folgt für die ersten beiden Momente

$$E[S(n)] = \sum_{k \geq Q(n)+1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} d(n, k)$$

$$E[S(n)^2] = \sum_{k \geq Q(n)+1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} d(n, k)^2$$

mit  $\lambda = r_n^* \cdot n$ .

Mit  $\text{Var}[S(n)] = E[S(n)^2] - (E[S(n)])^2$  ist damit die Stop loss-Prämie beispielsweise nach dem Varianzprinzip nach Wahl eines geeigneten  $\alpha$  gegeben.

<sup>3</sup> Es kann gezeigt werden, dass sich die hier gefundene Poisson-Verteilung als Grenzfall einer viel allgemeineren Verteilung ergibt.

Bezeichnet man mit  $\pi_E(n)$  die Stop loss-Prämie in Geldeinheiten, mit  $\pi(n)$  die Stop loss-Prämie in Gehaltsprozent, dann gilt:

$$\pi_E(n) = E[S(n)] + \alpha \cdot \text{Var}[S(n)]$$

und

$$\pi(n) = \frac{\pi_E(n)}{n \cdot \bar{g}}$$

Aus  $\pi_E(n)$  lässt sich sofort die durchschnittliche Stop loss-Prämie  $\pi$  (in Gehaltsprozent) für alle Vorsorgeeinrichtungen, also für alle  $n$ , bestimmen. Diese gehaltsprozentuale Stop loss-Prämie würde etwa erhoben bei einem allgemeinen Obligatorium eines entsprechenden Rückversicherungsabkommens zur Indexierung laufender Altersrenten für alle Vorsorgeeinrichtungen. Es gilt:

$$\pi = \frac{100 \cdot \sum_n m_n \cdot \pi_E(n)}{\bar{g} \cdot \sum_n m_n \cdot n}$$

Einige numerische Resultate und Bemerkungen zu diesem Modell sind in Ziffer 5.2 enthalten.

### **3 Fakultative Rückversicherung, unter Einbezug einer Reservebildung**

#### *3.1 Modell-Beschreibung*

##### *3.1.1 Verallgemeinerte Annahmen*

Es sollen nun die in Ziffer 2 gemachten Einschränkungen fallengelassen werden. Zunächst sei die Stop loss-Rückversicherung der Teuerungsanpassungskosten laufender Altersrenten nicht mehr obligatorisch. Ein Rückversicherungsvertrag soll also mit einer einzelnen Vorsorgeeinrichtung abgeschlossen werden können, ohne Berücksichtigung anderer Vorsorgeeinrichtungen oder der Gesamtheit aller Vorsorgeeinrichtungen. Da zunächst der allgemeine Fall behandelt werden soll, ist davon auszugehen, dass über die betrachtete Vorsorgeeinrichtung lediglich deren Grösse bekannt ist, nicht jedoch Einzelheiten über deren Bestandesstruktur.

Als wesentliche Erweiterung wird nun zudem die Reservebildung einbezogen. Falls demnach in einem bestimmten Jahr  $t$  die Kosten für die Teuerungsanpassung geringer sind als die dafür vorgesehenen Einnahmen, wird die Differenz



einer speziellen Reserve zugewiesen. Wenn umgekehrt in einem Jahr die Kosten höher sind als die Einnahmen, so ist zunächst die Differenz soweit als möglich der bis dahin gebildeten Reserve zu entnehmen. Erst wenn die Reserve aufgebraucht ist, wird die verbleibende Differenz durch den Rückversicherer bezahlt.

Eine zusätzliche Komplikation ergibt sich dadurch, dass nun getrennte Bestände für Männer, Frauen und Witwen betrachtet werden.

### 3.1.2 Bemerkungen zum Vorgehen

Wie noch näher beschrieben wird, treten nun komplizierte stochastische Prozesse auf. Es dürfte im allgemeinen nicht mehr möglich sein, eine geschlossene analytische Darstellung der verwendeten Verteilungsfunktionen zu finden. Wie sich zeigen wird, handelt es sich bei den zu untersuchenden stochastischen Prozessen entweder um Markoff-Prozesse oder doch um Prozesse, die auf Markoff-Prozesse zurückgeführt werden können. Da wir zudem stets von diskreten Zufallsvariablen ausgehen, ergeben sich Markoff-Ketten. Diese können in der Darstellungsweise der linearen Algebra erfasst werden; die numerische Berechnung erfolgt durch Computer-Simulation mit Hilfe von Pseudo-Zufallszahlen.

Im Unterschied zur klassischen Risikotheorie interessiert hier weniger eine Verteilungsfunktion für den Gesamtschaden eines Jahres, als vielmehr die Betrachtung des stochastischen Prozesses über mehrere Jahre. Diese Betrachtung ist deswegen wesentlich komplizierter als im klassischen Fall, weil hier von Jahr zu Jahr nicht mehr unabhängige Zuwächse vorliegen. Dagegen wird nun entscheidend Gebrauch gemacht von der (z. T. "mehrdimensionalen") Markoff-Eigenschaft der auftretenden stochastischen Prozesse.

### 3.2 Begriffe und einige grundsätzliche Zusammenhänge

Bei den nachstehend definierten Beständen wird ein oberer Index  $l$  zur Unterscheidung von Männern und Frauen eingeführt ( $l = 1$ : Männer,  $l = 2$ : Frauen). Die genauen Herleitungen zur Berechnung der Stop loss-Prämien des genannten Rückversicherungsvertrages finden sich im Anhang 1. Dazu werden speziell auch weitere Bestände (Witwen) sowie die notwendigen finanziellen Begriffe definiert.

A. *Aktive* (keine Zufallsvariablen)

$n_t^l$  Anzahl Aktive am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres;  $l = 1, 2$

B. *Rentner mit "eigenem" Anspruch* (Zufallsvariablen)

$R_t^l$  Anzahl Altersrentner am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres;  $l = 1, 2$

$(\Delta R_t^l)^+$  Anzahl Personen, die während des  $(t + 1)$ -ten Jahres pensioniert werden (= Anzahl Neurentner am Anfang des  $(t + 2)$ -ten Jahres);  
 $l = 1, 2$

$(\Delta R_t^l)^-$  Anzahl Todesfälle im Bestand der Altersrentner im  $(t + 1)$ -ten Jahr;  
 $l = 1, 2$

Die Zufallsvariable  $R_t^l$  erfüllt dann die Rekursionsgleichung

$$R_{t+1}^l = R_t^l + (\Delta R_t^l)^+ - (\Delta R_t^l)^-, \quad l = 1, 2$$

Zur Gewinnung einer grösseren Allgemeinheit gehen wir nun ausserdem von einer Wartefrist bis zum Anspruch auf Teuerungsanpassung aus. Als Wartefrist wird ein Jahr gewählt (eine mehrjährige Wartefrist wäre ohne grosse Komplikation ebenfalls erfassbar).

Wir definieren daher:

$\widehat{R}_t^l$  Anzahl Altersrentner am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres, die Anspruch auf Teuerungsanpassung haben;  $l = 1, 2$

Für  $\widehat{R}_t^l$  ergeben sich daher folgende Rekursionsgleichungen:

$$\widehat{R}_{t+1}^l = R_t^l - (\Delta R_t^l)^-, \quad l = 1, 2$$

Gemäss klassischen "Kugelmodellen" gehen wir von der Annahme der Binomialverteilung für  $(\Delta R_t^l)^+$ ,  $(\Delta R_t^l)^-$  aus, mit den Grundwahrscheinlichkeiten  $p^l, \bar{q}^l$ , d. h.

$$P((\Delta R_t^l)^+ = k | n_t^l) = \binom{n_t^l}{k} (p^l)^k (1 - p^l)^{n_t^l - k}$$

$$P((\Delta R_t^l)^- = k | R_t^l) = \binom{R_t^l}{k} (\bar{q}^l)^k (1 - \bar{q}^l)^{R_t^l - k}$$

$p$  stellt dabei die 1jährige Pensionierungswahrscheinlichkeit eines Aktiven (mit nicht bekanntem Alter) und  $\bar{q}$  die mittlere 1jährige Sterbewahrscheinlichkeit der Rentner dar.

*Bemerkung:*

- 1 Die Binomialverteilung dürfte der Realität sehr nahe kommen. Die Annäherung durch die Poisson-Verteilung zur Vereinfachung des Formel-Apparates ist hier nicht notwendig, da wegen der sehr grossen Komplexität eine analytische geschlossene Darstellung wohl kaum möglich ist. Für die numerische Berechnung ist aber die exaktere Binomialverteilung ebenso geeignet wie die Poisson-Verteilung.
- 2 Bei der näheren Analyse zeigt sich, dass  $R_t^l$  Markoffprozesse bilden, während dies bei  $\widehat{R}_t^l$  nicht mehr der Fall ist (vgl. nachfolgend, Ziffer 3.3).

### 3.3 Allgemeine Darstellung der Entwicklung der Rentnerbestände

#### 3.3.1 Die stochastischen Prozesse der Rentnerbestände $\{R_t^l\}$ als Markoff-Ketten

Zunächst sei an die folgende allgemeine Definition erinnert: Gegeben sei der Zufallsprozess

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_t, \dots \quad t \in \mathbb{N}_0$$

Ein solcher Prozess heisst Markoff-Prozess, wenn gilt

$$P(\Phi_{t+1} \leq \eta | \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_t = \xi) = F(\xi, \eta, t)$$

$F(\xi, \eta, t)$  heisst Übergangsfunktion des Markoff-Prozesses. Im diskreten Fall spricht man von Übergangswahrscheinlichkeit.

$$P(\Phi_{t+1} = \eta | \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_t = \xi) = p(\xi, \eta, t)$$

Durch Numerierung der möglichen Zustände (endlich oder abzählbar unendlich viele) kann die Schreibweise der linearen Algebra verwendet werden:

$p_{\mu\nu}(t)$  sei die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Zeitpunkt  $t$  im Zustand  $\nu$  befindet, vorausgesetzt, dass es im Zeitpunkt  $t - 1$  im Zustand  $\mu$  war.

Der Ausdruck  $p(\xi, \eta, t)$  kann nun durch  $p_{\mu\nu}(t)$  ersetzt werden.

Durch schematische Anordnung aller Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{\mu\nu}(t)$  ergibt sich die Übergangsmatrix  $P(t)$

$$\left( P(t) \right)_{\mu\nu} = \{ p_{\mu\nu}(t) \}$$

des Markoff-Prozesses, der im Falle, dass höchstens abzählbar unendlich viele Zustände angenommen werden können, als Markoff-Kette bezeichnet wird. Die Übergangsmatrix ist demnach so definiert, dass das Element in der  $\mu$ -ten Zeile und  $\nu$ -ten Spalte  $p_{\mu\nu}(t)$  ist.

Als Beispiele für Markoff-Ketten seien nun die Zufallsprozesse  $R_t^l$  betrachtet,  $l = 1, 2$ , also die Zahl der Rentner(innen) im Zeitpunkt  $t$ , d. h. am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres).

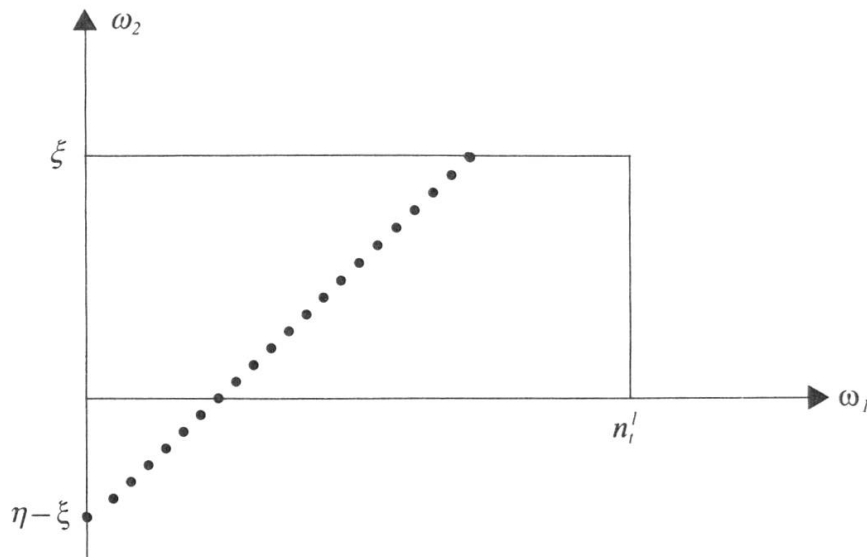
Für die stochastischen Prozesse  $R_t^l$ ,  $l = 1, 2$  gilt nach Ziffer 3.2:

$$\begin{aligned} p\left(R_{t+1}^l = \eta \mid R_t^l = \xi\right) \\ = \sum_{\Omega} p\left((\Delta R_t^l)^+ = \omega_1 \mid n_t^l\right) \cdot p\left((\Delta R_t^l)^- = \omega_2 \mid R_t^l = \xi\right) \end{aligned}$$

mit

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{N}_0, \omega_1 - \omega_2 = \eta - \xi, \omega_1 \leq n_t^l, \omega_2 \leq \xi\}$$

Grafische Darstellung der Menge  $\Omega$ :



Numeriert man nun entsprechend der obenstehenden Darstellung die möglichen Zustände und setzt für die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{\mu\nu}(t)$ , dann sind damit für jedes  $t$  die Übergangsmatrizen  $P(t)$  definiert.

Mit wachsendem  $t$  wächst auch die Dimension dieser Matrizen, da immer mehr Zustände möglich sind. Um die folgende Schreibweise zu vereinfachen, werden die oben definierten Matrizen  $P(t)$  durch Ergänzung von Nullen auf die grösste vorkommende Dimension gebracht (die von  $t$  und  $n_t^l$  abhängt). Nach der Gleichung von Chapman-Kolmogorov für Markoff-Ketten gilt nun für die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten für beliebige Zeitintervalle  $t$  ( $t \in \mathbb{N}_0$ ):

- falls die Übergangswahrscheinlichkeiten von der Zeit  $t'$  unabhängig sind (homogene Markoff-Ketten):

$$p\left(R_t^l = \nu \mid R_0^l = \mu\right) = \left(P^t\right)_{\mu\nu}$$

- falls die Übergangswahrscheinlichkeiten von der Zeit  $t'$  abhängen (inhomogene Markoff-Ketten):

$$p\left(R_t^l = \nu \mid R_0^l = \mu\right) = \left(P(1) \cdot P(2) \cdot \dots \cdot P(t-1)\right)_{\mu\nu}$$

Damit kann die Verteilung der Zufallsgrössen  $R_t^l$  für jeden Zeitpunkt ( $t \in \mathbb{N}_0$ ) berechnet werden.

### 3.3.2 Die stochastischen Prozesse der Rentnerbestände $\{\widehat{R}_t^l\}$ und $\{W_t\}$ als mehrdimensionale Markoff-Ketten

Im Gegensatz zu  $\{R_t^l\}$  sind die stochastischen Prozesse  $\{\widehat{R}_t^l\}$ , die uns im folgenden vor allem interessieren, keine Markoff-Ketten.<sup>4</sup>

Dies ergibt sich aus den Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{t+1}^l &= R_t^l - (\Delta R_t^l)^- \\ &= \widehat{R}_t^l - (\Delta R_t^l)^- + (\Delta R_{t-1}^l)^+\end{aligned}$$

Die Verteilung von  $\widehat{R}_{t+1}^l$  hängt also nicht nur von  $\widehat{R}_t^l$  ab, sondern auch von Grössen im Zeitpunkt  $t-1$  oder von einer weiteren Zufallsvariablen im Zeitpunkt  $t$ .

<sup>4</sup> Dasselbe gilt für die im Anhang 1 definierten Witwenbestände  $\{W_t\}$  sowie die speziell interessierenden stochastischen Prozesse wirtschaftlicher Grössen, wie insbesondere der Reserve  $\{Y_t\}$  und des Überschadens  $\{S_t\}$  (vgl. Anhang 1).

Betrachten wir jedoch nicht mehr eine einzelne Zufallsvariable im Zeitpunkt  $t$ , sondern ein Paar von Zufallsvariablen (bzw. im allgemeinen Fall ein  $n$ -Tupel), dann kann wiederum die Darstellungsweise der Markoff-Ketten verwendet werden, da das Wertepaar (der Vektor)

$$\underline{V}_t^l = \left( R_t^l, \widehat{R}_t^l \right)$$

eine Markoff-Kette bildet. Im Gegensatz zu  $\widehat{R}_t^l$  allein gilt für den Vektor  $\underline{V}_t^l$ , dessen Komponenten zwei Zufallsvariablen sind, dass die Verteilung im Zeitpunkt  $t$  nur von der Verteilung derselben Grösse im Zeitpunkt  $t - 1$ , also  $\underline{V}_{t-1}^l$  abhängt. (Zur Frage der partiellen Ordnung vgl. Anhang 1.)

Analoge Überlegungen gelten für den stochastischen Prozess  $\{W_t\}$ .

Zur Unterscheidung vom einfacheren Fall der Markoff-Ketten, wie sie in Ziffer 3.3.1 auftreten, wird im Anhang 1 der Begriff der "mehrdimensionalen" Markoff-Kette verwendet, falls die Elemente des stochastischen Prozesses  $n$ -Tupel bzw. Vektoren sind, deren Komponenten Zufallsvariablen sind.

Der Begriff der "mehrdimensionalen" Markoff-Ketten wird dabei wegen der besseren Anschaulichkeit verwendet. Damit soll nicht gesagt werden, dass es sich um eine grundsätzlich andere Form von stochastischen Prozessen handelt. Vielmehr wird noch kurz ausgeführt, dass solche mehrdimensionale Markoff-Ketten sich stets als "eindimensionale" Markoff-Ketten darstellen lassen.

Die mathematische Behandlung der auftretenden Markoff-Ketten wird in Anhang 1 erläutert. Numerische Ergebnisse und Bemerkungen zu diesem Modell finden sich in Ziffer 5.

### 3.4 Zum Problem der selbständigen Tragung des Teuerungsrisikos

Man kann sich nun ferner die Frage stellen, ab welcher Grösse eine Vorsorgeeinrichtung das Teuerungsrisiko selbst tragen kann.

Zur Beantwortung wäre es denkbar, sowohl wirtschaftliche als auch demografische Parameter dynamisch zu betrachten und die Varianz der auftretenden Verteilungen zu benützen. Abgesehen davon, dass dieses Verfahren recht kompliziert sein dürfte, hat es auch den Nachteil, dass die Schwankungen der Aktivenbestände als rein aleatorisch betrachtet werden.

Im Gegensatz zu den Rentnerbeständen dürften jedoch diese Schwankungen ein viel grösseres Element nicht rein zufallsbedingter Ursachen aufweisen. Es scheint deshalb wohl unerlässlich, weitere Überlegungen auf statistische Angaben über die effektiv erfolgten Veränderungen (insbesondere "Schrumpfungen") von Aktivenbeständen abzustellen. Solche Statistiken sind zwar nicht

veröffentlicht, könnten aber nach Angaben des Bundesamtes für Statistik erstellt werden.

Die Beitragsentwicklung für einen schrumpfenden Aktivenbestand kann nach dem in dieser Ziffer beschriebenen Modell ohne weiteres berechnet werden, wie dies beispielsweise auch den numerischen Werten der Ziffer 5.1.3 zugrundeliegt (Beitragsentwicklung über längere Zeit unter Zugrundelegung der Änderung des Rentnerverhältnisses).

Nachstehend sei kurz skizziert, wie die Frage der selbständigen Tragung des Teuerungsrisikos mit Hilfe einer Statistik über die Bestandesentwicklungen der Aktiven beantwortet werden kann. Es handelt sich dabei um eine "wenn- dann-Aussage": wenn ähnliche wirtschaftliche Zustände herrschen wie diejenigen gemäss zugrundegelegtem Szenario und Bestandesstatistik, dann ist mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $\tilde{p}$  (z. B. 0,99; 0,999) ein vorgegebener Beitrag  $b_{\max}$  genügend, falls  $n \geq \tilde{n}$ . Gesucht ist  $\tilde{n}$  in Abhängigkeit von  $\tilde{p}$ .

*Vorgehen:*

- *Zunächst wird der Prozentsatz  $z$  bestimmt ( $0 \leq z \leq 1$ ), auf welchen ein ursprünglicher Aktivenbestand sinken darf, damit bei einem vorgegebenen wirtschaftlichen Szenario gerade das ebenfalls vorgegebene  $b_{\max}$  erreicht wird.*
- *Aufgrund der Statistik der Aktivenbestandesänderungen wird die relative Häufigkeit  $p$  bestimmt, mit welcher ein Unternehmen, das anfänglich  $n$  Aktive zählte, in der vorgegebenen Periode  $(0, t)$ , unter den Wert  $z \cdot n$  sank.*
- *Daraus ergibt sich  $\tilde{n}$ , nämlich als kleinste Zahl  $n$ , welche die Gleichung*

$$p(n) \leq 1 - \tilde{p}$$

*erfüllt.*

Selbstverständlich sind auch differenziertere Untersuchungen unter weitergehender Verwendung von Modell 2 (Ziffer 3) denkbar, insbesondere mit Berücksichtigung einer Reserve.

### 3.5 "Umschlagen" vom Rentenwertumlageverfahren (RUV) ins Ausgabenumlageverfahren (AUV)

In wirtschaftlichen Ausnahmejahren oder Ausnahmepperioden sind bei Finanzierung gemäss Rentenwertumlageverfahren Beitragsausschläge nach oben



durchaus möglich. Zur Bewältigung solcher Spitzenbelastungen sind im Prinzip zwei Möglichkeiten denkbar:

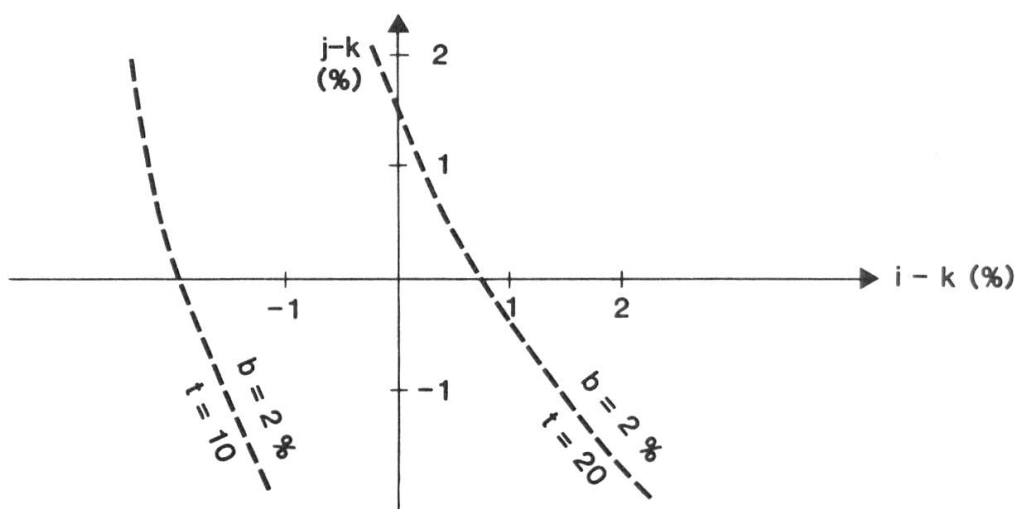
- Verzicht auf vollen Teuerungsausgleich in solchen Jahren;
- Zeitliche Verschiebung der Finanzierung, d. h. teilweiser Übergang auf das AUV. (Die praktische Durchführung dürfte recht kompliziert sein; dies stellt aber die wohl weitestgehende Möglichkeit eines vollen Teuerungsausgleichs dar.)

In beiden Fällen muss genau definiert werden (und zwar bereits vor Eintritt eines solchen Ereignisses), unter welchen Bedingungen und in welchem Ausmass ein solches Abweichen vom RUV erfolgt.

Als objektives Kriterium könnte vom durchschnittlichen Beitragssatz  $b$  ausgegangen werden. Eine weitere Möglichkeit, die hier nur angedeutet werden kann, wäre ein Kriterium nach eigentlichen wirtschaftlichen Grössen. Nach den Resultaten von Ziffer 5.1 eignen sich dabei am ehesten die Grössen  $i - k$  (Realzins) und  $j - k$  (Relallohnerhöhung).

Der Zusammenhang zwischen einem bestimmten, vorgegebenen Beitragssatz  $b$  (in einem ebenfalls bestimmten Zeitpunkt  $t$ ) mit den wirtschaftlichen Grössen  $i - k$  und  $j - k$  kann anhand einer hier nur schematisch gezeigten Grafik deutlich gemacht werden. In einem  $(i - k)/(j - k)$ -Diagramm kann festgestellt werden, welchen Punkten für ein festes  $t$  der gleiche Beitragssatz  $b$  entspricht (z. B. nach der in dieser Ziffer dargelegten Berechnungsweise). Es entstehen damit für ein gegebenes  $b$  Niveaulinien, die von  $t$  (und evtl. von der Anfangs-Reserve) abhängen, etwa wie folgt:

**Niveaulinien für einen gegebenen Beitragssatz  $b$ :**



Aufgrund dieser Niveaulinien eines vorgegebenen Beitragssatzes  $b$  wird es möglich, als Kriterium zum Abweichen vom RUV bzw. als Kriterium, unter welchen Umständen und in welchem Ausmass Spitzenrisiken vorliegen, eigentliche wirtschaftliche Grössen zu verwenden.

#### **4 Allgemeine Exzedenten-Rückversicherung für die Teuerungsanpassung laufender Altersrenten bei weitgehender Information über eine Vorsorgeeinrichtung**

##### *4.1 Einleitung*

In den Ziffern 2 und 3 wurden Fragen behandelt bezüglich Vorsorgeeinrichtungen, deren einziges Kennzeichen die Aktivenzahl  $n_t$  sowie die anfängliche Rentnerzahl  $R_0$  war. Im letzten Teil (Kapitel 3) wurde, als allgemeinsten Fall, die Stop loss-Prämie unter sehr allgemeinen Bedingungen und auch unter Einbezug einer Risikoreserve berechnet.

Diese Untersuchungen erlauben es, Fragen nach der Durchführbarkeit und speziell den Kosten entsprechender fakultativer oder obligatorisch vorgeschriebener Verträge im allgemeinen zu beantworten. Eine genauere Kenntnis der betrachteten Vorsorgeeinrichtungen war dabei nicht nur unnötig, sondern durfte wegen der gesuchten Allgemeinheit auch gar nicht vorgegeben werden.

Eine ganz andere Frage ist diejenige nach der Stop loss-Prämie (bzw. anderen interessierenden Grössen zur Festlegung eines entsprechenden Vertrags), wenn nicht eine durchschnittliche, sondern eine ganz bestimmte Vorsorgeeinrichtung durch einen Exzedenten-Rückversicherungsvertrag vor Überschäden bei der Teuerungsanpassung laufender Altersrenten geschützt werden soll. Von dieser Vorsorgeeinrichtung seien beispielsweise nicht nur die Anzahl der Aktiven, sondern auch deren Alter, Geschlecht, versichertes Gehalt und anwartschaftliche Altersrente bekannt, ferner auch die Zahl der bereits vorhandenen Rentner inklusive deren Alter, Geschlecht und Rentenhöhe.

Dies ist auch die Fragestellung, für die sich eine Versicherungsgesellschaft im konkreten Einzelfall interessieren würde, unabhängig von gesetzlichen Vorschriften über den Teuerungsausgleich.

Im vorliegenden Kapitel 4 soll diese Frage näher untersucht werden. Dabei sei bereits vorweggenommen, dass das zu verwendende Modell in gewissem Sinne neu und verschieden von Modellen der klassischen Risikotheorie ist. Dies insbesondere aus zwei Gründen:

- 1 Es interessiert weniger der Schadenverlauf eines bestimmten Jahres bzw. die Summation einzelner Jahres-Gesamtschäden über mehrere Jahre. Bei

diesem klassischen Vorgehen ist eine ganz entscheidende Voraussetzung die Unabhängigkeit der Gesamtschadenhöhe eines Jahres von derjenigen der Vorjahre. Bei der vorliegenden Fragestellung interessiert dagegen die Abwicklung über mehrere Jahre (bzw. Perioden), wobei der Verlauf eines Jahres keineswegs unabhängig vom Verlauf des Vorjahres ist.

- 2 Infolge der Berücksichtigung eines Reserveverlaufs ist es naheliegend, auch negative Risikosummen zuzulassen (im Gegensatz zum üblichen Vorgehen, bei welchem negative Risikosummen Null gesetzt werden).

Für die wichtigsten vorkommenden wirtschaftlichen Grössen, nämlich Teuerungssatz und Zins (bzw. Zinsgewinn), werden deterministische Funktionen der Zeit zugrundegelegt, wobei eine Vielzahl von Beispielen aus der Vergangenheit herangezogen werden (vgl. als Beispiel Ziffer 5.3.2).

Demgegenüber erscheint die Suche nach einer Verteilungsfunktion dieser Grössen als wenig sinnvoll. Wollte man die Teuerungsrate und den Zins als Zufallsvariable mit bekannter Verteilung auffassen, wäre für die hier interessierende Fragestellung ein weiteres mathematisches Modell zu erarbeiten, da dann die Einzelschadenhöhen (pro Person) nicht mehr unabhängige Zufallsvariablen darstellten (im Gegensatz zu den Ziffern 2 und 3, wo die Annahme der Teuerungsrate und des Zinses als Zufallsvariable innerhalb des gleichen Modells behandelt werden kann).

Schliesslich sei darauf hingewiesen, dass der hier verwendete allgemeine Ansatz es auch erlauben dürfte, weitere risikothoretische Untersuchungen durchzuführen, die unabhängig von der Frage des Teuerungsausgleichs sind. Dabei sei insbesondere eine allgemeine stochastische Betrachtung des Altersrisikos genannt, die, möglicherweise gerade wegen der dabei auftretenden Abhängigkeit der Gesamtschaden-Zufallsvariablen, bisher in der Literatur erstaunlich wenig Beachtung fand.

#### 4.2 Individuelles und kollektives Modell

Nach der üblichen Vorgehensweise wird in der nachfolgenden Ziffer 4.3 das kollektive aus dem individuellen Modell entwickelt (vgl. dazu etwa auch *Beard et al.* [1], *Bühlmann* [2], *Gerber* [4], oder als Anwendungsbeispiel für diese Methoden *Held* [5]).

In Stichworten:

Beim kollektiven Modell werden zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen angenommen, nämlich die Verteilungen der Schadenanzahl und der Schadenhöhe. Zur Gewährleistung der Vereinbarkeit mit dem individuellen Modell werden

die Annahmen gemacht, dass die erwartete Schadenzahl und die erwartete Gesamtschadensumme des kollektiven Modells den entsprechenden Grössen des individuellen Modells entspricht.

Zur Vereinfachung der Darstellung wird die Heaviside-Funktion verwendet:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

### 4.3 Konstruktion des kollektiven Modells im hier betrachteten Zusammenhang

Entsprechend dem Vorgehen, wie es in Ziffer 4.2 für den allgemeinen Fall erwähnt wurde, soll nun das kollektive Modell für die hier auftretenden Probleme konstruiert werden. Dabei ist zu beachten, dass der wesentliche Unterschied zu den sonst in der Literatur beschriebenen "klassischen" Modellen der Risikotheorie darin besteht, dass hier der Risikoverlauf über mehrere Perioden betrachtet wird, wobei die in den einzelnen Perioden auftretenden Grössen keineswegs unabhängig voneinander sind; d. h. bezeichnet  $U_t$  eine Zufallsvariable in der Periode  $t$ ,  $U_{t+1}$  die entsprechende Zufallsvariable in der Periode  $t + 1$ , dann sind  $U_t$  und  $U_{t+1}$  nicht mehr unabhängig. Ganz im Gegenteil sind etwa die Überschäden (aber auch andere Grössen) verschiedener Perioden eng miteinander korreliert. Eine solche Korrelation gilt noch verstärkt durch den Einbezug einer über die ganze Dauer fortgeschriebenen Risikoreserve (die auch Null sein kann).

Infolge der mehrjährigen Betrachtungsweise treten teilweise kompliziertere Kombinationen von Grundwahrscheinlichkeiten auf. Im Interesse einer leichteren Lesbarkeit werden solche Zusammenhänge im Anhang 2 hergeleitet.

#### 4.3.1 Das individuelle Modell

1. Der einzelne Schaden, der durch den Versicherten  $j$  am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres verursacht wird, sei wie folgt definiert (wobei im Gegensatz zu den früheren Kapiteln hier der Zeitparameter als Argument und nicht als Index erscheint, da der Index für die Numerierung der Personen reserviert ist). Seien

$X_j(t)$  Kosten der Teuerungsanpassung (für  $j$ ) am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres

$Z_j(t)$  Zinsgewinn bezogen auf  $j$  während des  $t$ -ten Jahres

Als Schaden wird nun  $X_j(t) - Z_j(t)$  gesetzt.

*Bemerkung:*

Der Abzug des individuellen Zinsgewinnes von den Teuerungsanpassungskosten erfolgt aus Einfachheitsgründen.

2. Aufgrund dieser Definition sind die individuellen Schadenhöhenverteilungen für sämtliche Personen  $j$  festzulegen. Dies gilt für die gesamte betrachtete Zeit  $t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, t_{\max}$ . Diese mehrjährige Betrachtungsweise ist der Grund für die ausserordentliche Kompliziertheit dieser Verteilung, deren Herleitung im Anhang 2 durchgeführt wird. Die Verteilung wird wie folgt geschrieben:

$$p(X_j(t) - Z_j(t) < \xi)$$

*Bemerkungen*

a) Zur Berechnung der auftretenden Witwenrentenbarwerte wird die kollektive Methode verwendet.

b) Bei Betrachtung des Zeitpunktes  $t$  ( $t \geq 0$ ) treten drei Wahrscheinlichkeiten auf:

$p_j(t)$  Wahrscheinlichkeit, dass  $j$   $t$  Jahre nach Beginn (d. h. am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres) noch lebt;

$q_j^0(t)$  Wahrscheinlichkeit, dass  $j$  während des  $t$ -ten Jahres stirbt, ohne eine Witwe zu hinterlassen;

$q_j^w(t)$  Wahrscheinlichkeit, dass  $j$  während des  $t$ -ten Jahres stirbt und eine Witwe hinterlässt. (Für Frauen ist  $q_j^w(t) \equiv 0$ .)

Es gilt

$$p_j(0) = 1$$

und

$$p_j(t) + q_j^0(t) + q_j^w(t) = p_j(t - 1).$$

Ferner wird nach der kollektiven Methode zu jedem Altersrentner  $j$  für jedes Jahr  $t$  eine "theoretische Ehefrau"  $j_t$  definiert, so dass die anwartschaftliche Witwenrente von  $j$  ausgedrückt werden kann und, im Falle des Todes von  $j$ , die spätere laufende Witwenrente ab Schlussalter des (verstorbenen) Ehemannes.

Für die Berechnung der Schadenhöhenverteilung für die Person  $j$  im Zeitpunkt  $t$  ( $F_{j,t}(\xi)$ ) treten nun Kombinationen der drei obengenannten Grundwahrscheinlichkeiten sowie der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die "theoretische Witwe" für alle zurückliegenden Jahre  $t$  auf, was die Kompliziertheit der auftretenden Zusammenhänge erklärt (Anhang 2, Ziffer 6).

3. Zu bestimmen ist ferner die Wahrscheinlichkeit, dass am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres durch die Person  $j$  (bzw. durch dessen Witwe) überhaupt ein Schaden verursacht wird. Diese Wahrscheinlichkeit werde mit  $\tilde{q}_j(t)$  bezeichnet.

Sei  $s_j$  das Schlussalter (für jede Person eventuell verschieden) und  $x_j$  das Alter der Person  $j$  zu Beginn des Vertrags, dann folgt nach den in der vorangehenden Ziffer 2. gegebenen Definitionen unmittelbar

$$\tilde{q}_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_j + t \leq s_j \\ 1 - \sum_{s_j+1-x_j}^{t-1} q_j^0(\tau) & \text{falls } x_j + t \geq s_j + 1 \end{cases}$$

d. h. ein Schaden tritt genau dann ein, wenn entweder am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres  $j$  oder seine Witwe noch lebt oder wenn  $j$  bzw. seine Witwe während des  $t$ -ten Jahres stirbt (negativer Schaden infolge Zinsgewinn).

4. Für die Einzelschadenverteilung der Person  $j$ , unter der Voraussetzung, dass überhaupt ein Schaden entsteht, gilt nun:

$$\begin{aligned} p_{j,t}(\xi) &= \frac{F_{j,t}(\xi) - H(\xi)(1 - \tilde{q}_j(t))}{\tilde{q}_j(t)} \\ &= \frac{p(X_j(t) - Z_j(t) < \xi) - H(\xi)(1 - \tilde{q}_j(t))}{\tilde{q}_j(t)} \end{aligned}$$

wobei  $0 \leq j \leq \hat{m}_t$ , wenn wir mit  $\hat{m}_t$  die maximale Anzahl aller Rentner (inklusive Witwenrentnerinnen) bezeichnen, die am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres Anspruch auf Teuerungsanpassung haben können.

5. Für den Erwartungswert der Anzahl Schäden  $E[N(t)]$  gilt dann

$$E[N(t)] = \sum_{j=1}^{\hat{m}_t} (1 - q_j^0(t))$$

### 4.3.2 Das kollektive Modell

Ausgehend vom individuellen Modell, wie es in Ziffer 4.3.1 festgelegt wurde, wird nun entsprechend den in Ziffer 4.2 genannten Methoden das kollektive Modell bestimmt.

1. Als Verteilungsfunktion der Schadenanzahl wählen wir die Binomialverteilung. Dies dürfte der Realität entsprechen (in einer gewissen Analogie zu den Untersuchungen der früheren Kapitel). Eine weitere Begründung dieser Wahl ist die Tatsache, dass dann gilt

$$\text{Var}[S^{\text{kol}}] > \text{Var}[S^{\text{ind}}]$$

Für den Parameter  $p$  der Binomialverteilung ergibt sich dann

$$p = \frac{E[N(t)]}{\widehat{m}_t}$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres  $l$  Schäden eintreten, werde im folgenden  $v_l(t)$  gesetzt (= Binomialverteilung),  $0 \leq l \leq \widehat{m}'_t$ , wobei in diesem Falle  $\widehat{m}'_t = \widehat{m}_t$ .

2. Ausgehend von den Einzelschadenverteilungen  $p_{j,t}(\xi)$  des individuellen Modells definieren wir als "mittlere" Schadenhöhenverteilung des kollektiven Modells

$$p_t(\xi) = \frac{1}{E[N(t)]} \sum_{j=1}^{\widehat{m}_t} p_{j,t}(\xi)$$

3. Für die Gesamtschadenverteilung des kollektiven Modells ergibt sich damit

$$p(X(t) - Z(t) < \xi) = \sum_{l=0}^{\widehat{m}_t} v_l(t) \cdot (p^{*l})(\xi)$$

4. Wegen

$$\begin{aligned} S(t) &= [X(t) - Z(t) - Y(t-1)(1+i+\Delta i_t) - b(t)]^+, \\ Y(t) &= [X(t) - Z(t) - Y(t-1)(1+i+\Delta i_t) - b(t)]^- \end{aligned}$$



ergibt sich aus der Gesamtschadenverteilung  $p(X(t) - Z(t) < \xi)$  auch sofort die Verteilung von  $S(t)$  und  $Y(t)$  als bedingte Verteilung, d. h.

$$p(Y(t) < \xi | Y(t-1))$$

$$p(S(t) < \xi | Y(t-1))$$

5. Aus der Verteilung des Überschadens  $S(t)$  lässt sich die Stop loss-Prämie pro Vertrag mit Hilfe der üblichen Prämienbestimmungsprinzipien angeben. Um die Stop loss-Prämie in Lohnprozenten auszudrücken, nehmen wir zusätzlich an, die Gesamtlohnsumme entwickle sich entsprechend der Lohnentwicklungsrate  $j_t$ . Zwei Beispiele numerischer Resultate sind in Ziffer 5.4 enthalten.

## 5 Einige numerische Resultate

### 5.1 Resultate zur Gesamtentwicklung (ohne Schwankungen)

Das in Ziffer 3 beschriebene Modell (Modell 2) kann auch verwendet werden, um generelle Tendenzen zu erkennen. Dazu einige Beispiele. In allen Fällen (der Ziffer 5.1) wird der Beitrag  $b$  für den Teuerungsausgleich laufender Altersrenten in Prozent des versicherten Lohnes und unter folgenden Annahmen errechnet:

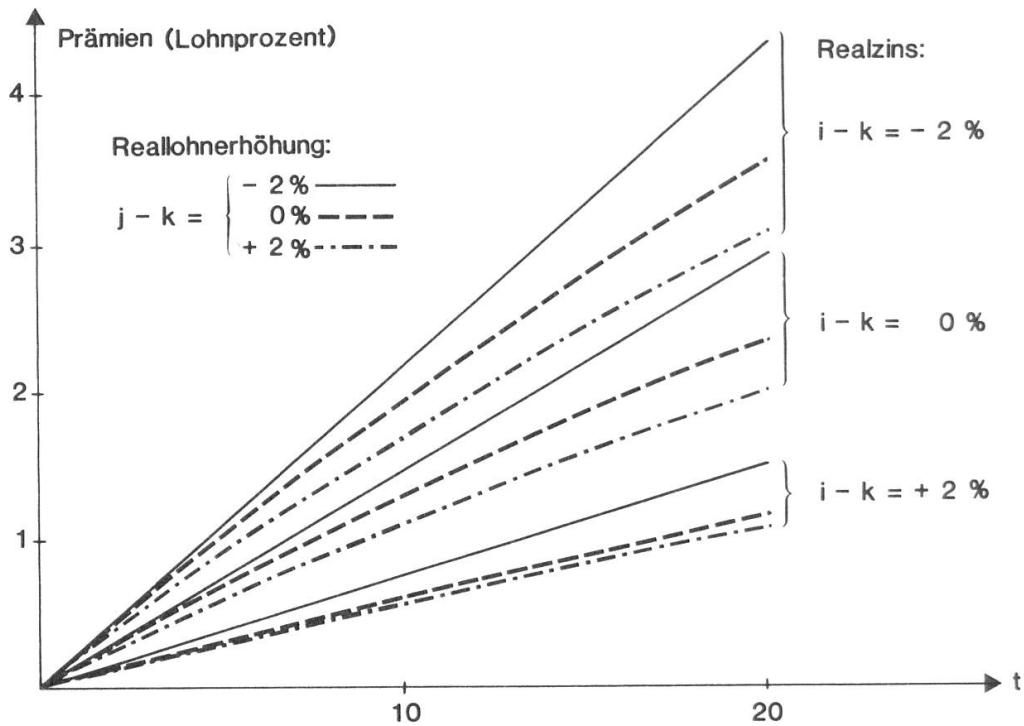
- Rentensatz: 36 % des letzten versicherten Lohnes
- Witwenrente: 60 % der Altersrente
- Lohn der Frauen: 75 % des Lohnes der Männer
- Beginn 1985

Die Berechnungen erfolgen ohne Berücksichtigung einer Reservebildung. Bezeichnungen sind:

- $i$  Zinssatz  
 $j$  jährliche Lohnentwicklung  
 $k$  jährliche Preisentwicklung

### 5.1.1 Beitrag $b$ für verschiedene Werte des Realzinses ( $i - k$ ) und der Realloohnerhöhung ( $j - k$ ) in der Einführungsphase

Zugrundegelegt wurde eine Vorsorgungseinrichtung mit anfänglich 25 aktiven (20 Männer, 5 Frauen), zu Beginn noch keine Rentner, implizit verwendetes Rentnerverhältnis  $r^* = 0.25$  (entspricht der heutigen Situation).

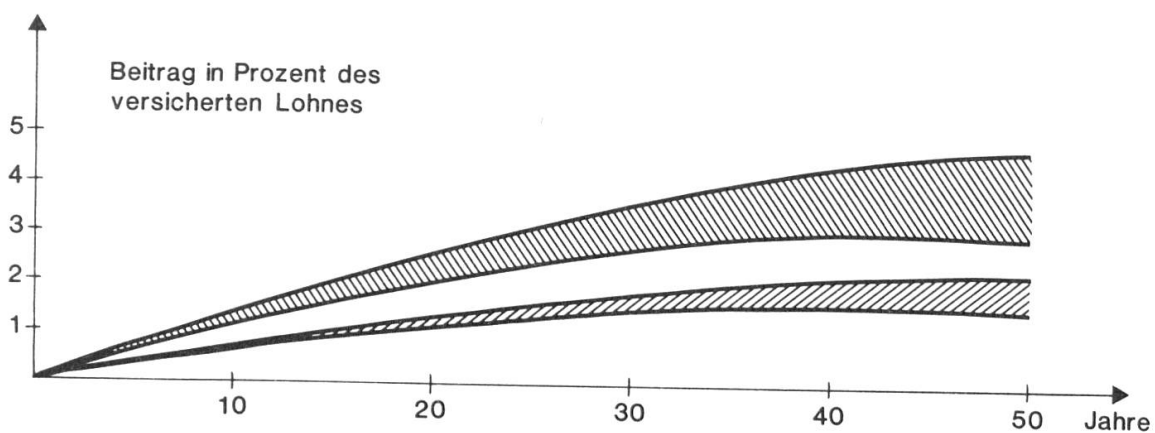


5.1.2 Beitrag  $b$  für verschiedene Werte des Realzinses ( $i - k$ ) und der Reallohnentwicklung ( $j - k$ ); Einführungsphase bis zum ungefähren Beharrungszustand, heutiges Rentnerverhältnis ( $r^* = 0.25$ )


Gleiche Rechnung wie 5.1.1: Darstellung mit weniger Varianten, aber bis 50 Jahre nach Beginn.

Bereich des Realzinses: 0–2 %

Bereich der Reallohnentwicklung: 0–2 %



Dabei gilt:   $i - k = 0\%$

  $i - k = +2\%$

Obere Grenzen der schraffierten Flächen:  $j - k = 0\%$

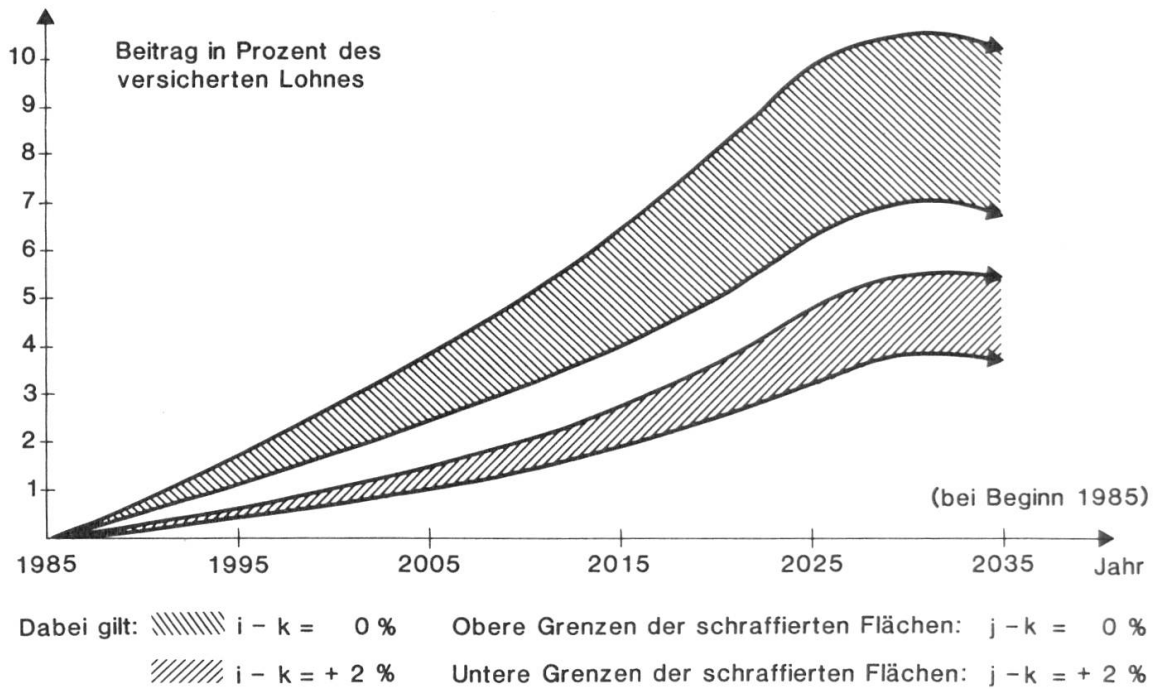
Untere Grenzen der schraffierten Flächen:  $j - k = +2\%$

5.1.3 Beitrag  $b$  für verschiedene Werte des Realzinses ( $i - k$ ) und der Reallohnentwicklung ( $j - k$ ), Einführungsphase bis zum ungefähren Beharrungszustand, unter Berücksichtigung der Änderung des Rentnerverhältnisses  $r^*$ .

Analoge Rechnung wie 5.1.2, gleiche Bereiche für den Realzins (0–2 %) und die Reallohnentwicklung (0–2 %). Beginn 1985. Annahmen für das Rentnerverhältnis  $r^*$ :

$$r^* = 0.28 \text{ (1985)}, \quad r^* = 0.34 \text{ (2000)}, \quad r^* = 0.55 \text{ (2030)}.$$

Diese Annahmen wurden von [3] übernommen.



Diese Grafik dürfte ein realistisches Bild der möglichen durchschnittlichen Belastung geben. Zur Beurteilung der wirtschaftlichen Bedeutung ist zu beachten, dass der Beitrag in Prozenten des vollen AHV-Lohnes im schweizerischen Durchschnitt etwa 50 % des hier gezeigten Wertes  $b$  ausmacht. Gleichzeitig ist zu bedenken, dass bei den gezeigten Entwicklungen, in Abhängigkeit vom Reallohn  $j - k$ , die gesamte Mehrbelastung der AHV gegenüber heute deutlich höher ausfallen dürfte als dieser Zusatzbeitrag  $b$ .

## 5.2 Stop loss-Prämie beim Modell mit Obligatorium (Modell 1, Ziffer 2)

### 5.2.1 Ein Beispiel

Es wurden folgende Annahmen getroffen:

$$r^* = 0.28 \text{ (1985)}$$

$$c = 0.36 \text{ (etwa dem BVG entsprechend)}$$

$$k = j = 6\%; i = 4\%$$

Unter den gewählten Annahmen ergibt sich eine durchschnittliche Gesamtprämie für den Teuerungsausgleich von 4,6 % (Beharrungszustand). Wählen wir als Selbstfinanzierungssatz 4,0 %, dann ergibt sich als Stop loss-Prämie (in Lohnprozent), in Abhängigkeit von der Grösse (Aktivenzahl) einer Vorsorgeeinrichtung (ohne Sicherheitszuschlag, netto):

Grösse der VE	Netto Stop loss-Prämie
1	3,6 %
3	2,4 %
5	1,8 %
10	1,4 %
20	1,1 %
50	0,8 %
100	0,7 %
250	0,6 %
≥ 500	0,6 %

Gesamtschweizerischer Durchschnitt 1,1 %

(Die Werte für  $n = 1, 2, 3, 4$  wurden direkt mit Hilfe der Binomialverteilung gerechnet; für den gesamtschweizerischen Durchschnitt wurden die Werte der schweiz. Betriebsstatistik, 1985, verwendet.)

### 5.2.2 Bemerkungen zu diesem Modell

- Bei Verwendung eines solchen Modelles in der Praxis müssten ebenfalls Zinsgewinne und die Bildung einer Reserve eingeschlossen werden, da damit eine wesentliche Beitragssenkung erwartet werden kann.
- Falls der Selbstfinanzierungs-Beitrag deutlich unter dem erforderlichen Gesamtbeitrag liegt, verliert sich der – ohnehin nicht sehr starke – Effekt der Grösse einer VE. Sinnvoll ist daher wohl nur ein gesamtschweizerischer Stop loss-Beitrag unabhängig von der Grösse einer VE.

- Insgesamt scheint ein solches Modell sinnvoll, da damit die von den Schwankungen der Rentnerbestände herrührenden, für kleine VE starken Beitragsschwankungen vermieden werden. Es ergibt sich eine landesweite Obergrenze der Beitragsbelastung, abhängig von  $k$  (Inflation),  $j$  (Lohnsteigerungssatz) und  $i$  (eff. Zins), nicht jedoch abhängig von der Bestandesstruktur.

Beim oben ausgeführten Beispiel (5.2.1) mit einem durchschnittlich erforderlichen Beitrag von 4,6 % der versicherten Löhne würde dies bedeuten, dass jede Vorsorgeeinrichtung (falls überhaupt nötig) zunächst 4 % für den Teuerungsausgleich erhebt. Zusätzlich wären 1,1 % an einen Rückversicherer zu zahlen. Damit wären alle Schwankungen zwischen den Vorsorgeeinrichtungen ausgeglichen, die sonst zu sehr hohen Beitragssätzen führen könnten (falls wenige Aktive vielen Rentnern gegenüberstehen; in einem solchen Fall wäre der Teuerungsausgleich kassenintern nach dem Rentenwert- oder auch Ausgabenumlageverfahren praktisch nicht zu bezahlen). Bei nicht benötigtem Beitrag von 4 % wegen günstiger Struktur (wenige Rentner pro Aktive) könnte dieser Grundbeitrag entsprechen gesenkt werden; dagegen wäre der Stop loss-Beitrag von 1,1 % in jedem Fall zu zahlen.

### 5.3 Beispiel von Stop loss-Prämien bei der freiwilligen Exzedenten-Rückversicherung nach Modell 2 (Ziffer 3)

#### 5.3.1 Konstante Werte von $k$ , $j$ und $i$

Es werden die zwei folgenden Kassen betrachtet:

	Aktive Männer	Aktive Frauen	Rentner Männer	Rentnerinnen Frauen
Kasse A	20	5	0	0
Kasse B	20	5	6	1

Kasse A entspricht der Einführungsphase

Kasse B entspricht dem Beharrungszustand mit einem anfänglichen Rentnerverhältnis  $r^*$  von 0,28 (ohne Verschlechterung mit der Zeit).

Löhne und Renten sind wie in Ziffer 5.1 definiert.

a) *Prämiensätze b ohne Stop loss-Vertrag*

$$k = 4\%, \quad j = 4\%, \quad \Delta i = 0\%$$

Für die Kasse A (Einführungsphase) bzw. die Kasse B (Beharrungszustand) ergeben sich die folgenden Durchschnittsprämiensätze  $b$  (in Lohnprozent), ohne Stop loss-Vertrag:

Zeit (Jahre) t	Kasse A (Einführungsphase)		Kasse B (Beharrungszustand)	
	b		b	
5	0,50		4,26	
10	1,25		4,49	
20	2,54		4,75	

b) *Stop loss-Prämie, Streuung und Reserve mit Stop loss-Vertrag*

Wählen wir nun als Selbstfinanzierungsprämie z. B. 2% ( $\alpha$ ) oder 3% ( $\beta$ ), dann ergeben sich folgende Werte für die Netto-Stop loss-Prämie  $\Pi$ , deren Streuung  $\sigma$  und die Reserve  $R$  ( $\pi$  und  $\sigma$  in Lohnprozent,  $R$  in Prozent der Lohnsumme):

( $\alpha$ ) Selbstfinanzierung 2%:

Zeit t	Kasse A (Einführungsphase)					Kasse B (Beharrungszustand)				
	mit Res.			ohne Res.		mit Res.			ohne Res.	
	$\pi$	$\sigma$	R	$\pi$	$\sigma$	$\pi$	$\sigma$	R	$\pi$	$\sigma$
5	0,00	0,00	5,2	0,00	0,06	2,38	0,73	0,0	2,38	0,73
10	0,01	0,14	10,5	0,17	0,38	2,60	1,08	0,0	2,60	1,08
20	0,44	0,95	11,7	0,90	0,97	3,01	1,36	0,0	3,01	1,35
30	1,28	1,53	7,9	1,72	1,32	3,20	1,50	0,0	3,20	1,50



( $\beta$ ) Selbstfinanzierung 3 %:

Zeit t	Kasse A (Einführungsphase)					Kasse B (Beharrungszustand)				
	mit Res.		R	ohne Res.		mit Res.		ohne Res.		
	$\pi$	$\sigma$		$\pi$	$\sigma$	$\pi$	$\sigma$	$\pi$	$\sigma$	
5	0,00	0,00	8,0	0,00	0,00	1,42	0,69	0,0	1,42	0,69
10	0,00	0,00	18,2	0,02	0,15	1,66	1,05	0,0	1,66	1,05
20	0,04	0,32	28,3	0,33	0,64	1,98	1,31	0,2	1,98	1,31
30	0,31	0,93	28,5	0,93	1,09	2,19	1,47	0,3	2,20	1,45

### Bemerkungen

Diese Beispiele zeigen die Resultate für einen solchen Stop loss-Vertrag. Es fällt auf, dass die Ermässigung der Stop loss-Prämie infolge Verwendung einer Reserve nicht sehr stark ins Gewicht fällt. Dies kommt daher, dass bei diesen Beispielen konstante Werte angenommen wurden, so dass sich entweder kaum eine Reserve bildet (Selbstfinanzierung < Durchschnittsbeitrag) oder sich zwar eine Reserve bildet, diese aber kaum benutzt wird (Selbstfinanzierung > Durchschnittsbeitrag).

Auffallend ist auch die relativ grosse Streuung, die in der Regel eine ähnliche Grössenordnung wie die Stop loss-Prämie  $\pi$  aufweist.

Zu beachten im Zusammenhang mit den Ausführungen der nachfolgenden Ziffern 5.3.2 bis 5.3.4 ist ferner, dass sich im Beispiel ( $\beta$ ) für Kasse A (Einführungsphase) mit der Zeit eine Reserve in der Grössenordnung von 30 % der Lohnsumme bildet.

### 5.3.2 Szenario Schweiz 1971–1984

Um nicht nur theoretische Beispiele zu untersuchen – und insbesondere zur Beobachtung der Auswirkungen einer Reservebildung – wurden auch die Entwicklungen in mehreren Ländern und verschiedenen Perioden betrachtet. Die Länder und Perioden wurden dabei so ausgesucht, dass möglichst unterschiedliche wirtschaftliche Gegebenheiten erfasst werden können, wobei Periodenlängen von mindestens 10 Jahren gewählt wurden (vorheriger Abbruch selbstverständlich möglich). Alle weiteren Annahmen (Kassen A und B, Lohnverhältnis zu Beginn, Rentensätze usw.) entsprechen denjenigen der vorangegangenen Ziffer 5.3.1 bzw. Ziffer 5.1.

Als Zinssatz wurde in allen Szenarien die Durchschnittsrendite von Staatsobligationen während der letzten 10 Jahre vor der Erfassung verwendet, wobei

der Einfluss früherer Jahre linear auf Null abnehmend angenommen wurde. Nachfolgend sei das Beispiel der Schweiz wiedergegeben (anfänglich hohe Inflation, dann Beruhigung; Realzins um Null).

Werte	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
k =	6,6	6,8	8,7	9,8	6,9	1,7	1,3	1,0	3,6	4,2	6,4	5,5	2,8	3,0
i =	7,5	7,8	5,3	3,7	7,3	5,5	5,4	6,2	3,7	4,4	5,3	5,1	4,7	4,8
j =	11,0	12,0	12,0	12,2	7,4	2,2	2,4	3,1	3,4	5,3	6,3	7,0	3,8	2,7

*Resultate mit und ohne Stop loss-Vertrag:*

Jahr	Gesamtprämie (ohne Stop loss-Vertrag) in Prozent des versicherten Lohnes	
	Kasse A	Kasse B
1971	0.0	7,2
1974	1.1	12,5 (maximaler Wert)
1977	0.0	1,2
1980	1.3	5,3
1984	1.0	2,2

*Beispiel eines Stop loss-Vertrags:*

Selbstfinanzierung 2 %, Anfangsreserve 30 % (in Prozent der Lohnsumme), Kasse B

Jahr	Stop loss-Prämie (Lohnprozent)	Reserve (Prozent Lohnsumme)
1971	0,0	30,0
1974	0,0	2,2
1977	0,0	2,9
1980	1,3	0,0
1982	4,6	0,0
1984	0,2	0,0

*Bemerkung*

Im Jahre 1982 entsteht ein "unschöner" Spitzenwert. Bei einer Anfangsreserve von rund 40 % würde dieser verschwinden. Es zeigt sich also, dass die schwierigste Inflationsphase der Schweiz für den hier betrachteten Teuerungsausgleich kein Problem gewesen wäre für Kasse A (Einführungsphase), dagegen von Kasse B (Beharrungszustand) nur hätte finanziert werden können

beispielsweise mit einem Beitrag von rund 2 %, einer Anfangsreserve von 40 % und einer Stop loss-Prämie von einigen Promillen.

### *5.3.3 Bemerkung zu weiteren Szenarien*

Die analogen Rechnungen wurden gemacht für die USA und Italien. In allen Fällen zeigten sich ähnliche Resultate, nämlich die Möglichkeit der Glättung der Beiträge über die Zeit infolge des Aufbaus einer Reserve (abgesehen selbstverständlich von der Glättung infolge des Stop loss-Vertrags als Ausgleich zwischen den Vorsorgeeinrichtungen).

Die Hochinflationsphase in Italien der Periode 1973 – 1984 mit teilweise stark negativem Realzins stellt die ungünstigste Situation im hier betrachteten Zusammenhang dar, der ein westliches Industrieland in den letzten Jahrzehnten unterworfen war (mit Ausnahme von Island und Israel). Die Berechnungen ergaben, dass hier ein durchschnittlicher Beitragssatz von 4 % benötigt worden wäre, bei einer (sehr hohen) Anfangsreserve von 100 % der versicherten Lohnsumme. Ohne Reservebildung wären dagegen in gewissen Jahren Beiträge von gegen 20 % der versicherten Löhne notwendig gewesen, hätte man die Indexierung der Altersrenten uneingeschränkt gewähren und nach dem Rentenwertumlageverfahren finanzieren wollen (in einem solchen Fall wäre aber wohl der Teuerungsausgleich beschränkt, auf alle Fälle aber auf das Ausgabenumlageverfahren übergegangen worden).

### *5.3.4 Zusammenfassung der Resultate zu diesem Modell*

Bei einigermaßen normalen wirtschaftlichen Verhältnissen, die auch Inflationsperioden umfassen können wie etwa in der Schweiz 1971–1975 oder in den USA 1973–1982, kann mit einer Schwankungsreserve in der Größenordnung von 30 % der versicherten Lohnsumme mit Beiträgen von rund 1–3 % der versicherten Löhne die Teuerungsanpassung laufender Altersleistungen für alle Kassen auch im Beharrungszustand finanziert werden, sofern entsprechende Stop loss-Verträge abgeschlossen werden.

Bei schwierigen wirtschaftlichen Verhältnissen (Beispiel Italien 1973–1980) sind entweder höhere Anfangsreserven und ein höherer Beitrag erforderlich (im Beispiel Italien rund 100 % Anfangsreserven und 4 % Beitrag), oder es muss vorübergehend vom vollen Teuerungsausgleich abgesehen werden bzw. vorübergehend mit dem Ausgabenumlageverfahren operiert werden (vgl. hierzu 3.5). Bei starker Verschlechterung des Rentenverhältnisses ergeben sich ebenfalls entsprechend höhere Werte.

Diese Feststellungen legen die Lösung nahe, während der Einführungsphase durch leicht höhere Beiträge als unbedingt nötig eine Schwankungsreserve zu schaffen, die für die Schweiz eine Grössenordnung von durchschnittlich etwa 20–30 % der Lohnsumme betragen dürfte (es handelt sich dank dem hier vorausgesetzten Rückversicherungssystem um einen landesweiten Durchschnittswert, nicht etwa um einen Minimalwert für jede einzelne Kasse).

#### 5.4 Beispiele für die Prämienbestimmung bei Vorsorgeeinrichtungen mit vollständiger Information (Modell 3, Ziffer 4)

An zwei Beispielen wird nachstehend die Gesamtprämie für den Teuerungsausgleich auf laufenden Altersleistungen nach dem RUV sowie deren Streuung dargestellt, wobei nun von einer weitgehenden Information über den Personalbestand der Vorsorgeeinrichtungen ausgegangen wird.

##### Beispiel 1

Bestand (Aktive und Rentner):

Geschlecht	Alter	Rentner	Lohn/Rente
Mann	30	–	25 000
Mann	30	–	25 000
Mann	34	–	50 000
Mann	74	R	9 000
Frau	30	–	20 000
Frau	30	–	25 000
Frau	65	R	7 000

Grundprämie und Streuung (in Lohnprozent) für  $k = 4\%$ ,  $j = 6\%$ ,  $\Delta i = 0\%$ ;  $t$  Jahre nach Beginn:

$t$	$b$	$\sigma$
1	4,2	0,6
2	3,9	0,8
3	3,5	0,7
4	3,2	0,9
5	3,0	0,9

*Beispiel 2*

Bestand (Aktive und Rentner):

Geschlecht	Alter	Rentner	Lohn/Rente
Mann	30	–	25 000
Mann	30	–	25 000
Mann	30	–	20 000
Mann	31	–	34 000
Mann	34	–	50 000
Mann	37	–	65 000
Mann	40	–	56 000
Mann	66	R	12 500
Mann	68	R	13 240
Mann	69	R	12 000
Mann	74	R	9 000
Frau	30	–	25 000
Frau	65	R	7 000
Frau	65	R	5 500
Frau	67	R	12 000
Frau	70	R	11 000
Frau	80	R	10 000

Grundprämie und Streuung (in Lohnprozent) für  $k = 4\%$ ,  $j = 4\%$ ;  
 $\Delta i = 0\%$ ;  $t$  Jahre nach Beginn:

$t$	$b$	$\sigma$
1	11,9	1,2
2	11,0	1,3
3	10,2	1,4
4	9,3	1,5
5	8,6	1,5

*Bemerkungen*

- In den Prämiensätzen zeigen sich sehr klar die Unterschiede zwischen den Kassen (vor allem bezüglich Altersstruktur);
- Die deutlich tieferen Werte für die Streuung, verglichen mit Modell 3, dürften eine Folge der Verwertung der zusätzlichen Information sein.

## 6 Schlussfolgerungen und weitere Fragen

Nach den bisherigen Ausführungen ergeben sich folgende Erkenntnisse:

- Die dargestellten Modelle zur Finanzierung der Teuerungsanpassung laufender Altersrenten in der beruflichen Vorsorge sind berechenbar und praktisch durchführbar.
- Sie ermöglichen eine weitgehende finanzielle Absicherung gegen Beitragsschwankungen infolge Änderungen der Bestandesgrößen (speziell des Verhältnisses der Anzahl Rentner zur Anzahl der Aktiven einer Vorsorgeeinrichtung). Das Teuerungsrisiko kann daher in ähnlicher Weise wie die übrigen Risiken entsprechend dem föderalistischen Prinzip der 2. Säule durch Vorsorgeeinrichtungen selbständig getragen werden, sofern eine Rückversicherung im hier beschriebenen Sinn getätigt wird.
- Neben der zentralen Frage der Versicherbarkeit kann etwa auch die Frage der minimalen Grösse einer Vorsorgeeinrichtung zur selbständigen Durchführung dieser Versicherungsart u. a. m. quantifiziert und damit auf politischer Ebene beantwortet werden.
- Bis zu einem recht weitgehenden Grad können durch Reservebildung auch wirtschaftliche Schwankungen (Zins, Preisentwicklung, Lohnentwicklung) überbrückt werden. Genaue Angaben der Beziehungen zwischen Beitrags- und Reservehöhe einerseits, wirtschaftlichen Grössen andererseits sind möglich. Die Angabe einer absoluten Obergrenze der Belastung des vollen Teuerungsausgleichs ist demgegenüber infolge der Ungewissheit der wirtschaftlichen Entwicklung nicht möglich. Dagegen können Kriterien einer allfälligen Einschränkung des vollen Teuerungsausgleichs gefunden werden.

Weitere Fragen bleiben vorerst offen, da deren Untersuchung erst sinnvoll ist, wenn die Diskussion zum Problem des Teuerungsausgleichs laufender Altersrenten aktuell wird. Sie können aber durchaus mit den hier vorgestellten Methoden behandelt werden. Dazu gehören etwa:

- Zusammenwirken zwischen Obligatorium und überobligatorischen Teilen der beruflichen Vorsorge;
- Probleme beim Stellenwechsel;
- Rückkauf eines Vertrages oder späterer Beitritt.

Der Teuerungsausgleich in der beruflichen Vorsorge ist ein zu komplexes Gebiet, um alle Fragen auf engem Raum beantworten zu können. Die

vorliegende Arbeit zielt daher eher darauf ab, die wichtigsten mathematischen Methoden zur Analyse dieser Probleme bereitzustellen.

PD Dr. Herbert Lüthy  
Basler, Versicherungs-Gesellschaften  
Aeschengraben 21  
4002 Basel

## Literatur

- [1] *Beard, R. E. / Pentikäinen, T. / Pesonen, E.*; Risk Theory; London, New York; Chapman and Hall, 1984.
- [2] *Bühlmann, H.*; Mathematical Methods in Risk Theory; Springer-Verlag; 1970.
- [3] *Bühlmann / Hauser / Schneider / Zweifel*; Expertenbericht zum Postulat "Perspektiven der sozialen Sicherheit", Bern 1985.
- [4] *Gerber, H. U.*; An Introduction to Mathematical Risk Theory; Huebner, Philadelphia 1979.
- [5] *Held, R. P.*; Zur rekursiven Berechnung von Stop loss-Prämien für Pensionskassen; Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 1, 1982.
- [6] *Hutter, J.*; Ein Modell zur kalkulatorischen Bewältigung von Änderungsrisiken im Schadenbereich eines Versicherungsunternehmens; Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, Heft 3, 1986.
- [7] *Niedermann, M.*; Betrachtungen zur Entwicklung der Kosten für die Anpassung laufender Renten an die Teuerung; Diplomarbeit zur Erlangung des Eidg. Diploms eines Pensionsversicherungsexperten, 1982 (unveröffentlicht).
- [8] *Schnieper, R.*; Risk Processes with Stochastic Discounting; Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 2, 1983.
- [9] *Thullen, P.*; Mathematische Methoden der Sozialen Sicherheit; Verlag Versicherungswirtschaft e. V., Karlsruhe 1977.

## Anhang 1

*Darstellung der Stochastischen Prozesse in Modell 2 (Ziffer 3) als ein- und mehrdimensionale Markoff-Ketten*

### 1 Begriffe

Es werden die in Ziffer 3 definierten Begriffe verwendet. Zusätzlich dazu werden nachfolgend weitere Bestandesgrößen sowie finanzielle Größen definiert.

#### 1.1 Witwenbestand (mit "abgeleitetem" Anspruch)

In analoger Weise zu Ziffer 3.2 wird definiert:

- $W_t$  Anzahl Witwen am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres
- $(\Delta W)_t^+$  Anzahl neue Witwen (aus dem Rentnerbestand  $R_t$ ) während des  $(t + 1)$ -ten Jahres
- $(\Delta \overset{0}{W})_t^+$  Anzahl neue Witwen aus dem Aktivenbestand  $n_t^1$  (während des  $(t + 1)$ -ten Jahres)
- $(\Delta W)_t^-$  Anzahl Todesfälle im Witwenbestand während des  $(t + 1)$ -ten Jahres

Die Zufallsvariable  $W_t$  genügt dann der Rekursionsgleichung

$$W_{t+1} = W_t + (\Delta W)_t^+ + (\Delta \overset{0}{W})_t^+ - (\Delta W)_t^-$$

Dabei wird hier nun Einfachheit halber angenommen, dass die Witwen sofort Anspruch auf Teuerungsanpassung ihrer Renten haben; wir gehen also hier von der Wartefrist Null aus (eine Verallgemeinerung wäre möglich).

Analog zu  $(\Delta R)_t^+$ ,  $(\Delta R)_t^-$  nehmen wir auch bei den Witwenbeständen an, dass die Zuwächse binomial verteilt sind, mit den Grundwahrscheinlichkeiten  $p^w$ ,  $\overset{0}{p}^w$ ,  $\bar{q}^w$ ; d. h.

$$P((\Delta W)_t^+ = k | R_t) = \binom{R_t}{k} (p^w)^k (1 - p^w)^{R_t - k}$$

$$P((\Delta \overset{0}{W})_t^+ = k | n_t^1) = \binom{n_t^1}{k} (\overset{0}{p}^w)^k (1 - \overset{0}{p}^w)^{n_t^1 - k}$$

$$P((\Delta W)_t^- = k | W_t) = \binom{W_t}{k} (\bar{q}^w)^k (1 - \bar{q}^w)^{W_t - k}$$



Bemerkung zu den Definitionen der Bestände:

Mit den Grundwahrscheinlichkeiten (Übergangswahrscheinlichkeiten)  $p^l$ ,  $\bar{q}^l$ ,  $p^w$ ,  $\bar{p}^w$ ,  $\bar{q}^w$  sind die Bestandesentwicklungen für Männer, Frauen und Witwen aufgrund der Anfangsbestände im Zeitpunkt  $t_0$  vollständig bestimmt für alle  $t \geq t_0$ .

## 1.2 Finanzielle Grössen

Es wird definiert:

- $i$  Technischer Zinssatz
- $\Delta i_t$  Zinsgewinnsatz während des  $t$ -ten Jahres
- $\kappa_t$  Anpassungssatz der Renten am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres
- $j_t$  Anpassungssatz der Löhne am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres
- $g_t^l$  Durchschnittliches Gehalt am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres;  $l = 1, 2$
- $c_t^l$  Durchschnittliche Höhe der Altersrenten am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres, nach Teuerungsanpassung
- $w$  Satz für die Höhe der Witwenrente (gemessen an der Altersrente des verstorbenen Ehemannes)
- $\ddot{a}^l$  Durchschnittlicher Barwert der laufenden Altersrenten;  $l = 1, 2$  (bei Männern inkl. anwartschaftliche Witwenrenten)
- $\ddot{a}^w$  Durchschnittlicher Barwert der laufenden Witwenrenten
- $b$  Beitragssatz
- $b_t$  Beitrag der Aktiven zur (teilweisen) Finanzierung der Teuerungsanpassung der laufenden Alters- und Witwenrenten (Witwenrenten ab Schlussalter), am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres.  
Es gilt  $b_t = b(n_t^1 g_t^1 + n_t^2 g_t^2)$ .
- $X_t$  Kosten der Teuerungsanpassung am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres
- $Z_t$  Zinsgewinn auf dem Deckungskapital der laufenden Alters- und Witwenrenten während des  $t$ -ten Jahres
- $S_t$  Überschaden am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres, nach Teuerungsanpassung
- $Y_t$  Reserve am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres, nach Teuerungsanpassung.

Nach diesen Definitionen gelten die folgenden Beziehungen:

$$X_t = \kappa_t \left( \sum_{l=1}^2 \widehat{R}_t^l \cdot c_{t-1}^l \cdot \ddot{a}^l + w \cdot c_{t-1}^1 \cdot W_t \cdot \ddot{a}^w \right)$$

$$Z_t = \Delta i_t \left( \sum_{l=1}^2 \widehat{R}_{t-1}^l \cdot c_{t-1}^l \cdot \ddot{a}^l + w \cdot c_{t-1}^1 \cdot W_{t-1} \cdot \ddot{a}^w \right)$$

Mit der Darstellung

$$[Q]^+ = \max(Q, 0)$$

$$[Q]^- = -\min(Q, 0)$$

gilt ferner

$$S_t = [X_t - Z_t - Y_{t-1}(1 + i + \Delta i_t) - b_t]^+$$

$$Y_t = [X_t - Z_t - Y_{t-1}(1 + i + \Delta i_t) - b_t]^-$$

Die letzten beiden Gleichungen widerspiegeln die Tatsache, dass die Einnahmen aus drei Quellen stammen können, nämlich Zinsgewinn, Verwendung der verzinsten Vorjahresreserve (falls diese grösser als Null ist) und Beiträge der Aktiven.

## 2 Allgemeine Darstellung der stochastischen Prozesse des Überschadens $\{S_t\}$ und der Reserve $\{Y_t\}$ in einem Modell mit Reservebildung

### 2.1 Darstellung als mehrdimensionale Markoff-Ketten

Betrachten wir zunächst den Vektor

$$\underline{V}_t = (R_t^1, R_t^2, \widehat{R}_t^1, \widehat{R}_t^2, W_t, S_t, Y_t)$$

Aus den Rekursionsgleichungen in Ziffer 1 und Ziffer 3.2 des Textes folgt zunächst, dass die Verteilung von  $\underline{V}_t$  nur von Grössen abhängt, die Komponenten des Vektors  $\underline{V}_{t-1}$  sind, d. h., der stochastische Prozess  $\underline{V}_t$  erfüllt die "Markoff-Eigenschaft".

Weitere Bemerkungen zu  $\underline{V}_t$ :

1. Die einzelnen Komponenten von  $\underline{V}_t$  sind keineswegs unabhängig. So gilt  $\widehat{R}_t^l \leq R_t^l$ ,  $l = 1, 2$ ; ferner gilt, dass mindestens eine der beiden letzten Komponenten stets Null ist.
2. Die Komponenten von  $\underline{V}_t$  sind diskrete Zufallsvariable (Personenzahlen oder Geldeinheiten). Zur Verminderung des Rechenaufwandes kann eine weitergehende Diskretisation (Gruppenbildung) vorgenommen werden, auf die hier nicht näher eingegangen wird. Zur Darstellung des mehrdimensionalen Markoff-Prozesses können infolge der Diskretheit aller Komponenten die Methoden der klassischen linearen Algebra verwendet werden.
3. Zur Definition des entsprechenden Markoff-Prozesses ist von einer partiellen Ordnung auszugehen, die hier in natürlicher Weise wie folgt definiert werden kann:

$$\underline{V}_t \leq \underline{V}'_t \Leftrightarrow R_t^l \leq R_t'^l; \quad \widehat{R}_t^l \leq \widehat{R}_t'^l; \quad W_t \leq W_t'; \\ S_t \leq S_t'; \quad Y_t \leq Y_t'$$

Als Übergangsfunktion des Markoff-Prozesses ergibt sich damit

$$P(\underline{V}_{t+1} \leq \underline{\eta} \mid \underline{V}_0, \underline{V}_1, \dots, \underline{V}_t = \underline{\xi}) = F(\underline{\xi}, \underline{\eta}, t)$$

Da die Komponenten von  $\underline{V}_t$  für alle  $t$  diskrete Zufallsvariable sind, bildet der Prozess  $\{\underline{V}_t\}$  eine Markoff-Kette und  $F(\underline{\xi}, \underline{\eta}, t)$  lässt sich in einer der beiden nachstehend genannten Formen darstellen.

#### *Darstellung 1*

Die Menge der möglichen Vektoren wird numeriert. Die Übergangsfunktion  $F(\underline{\xi}, \underline{\eta}, t)$  wird dabei durch die Übergangsmatrix  $Q(t)$  ausgedrückt. Falls die Menge der möglichen Zustände der einzelnen Komponenten  $i_k$  ist,  $k = 1, 2, \dots, j$ , beträgt die Dimension der Matrix  $Q(t)$   $\prod_{k=1}^j i_k$ , wobei  $i_k$  auch abzählbar unendlich sein kann.

#### *Darstellung 2*

Hier wird die Menge der möglichen Zustände einzeln numeriert. Die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(\underline{V}_{t+1} = \underline{\eta} \mid \underline{V}_t = \underline{\xi})$$

werden dann durch einen Tensor  $P(t)$  dargestellt. (D.h. das Instrument der linearen Algebra, das in diesem Fall benötigt wird, ist nicht mehr eine Matrix, sondern ein Tensor.)

Der Tensor hat die Form

$$(P(t))_{\mu_1, \dots, \mu_j; \nu_1, \dots, \nu_j}$$

Die Komponenten des Tensors,

$$p_{\mu_1, \dots, \mu_j; \nu_1, \dots, \nu_j}(t)$$

bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitpunkt  $t$  der Zustand  $\nu_1, \dots, \nu_j$  angenommen wird, vorausgesetzt, im Zeitpunkt  $t-1$  sei das System im Zustand  $\mu_1, \dots, \mu_j$ .

## 2.2 Verallgemeinerung durch Betrachtung weiterer Variabler als Zufallsgrößen

Die bisherige Darstellung für  $S_t$  und  $Y_t$  ging von Durchschnittswerten der Löhne und der Rentenhöhe aus sowie von deterministisch vorgegebenen Teuerungsraten und Zinsgewinnen. Die in Ziffer 3.4.1 gegebene Darstellung ist von so allgemeiner Art, dass sie nicht angepasst zu werden braucht, wenn in die Bestimmungsgleichung für  $S_t$  und  $Y_t$  weitere stochastische Variable einfließen.

So können nicht nur Teuerungsraten und Zinsgewinn, sondern auch Löhne und Rentenhöhe als stochastische Variable aufgefasst werden, ohne dass die Darstellung in Ziffer 2.1 ändert; es sind dann einfach die Definitionen von  $S_t$  und  $Y_t$  entsprechend anzupassen (vorteilhafterweise unter Verwendung von Grossbuchstaben für stochastische Variable).

Schwieriger ist es, eine Aussage über die Verteilung solcher weiterer Zufallsvariablen zu machen, wie z.B. die Annahme einer Paretoverteilung für den Lohn usw. (Vgl. dazu etwa auch *Schnieper* [8], S. 203 ff.).

Bei den numerischen Berechnungen wurden für die wirtschaftlichen Grössen (Teuerungsraten, Zinssätze, Löhne, Rentenhöhen) nicht stochastische Variable angenommen, sondern es wurde mit dem Mittel der Szenarien gearbeitet (für Teuerungsraten und Zinsen). Dies deshalb, weil die Suche nach Verteilungsfunktionen für Teuerungsraten und Zins etwas "gekünstelt" wäre und ausserdem die Zugrundelegung verschiedener Szenarien eher mehr aussagt.

### 3 Berechnung der Stop loss-Prämie im stochastischen Modell mit Reservebildung

In Ziffer 3.2 werden die Rekursionsgleichungen angegeben für die Zufallsvariablen  $R_t^l$ ,  $\widehat{R}_t^l$ ,  $W_t$ ,  $Z_t$ ,  $X_t$ ,  $Y_t$ ,  $S_t$ . Bei Verwendung der Gleichung für den Beitrag der Aktiven:

$$b_t = b \cdot \sum_{l=1}^2 g_t^l \cdot n_t^l$$

und der Definition von  $S_t$  ergibt sich unmittelbar für die Netto-Stop loss-Prämie pro Lohneinheit:

$$\pi_t(\text{netto}) = \frac{E[S_t]}{\sum_{l=1}^2 g_t^l \cdot n_t^l}$$

Durch numerische Iteration mit Hilfe von Pseudo-Zufallszahlen ist es nun möglich, für "beliebige"  $t$  nicht nur  $E(S_t)$ , sondern beispielsweise Erwartungswert und Varianz der oben genannten Zufallsvariablen zu berechnen.

Bei Wahl des Varianz- oder des Streuungsprinzips für die Berechnung des Sicherheitszuschlages  $T$  kann damit auch die Bruttoprämie

$$\pi_t = \pi_t(\text{netto}) + T$$

berechnet werden.

Der Zeitpunkt  $t$  ist dabei im Prinzip beliebig.

Bei den praktischen Berechnungen wurde im allgemeinen bis  $t = 50$  gerechnet, da eine langsame Konvergenz vorliegt.

Speziell sei hier noch darauf hingewiesen, dass durch spezielle Eingabe von  $n(t)$  auch schrumpfende Bestände simuliert werden können. In gleicher Weise kann die künftige Verschlechterung des Rentnerverhältnisses berücksichtigt werden.

Einige Resultate, die auf diesem Modell beruhen, sind in den Ziffern 5.1 und 5.3 dargestellt.

## Anhang 2

Zur Konstruktion des kollektiven Modells nach Ziffer 4

### 1 Numerieren der Personen im individuellen Modell

Für alle Personen seien bekannt: Alter, Geschlecht sowie Lohn bzw. Rentenhöhe. Die Rentner und Aktiven können wie folgt numeriert werden (Index  $j$ ):

$$\begin{array}{l}
 j \\
 \left. \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \widehat{R}_0 \end{array} \right\} \text{Rentner mit sofortigem Anspruch auf Teuerungsanpas-} \\
 \text{sung (Alter: grösser als } s_j) \\
 \left. \begin{array}{l} \widehat{R}_0 + 1 \\ \vdots \\ R_0 \end{array} \right\} \text{Rentner mit Anspruch auf Teuerungsanpassung nach} \\
 \text{Ablauf der Wartefrist von 1 Jahr (Alter: } s_j) \\
 \left. \begin{array}{l} R_0 + 1 \\ \vdots \\ R_0 + d_1 \end{array} \right\} \text{Aktive des Alters } s_j - 1) \\
 \vdots \\
 \left. \begin{array}{l} R_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_k + 1 \\ \vdots \\ R_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_k + d_{k+1} \end{array} \right\} \text{Aktive des Alters } s_j - k - 1 \\
 \text{u. s. w. (bis zum jüngsten Versicherten)}
 \end{array}$$

### 2 Entwicklung des Lohnes (und der anwartschaftlichen Rente)

Es seien

$g_j(t)$  Lohn des Aktiven  $j$  am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres

$c_j(t)$  Rente des Rentners  $j$  am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres (nach Teuerungsanpassung)

Für die Aktive des Alters  $s_j$  gilt (am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres):

Lohn Vorjahr:  $g_j(t - 1)$

Rente:  $c_j(t) = (\text{Rentensatz})_j \cdot g_j(t - 1)$

Ferner wird angenommen, dass die Entwicklung der Lohnsumme  $G(t)$  vorgegeben sei. In unseren Berechnungen setzen wir:

$$G(t) = \sum_{j=R_0+1}^{R_0+n} g_j(t)$$

(Vgl. dazu die nachfolgende Ziffer 3)

### 3 Ersatz der Sterbefälle im Aktivenbestand durch neue Versicherte

Annahme

Unter der Voraussetzung, dass unsere Berechnungen bis zum Anfang des Jahres  $t_{\max}$  durchzuführen sind, nehmen wir an, dass die Sterbefälle im Aktivenbestand (von Aktiven der Nummern  $R_0 + 1, \dots, R_0 + d_{t_{\max}-1}$ ) ersetzt werden durch Personen, die jünger sind als  $s_j - (t_{\max} - 1)$ .

(Die letzte Gleichung der vorausgehenden Ziffer ist dann immer erfüllt.)

### 4 Zuordnung der Ehefrauen bzw. Witwen zu den aktiven und pensionierten Männern

Der Mann  $j$  hat im  $t$ -ten Jahr das Alter  $x_j + t$ . Diesem Mann wird am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres mit Wahrscheinlichkeit  $h_{x_j+t}$  eine Frau des Alters  $y_{x_j+t}$  (nach Kollektivversicherungsgrundlagen) zugeordnet, falls  $j$  im  $t$ -ten Jahr stirbt (mit der Nummer  $j_t$ ).

Für  $t' > t$  wird definiert:

$p_j(t, t')$ : Wahrscheinlichkeit, dass  $j_t$   $t'$  Jahre nach Beginn des Vertrags (d. h. am Anfang des  $(t' + 1)$ -ten Jahres) noch lebt

$q_j(t, t')$ : Wahrscheinlichkeit, dass  $j_t$  während des  $t'$ -ten Jahres stirbt.

Es gilt:

$$p_j(t, t') + q_j(t, t') = p_j(t, t' - 1); \quad t' > t + 1$$

## 5 Barwerte

Es werden definiert:

- $\ddot{a}_j(t)$  Barwert der sofort beginnenden Altersrente des Versicherten  $j$  (inkl. anwartschaftliche Witwenrenten) am Anfang des  $(t + 1)$ -ten Jahres  
 $\ddot{a}_j(t, t')$ ,  $t' \geq t$  Barwert der sofort beginnenden Witwenrente der Frau  $j_t$  am Anfang des  $(t' + 1)$ -ten Jahres

## 6 Einzelschadenverteilung

$$\begin{aligned}
 & p\left(X_j(t) - Z_j(t) < \xi\right) \\
 &= p_j(t) \cdot H\left(\xi - c_j(t-1)(\ddot{a}_j(t) \cdot \kappa_t - \ddot{a}_j(t-1) \cdot \Delta i_t)\right) \\
 &\quad + q_j^0(t) \cdot H\left(\xi - c_j(t-1)(-\ddot{a}_j(t-1) \cdot \Delta i_t)\right) \\
 &\quad + q_j^w(t) \cdot H\left(\xi - c_j(t-1)(\alpha \cdot \ddot{a}_j(t, t)\kappa_t - \ddot{a}_j(t-1) \cdot \Delta i_t)\right) \\
 &\quad + q_j^0(t-1) \cdot H(\xi) \\
 &\quad + q_j^w(t-1) \cdot \left\{ p_j(t-1, t) \cdot H\left(\xi - c_j(t-1) \cdot \alpha(\ddot{a}_j(t-1, t)\kappa_t - \ddot{a}_j(t-1, t-1) \cdot \Delta i_t)\right) \right. \\
 &\quad \quad \left. + q_j(t-1, t) \cdot H\left(\xi - c_j(t-1) \cdot \alpha \cdot (-\ddot{a}_j(t-1, t-1) \cdot \Delta i_t)\right) \right\} \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + q_j^0(\tau) \cdot H(\xi) \\
 &\quad + q_j^w(\tau) \cdot \left\{ p_j(\tau, t) \cdot H\left(\xi - c_j(t-1) \cdot \alpha(\ddot{a}_j(\tau, t)\kappa_t - \ddot{a}_j(\tau, t-1) \cdot \Delta i_t)\right) \right. \\
 &\quad \quad \left. + q_j(\tau, t) \cdot H\left(\xi - c_j(t-1) \cdot \alpha \cdot (-\ddot{a}_j(\tau, t-1) \cdot \Delta i_t)\right) \right\} \\
 &\quad + \text{usw.}
 \end{aligned}$$

Für Altersrentner aus  $\widehat{R}_0$  geht die Summation bis  $\tau = 0$ .  
Für die anderen Personen geht sie bis  $\tau = s_j + 1 - x_j$ .



## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden mehrere Modelle entwickelt, um verschiedene Möglichkeiten der Durchführung des Teuerungsausgleichs laufender Altersrenten in der beruflichen Vorsorge aufzuzeigen. Diese Modelle werden so ausgewählt, dass die Beantwortung wichtiger Fragen möglich ist. So interessieren nicht nur die gesamtschweizerischen Kosten unter verschiedenen Annahmen, sondern auch weitere Fragen. Beispielsweise wird die Durchführbarkeit durch eine einzelne Vorsorgeeinrichtung untersucht, allenfalls bei Vorgabe einer Minimalgrösse. Weitere Probleme betreffen eventuell notwendige Beschränkungen des vollen Teuerungsausgleichs, die Tragung von Spitzenrisiken u. a. m.

Solche Problemstellungen sind im wesentlichen risikotheorietischer Natur, da die Bestandeschwankungen der einzelnen Vorsorgeeinrichtungen und deren Überlagerung durch Schwankungen ökonomischer Natur (Zinsen, Inflation, Lohnentwicklung) grosse Auswirkungen haben. Vollständigkeitshalber werden nicht nur Modelle für ein allgemeines Obligatorium behandelt, sondern auch solche für eine freiwillige Versicherung.

Als mathematische Methode steht die Behandlung mehrdimensionaler Markoff-Ketten im Vordergrund, da die auftretenden Zufallsvariablen, im Gegensatz zu den meisten risikotheorietischen Ansätzen, nicht unabhängig im Zeitablauf sind. Dies gilt insbesondere auch durch Miteinbezug einer u. a. von zufälligen Ereignissen abhängigen Reservebildung.

## Résumé

L'article présente plusieurs modèles permettant d'étudier diverses manières d'établir, selon la LPP, la péreuation du renchérissement dans le domaine des rentes de vieillesse en cours. Ces modèles sont choisis de façon à pouvoir donner des réponses à des questions importantes. Les coûts globaux au niveau du pays sous des hypothèses diverses ne sont pas les seuls points qui retiennent l'attention, mais également, p. ex., les possibilités de réalisation par les institutions prises isolément (éventuellement de dimension suffisante). D'autres questions concernent les limitations éventuelles de la péreuation complète du renchérissement, la prise en charge des gros risques, etc.

Les questions de cette nature relèvent pour l'essentiel de la théorie de l'aléatoire vu que les fluctuations des effectifs des institutions prises individuellement et leur interférence avec les aléas de nature économique (intérêts, inflation, évolution des salaires) sont de grande importance. Pour être complet, l'article présente non seulement des modèles valables dans le cadre de l'assurance obligatoire, mais également dans celui de l'assurance facultative.

La méthode mathématique la plus utilisée est celle des chaînes de Markov à plusieurs dimensions, vu que les variables aléatoires qui interviennent, contrairement à ce qui se passe dans la plupart des processus aléatoires, s'altèrent avec le temps. Ce phénomène se rencontre notamment si l'on est amené à constituer p. ex. des provisions dépendant entre autres d'événements aléatoires.

## Summary

In this study, several models have been developed to show the various possibilities for effecting a cost-of-living adjustment to current retirement pensions within private pension plans. These models have been selected in such a way that important questions can be answered. Not only the total costs for Switzerland under the various assumptions are interesting, but also additional questions. For instance, the feasibility of achieving this adjustment through a single employee benefit plan, if need be subject to a minimum size, has been considered. Further questions concern

the possible necessity of limitations to the cost-of-living adjustment, carrying exceptional risks, etc.

Such problems are of a risk theoretical nature, in that the fluctuation of the number of employees and pensioners in the individual employee benefit plans together with the influence of economic fluctuations (interest rates, inflation, wage development) produce significant effects. In order to give a complete picture, not only models for a general compulsory insurance are considered but also those for voluntary insurance.

As an important mathematical method, multi-dimensional Markoff chains have been applied, because the occurring random variables, in contrast to the majority of approaches in risk theory, are not independent over periods of time, in particular also due to the inclusion of reserves influenced by random events.

4