

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** - (1987)

**Heft:** 2

**Rubrik:** Kurzmitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## D. Kurzmitteilungen

ROBERT F. TICHY, Wien

### Bemerkung zu einem versicherungsmathematischen Modell

*H. U. Gerber* [2] hat das folgende Modell in der kollektiven Risikotheorie eingeführt. Die Zufallsvariable  $X(t)$  bezeichnet dabei das Kapital einer Versicherungsgesellschaft zur Zeit  $t$ ; der Verlauf eines Pfades ist stückweise linear mit  $X(t) = x + ct$ , wobei  $c$  die Prämiedichte und  $x = x_0$  das Anfangskapital bezeichnet. Die Sprungstellen  $t_i$  (Schadensfälle) seien nach Poisson mit Parameter  $\lambda$  verteilt und die Sprunghöhen  $y = x_i + c(t_{i+1} - t_i) - x_{i+1} \geq 0$  (Schadenshöhen) nach einer vorgegebenen Verteilung  $F(y)$ . Stets wird  $c > \lambda \int_0^\infty y dF(y)$  vorausgesetzt. Ferner wird angenommen, dass das Kapital oberhalb einer vorgegebenen linearen Schranke  $b + at$  ( $b \geq 0$   $0 < a < c$ ) als Gewinn (Dividenden) abgeschöpft wird, d. h. die Höhe des Kapitals verläuft entlang der linearen Schranke bis zum nächsten Schadensfall.

Im Spezialfall exponentialverteilter Schadenshöhen ( $F(y) = 1 - e^{-y}$ ,  $y \geq 0$ ) hat *Gerber* [3] explizite Formeln für die Überlebenswahrscheinlichkeit  $U(x, b)$  der Versicherungsgesellschaft im betrachteten Modell (d. h. für die Wahrscheinlichkeit, dass  $X(t)$  stets  $\geq 0$  ist) und für den Erwartungswert der mit einem Faktor  $\delta$  verzinsten Dividendenzahlungen angegeben. Im allgemeinen Fall wurden in [2] Abschätzungen und asymptotische Formeln mit Martingalargumenten hergeleitet.

Es wird nun wie in [3] der Erwartungswert  $V$  der mit  $\delta$  verzinsten Dividenden berechnet, und zwar wird angenommen, dass die Dividendenzahlungen auch nach dem Ruin fortgesetzt werden. Dann ist  $V = V(u)$  eine Funktion in  $u = b - x$ . Aus dem Gesetz der vollständigen Wahrscheinlichkeit ergibt sich für  $u > 0$

$$V(u) = (1 - \delta dt)(1 - \lambda dt) V(u - (c - a)dt) + \lambda dt \int_0^\infty V(u + y) dF(y)$$

und mit  $V(u - (c - a)dt) = V(u) - (c - a)dt V'(u)$

$$(c - a)V'(u) + (\delta + \lambda)V(u) - \lambda \int_0^\infty V(u + y) dF(y) = 0. \quad (1)$$

Ein analoges Argument liefert die Randbedingung

$$V'(0) = -1. \quad (2)$$

In [3] wurde gezeigt, dass die Integrodifferentialgleichung (1) mit Randbedingung (2) genau eine stetige, beschränkte Lösung besitzt. Für den Fall  $F(y) = 1 - e^{-y}$  wurde die Lösung explizit bestimmt. Dies ist in einfacher Weise auch für den allgemeinen Fall möglich und liefert als Lösung eine Exponentialfunktion, was auch anschaulich zu erwarten ist. Man setzt an

$$V(u) = Ae^{-\varrho u} \quad (3)$$

und erhält durch Einsetzen in (1):

$$A(c-a)(-\varrho)e^{-\varrho u} + A(\delta + \lambda)e^{-\varrho u} - \lambda A \int_0^{\infty} e^{-\varrho u} e^{-\varrho y} dF(y) = 0.$$

Nun ist die Funktion

$$G(\varrho) = (c-a)(-\varrho) + (\delta + \lambda) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\varrho y} dF(y) \quad (4)$$

für  $0 \leq \varrho < \infty$  stetig und es gilt

$$G(0) = \delta > 0, \quad \lim_{\varrho \rightarrow \infty} G(\varrho) = -\infty. \quad (5)$$

Daher existiert eine positive Nullstelle  $\varrho_0$  von  $G(\varrho)$  und diese ist wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Problems eindeutig bestimmt. Aus (2) ergibt sich für  $A = 1 / \varrho_0$ , also

$$V(u) = \frac{1}{\varrho_0} e^{-\varrho_0 u}. \quad (6)$$

Betrachten wir kurz das Beispiel der  $\Gamma$ -Verteilung

$$dF(y) = \frac{1}{\Gamma(P)} y^{P-1} e^{-y} dy \quad (P \geq 1). \quad (7)$$

Es zeigt sich, dass  $\varrho_0$  die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung

$$\delta + \lambda = \frac{\lambda}{(\varrho + 1)^P} + \varrho (c - a) \quad (8)$$

ist.

Im folgenden betrachten wir den Erwartungswert  $W(x, b)$  der mit  $\delta$  verzinsten Dividendenzahlungen, die im Falle des Ruins abgebrochen werden. Ferner betrachten wir ein etwas allgemeineres Modell, wie in [3] vorgeschlagen wurde:  $c = c + \theta x$  soll linear vom Anfangskapital abhängen; d. h. durch eine Verzinsung (mit dem Faktor  $\theta$ ) bedingt, wird die Prämiedichte vom Anfangskapital beeinflusst. Wie zuvor kann eine Integrodifferentialgleichung

$$(c + \theta x) \frac{\partial W}{\partial x} + a \frac{\partial W}{\partial b} - (\delta + \lambda) W + \lambda \int_0^x W(x - y, b) dF(y) = 0 \quad (9)$$

für  $0 \leq x \leq b < \infty$  mit Randbedingung

$$\left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=b} = 1 \quad (10)$$

aufgestellt werden. Es wird nun der wichtige Spezialfall  $a = 0$  behandelt, d. h. die lineare Schranke zur Abschöpfung der Dividenden ist horizontal (für  $c \equiv \text{const}$  siehe [1]).

Dazu wird  $W(x, b) = W(x)$  ( $b$  fest) gesetzt und es ergibt sich für  $W(x)$  die Integrodifferentialgleichung

$$(c + \theta x) W'(x) - (\delta + \lambda) W(x) + \lambda \int_0^x W(x - y) dF(y) = 0. \quad (11)$$

Eine einfache Anwendung des Fixpunktsatzes von *Banach* zeigt (siehe auch am Ende der vorliegenden Note), dass (11) eine eindeutig bestimmte beschränkte Lösung (bei vorgegebenem  $W(0)$ ) besitzt. Diese Lösung  $W(x)$  besitzt daher eine Laplace-Transformierte  $\widetilde{W}(s)$ .

Wegen

$$\begin{aligned} \int_0^\infty W'(x) e^{-sx} dx &= s \widetilde{W}(s) - W(0), \\ \int_0^\infty x W'(x) e^{-sx} dx &= - \left( s \frac{d}{ds} \widetilde{W}(s) + \widetilde{W}(s) \right) \end{aligned}$$

folgt aus (11):

$$c(s\widetilde{W}(s) - W(0)) - \theta \left( s \frac{d}{ds} \widetilde{W}(s) + \widetilde{W}(s) \right) - (\delta + \lambda) \widetilde{W}(s) + \lambda \widetilde{W}(s) \varphi(s) = 0 \quad (12)$$

mit  $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dF(y)$ . Nun setzt man  $(\theta \neq 0)$

$$\widetilde{P}(s) = \frac{-cs + \theta + \delta + \lambda - \lambda \varphi(s)}{\theta s}, \quad \widetilde{Q}(s) = -\frac{c}{\theta s} \quad (13)$$

und erhält als Lösung von (12)

$$\widetilde{W}(s) = -W(0) \exp \left( - \int_1^s \widetilde{P}(t) dt \right) \cdot \int_s^\infty \widetilde{Q}(t) \exp \left( \int_1^t \widetilde{P}(u) du \right) dt. \quad (14)$$

Da  $\widetilde{W}(s) = O\left(\frac{1}{s}\right)$ , existiert die inverse Laplace-Transformation von  $\widetilde{W}(s)$ , und Rücktransformation liefert daher

$$W(x, b) = W(0, b) \cdot G(x), \quad (15)$$

wobei  $G(x)$  die inverse Laplace-Transformierte von

$$\exp \left( - \int_1^s \widetilde{P}(t) dt \right) \cdot \int_1^s \widetilde{Q}(t) \exp \left( \int_1^t \widetilde{P}(u) du \right) dt$$

bezeichnet.

Die Randbedingung (10) ergibt dann zusammen mit (15)

$$\left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=b} = 1 = W(0, b) \cdot G'(b),$$

d. h.  $W(0, b) = 1 / G'(b)$ .

Insgesamt hat man daher die explizite Formel

$$W(x, b) = \frac{G(x)}{G'(b)} \quad (\text{für } \theta = 0 \text{ siehe [1]}). \quad (16)$$

Abschliessend sei bemerkt, dass eine einfache Anwendung des Fixpunktsatzes von *Banach* zeigt, dass die Integrodifferentialgleichung (9) mit Randbedingung (10) eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Man braucht dazu nur den Integraloperator

$$\begin{aligned}
 & (Ag)(x, b) \\
 = & \int_0^{(b-x)/(c+\theta x-a)} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+(c+\theta x)t} g(x+(c+\theta x)t-y, b+at) dF(y) dt \\
 & + \int_{(b-x)/(c+\theta x-a)}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{b+at} g(b+at-y, b+at) dF(y) dt \\
 & + \frac{c+\theta x-a}{\lambda+\delta} \exp\left(-(\lambda+\delta) \frac{b-x}{c+\theta x-a}\right)
 \end{aligned}$$

sowie die Abschätzung

$$|(Ag_1)(x, b) - (Ag_2)(x, b)| \leq \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \|g_1 - g_2\|$$

zu beachten. Somit ist diese Lösung von (10) + (9) im Falle  $a = 0$  durch (16) gegeben (insbesondere ist auch  $G'(b) \neq 0$ ).

Robert F. Tichy  
 Institut für Analysis,  
 Technische Mathematik und Versicherungsmathematik  
 TU Wien  
 Wiedner Hauptstrasse 8–10  
 A-1040 Wien

## Literatur

- [1] *Bühlmann, H.*: Mathematical methods in risk theory. Springer Verlag, New York 1970.
- [2] *Gerber, H. U.*: Martingals in risk theory. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 73, 205–216.
- [3] *Gerber, H. U.*: On the Probability of Ruin in the Presence of a Linear Dividend Barrier. Scand. Actuarial J., 1981, 105–115.
- [4] *Wolff, K. H.*: Versicherungsmathematik. Springer Verlag, Wien 1970.



ERHARD KREMER, Hamburg

## An improved approximation of the ultimate ruin probability

A very old problem of risk theory is the calculation of the probability of ruin for the risk business. First results go back to *Lundberg* (1909) and *Cramér* (1955). In the past twenty years those classical results were generalized into many directions and more generalized models were developed (see *Janssen* (1981)). Only recently the numerical evaluation of the classical formulas for the ruin probability became of interest for the risk theorists. For example *Beekman* gave an interesting expansion (*Beekman* (1985)), *De Vylder* a simple, but crude approximation (*De Vylder* (1978)), and *Goovaerts/De Vylder* (1984) a numerical discretization method. Also the author gave a contribution (*Kremer* (1987)), pointing at the possibility of applying some renewal theoretical approximation formulas. Already *Seal* (1983) discussed a method similar to one of the author's (1987) approximate results. *Seal's* method (3) is based on a renewal equation for the nonruin probability, whereas the author's three methods were based directly on the renewal equation for the ruin probability. *Seal* showed in an example that his method (3) based on *Bartholomew's* (1963) result is too crude. The author uses in his (1987) paper a refinement of *Bartholomew's* (1963) result, published by *Deligönül* (1985). Let us now follow *Seal's* approach replaced by *Deligönül's* (1985) instead of *Bartholomew's* (1963) result. The renewal equation for the nonruin probability  $U(u)$  with finite initial surplus  $u \geq 0$  is given by:

$$U(u) = U(0) + \int_0^u U(u-y) \cdot h(y) dy,$$

where the density  $h$  is defined according:

$$h(y) = \left( \frac{1 - F(y)}{\mu} \right)$$

with the distribution function  $F$  of a single claim and the corresponding mean:

$$\mu = \int_0^\infty (1 - F(y)) dy = \int_0^\infty xF(dx)$$



The renewal equation holds for the classical compound Poisson risk model (see *Gerber* (1980)) with yearly premium:

$$c = (1 + \Lambda) \cdot \lambda \cdot \mu,$$

where  $\mu$  is defined above,  $\lambda$  is the mean claims number and  $\Lambda$  the security loading. It is well-known that with the solution  $\Phi$  of:

$$\Phi(u) = \int_0^u (1 - \Phi(u - y)) \cdot h(y) dy$$

one has in our special situation (see *Kohlas* (1975)):

$$\boxed{U(u) = U(0) \cdot [1 + \Phi(u)]}. \quad (1)$$

According to *Deligönül's* result (1985) we have the approximation:

$$\boxed{\Phi(u) \approx \lambda_* \cdot u - H_*(u) + \int_0^u (1 - H_*(u - y)) \cdot \left[ h(y) + \lambda_* \cdot \left( \frac{H^2(y)}{H_*(y)} \right) \right] dy} \quad (2)$$

with:

$$\begin{aligned} H(y) &= \int_0^y h(t) dt, \\ H_*(y) &= \lambda_* \cdot \int_0^y (1 - H(t)) dt, \\ \lambda_* &= \left[ \int_0^\infty t \cdot h(t) dt \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Finally it is known that:

$$\boxed{U(0) = \frac{\Lambda}{1 + \Lambda}} \quad (3)$$

(see *Gerber* (1980)). According to the numerical results of *Deligönül's* paper (1985) one expects that the approximation method (1)–(3) is much more

precise than Seal's method (3). Obviously the method is easier to evaluate than the corresponding method (4.3) – (4.7) in *Kremer* (1987).

Prof. Dr. E. Kremer  
Universität Hamburg  
Institut für Mathematische Statistik  
Bundesstrasse 55  
D-2000 Hamburg 13

## References

- Bartholomew, D. W.* (1963): An approximate solution of the integral equation of renewal theory. J. R. Statist. Soc. B 25.
- Beekman, J. A.* (1985): A series for infinite time ruin probabilities. Insurance: Mathematics & Economics.
- Cramér, H.* (1955): Collective risk theory. A survey. Scandia Jubilee Volume. Stockholm.
- Deligönl, Z. S.* (1985): An approximate solution of the integral equation of renewal theory. J. Appl. Prob. 22.
- De Vylder, F.* (1978): A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. Scandinavian Actuarial Journal.
- Gerber, H. U.* (1980): An introduction to mathematical risk theory. Huebner Foundation.
- Goovaerts, M. / De Vylder, F.* (1984): A stable recursive algorithm for evaluation of ultimate ruin probabilities. Astin Bulletin, Vol. 14.
- Janssen, J.* (1981): Generalized risk models. Cahier du centre d'études de recherche opérationnelle, Vol. 23.
- Kohlas, J.* (1977): Stochastische Methoden des Operations Research. Teubner, Stuttgart.
- Kremer, E.* (1987): Some approximations of ultimate ruin probability for finite initial surplus. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik.
- Lundberg, F.* (1909): Über die Theorie der Rückversicherung. Trans. VI. Int. Congr. Act. 1.
- Seal, H. L.* (1983): Numerical probabilities of ruin when expected claim numbers are large. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

Addendum to “Hierarchical Credibility Revisited” by  
H. Bühlmann and W.S. Jewell, Bulletin 1, 1987

In the bibliography reference number 3 should read

*Norberg, R.* (1980) instead of *Norberg, R.* (1975)

We also should have mentioned

*Norberg, R.* (1986): Hierarchical Credibility: Analysis of a Random Effect  
Linear Model with Nested Classification, SAJ 204-222 (No.3–4).

*H. Bühlmann and W. S. Jewell*