

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** - (1987)

**Heft:** 1

**Artikel:** Parameterschätzung im hierarchischen Credibility-Modell nach B. Sundt

**Autor:** Mangold, Klaus-Peter

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-967147>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

KLAUS-PETER MANGOLD, München

## Parameterschätzung im hierarchischen Credibility-Modell nach B. Sundt<sup>1</sup>

Im zweistufigen hierarchischen Modell geht es darum, die Grössen  $M$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , die im dreistufigen Modell von *Bühlmann/Jewell* [1] noch vom Parameter  $\psi_l$  abhängen und  $M(\psi_l)$ ,  $F(\psi_l)$ ,  $G(\psi_l)$ ,  $H(\psi_l)$  heissen, zu schätzen.

Für die Darstellung hier erscheint mir eine etwas ausführlichere Bezeichnungsweise nützlich.

Es liegen  $s$  Kohorten vor. Zu jeder Kohorte  $k$  gehören  $N_k$  Risiken und für jedes Risiko  $j$  der Kohorte  $k$  wurden  $n_{jk}$  Beobachtungen  $X_{ijk}$  gemacht, die jeweils mit einer Gewichtung  $p_{ijk}$  versehen sind. Summationen über einen bestimmten Index werden durch einen an entsprechender Stelle stehenden Punkt gekennzeichnet, also z.B.

$$p_{\cdot jk} := \sum_{i=1}^{n_{jk}} p_{ijk} \quad (= : V_{jk}^{(1)})$$

Es bezeichnet

$$Y_{jk} := \frac{1}{p_{\cdot jk}} \sum_{i=1}^{n_{jk}} p_{ijk} X_{ijk} \quad \text{das Risikomittel}$$

$$Y_k := \frac{1}{p_{\cdot \cdot k}} \sum_{j=1}^{N_k} p_{\cdot jk} Y_{jk} \quad \text{das Kohortenmittel}$$

$z_{jk}^{(1)}$ : = den Credibility-Faktor von Risiko  $j$  in Kohorte  $k$ ,

$z_k^{(2)}$ : = den Credibility-Faktor der Kohorte  $k$ ,

$$B(\varphi_k) := \frac{1}{z_{\cdot k}^{(1)}} \sum_{j=1}^{N_k} z_{jk}^{(1)} Y_{jk} \quad \text{das Credibility-gewichtete Kohortenmittel}$$

<sup>1</sup> B. Sundt, Some Credibility Regression Models for the Classification of Individual Passenger Car Models, Kap. 4.3, S. 39 ff., ASTIN-Kolloquium, Tel Aviv, 1986.

und

$$B(\varphi) := \frac{1}{z_{\cdot\cdot}^{(1)}} \sum_{k=1}^s z_{\cdot k}^{(1)} B(\varphi_k).$$

Man sollte nun zwei Fälle unterscheiden:

Neben den üblichen Voraussetzungen der bedingten Unabhängigkeit und (in oberen Niveaus) auch Gleichverteilttheit gelte

$$\text{I) } \text{Var}(X_{ijk} | \vartheta_{jk}) = \frac{\sigma^2(\vartheta_{jk})}{p_{ijk}}$$

oder

$$\text{II) } \text{Var}(X_{ijk} | \vartheta_{jk}) = \sigma^2(\vartheta_{jk})$$

Für  $p_{ijk} = 1$  decken sich beide Fälle. Dann ist  $n_{jk} = p_{\cdot jk}$ . Sundt setzt Fall I voraus und gibt folgende Schätzer an:

$$F^* = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \left( \frac{1}{n_{jk} - 1} \sum_{i=1}^{n_{jk}} p_{ijk} (X_{ijk} - Y_{jk})^2 \right)$$

$$G^* = \frac{1}{p_{\cdot\cdot}} \sum_{k=1}^s \left( \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{N_k} p_{\cdot jk}^2 / p_{\cdot\cdot k}^2} \left( \sum_{j=1}^{N_k} p_{\cdot jk} (Y_{jk} - Y_k)^2 - (N_k - 1) F^* \right) \right)$$

$$H^* = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^s (z_{\cdot k}^{(1)})^2 / (z_{\cdot\cdot}^{(1)})^2} \left( \sum_{k=1}^s \frac{z_{\cdot k}^{(1)}}{z_{\cdot\cdot}^{(1)}} (B(\varphi_k) - B(\varphi))^2 - (s - 1) \frac{G^*}{z_{\cdot\cdot}^{(1)}} \right)$$

$$M^* = \frac{1}{z_{\cdot\cdot}^{(2)}} \sum_{k=1}^s z_k^{(2)} B(\varphi_k)$$

Auf den Fall mit  $n_{ijk} := p_{ijk} = 1$  aus [1] umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 F^* &= \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=1}^s \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \left( \frac{1}{1 - n_{jk}/n_{jk}^2} \left( \sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{1}{n_{jk}} (X_{ijk} - Y_{jk})^2 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=1}^s \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \left( \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n_{jk}} n_{ijk}^2 / n_{jk}^2} \left( \sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{n_{ijk}}{n_{jk}} (X_{ijk} - Y_{jk})^2 \right) \right) \\
 G^* &= \sum_{k=1}^s \frac{n_{\cdot k}}{n_{\cdot \cdot}} \left( \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{N_k} n_{jk}^2 / n_{\cdot k}^2} \right) \left( \sum_{j=1}^{N_k} \frac{n_{jk}}{n_{\cdot k}} (Y_{jk} - Y_k)^2 - (N_k - 1) \frac{F^*}{n_{\cdot k}} \right) \\
 H^* &= \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^s (z_{\cdot k}^{(1)})^2 / (z_{\cdot \cdot}^{(1)})^2} \left( \sum_{k=1}^s \frac{z_{\cdot k}^{(1)}}{z_{\cdot \cdot}^{(1)}} (B(\varphi_k) - B(\varphi))^2 - (s - 1) \frac{G^*}{z_{\cdot \cdot}^{(1)}} \right)
 \end{aligned}$$

und  $M^*$  wie oben.

Dass bei *Sundt* der Schätzer  $F^*$  im Aufbau etwas "aus der Reihe tanzt", liegt an der speziellen Voraussetzung I). Liegt Fall II) vor, so kann man leicht einen gleichartigen Aufbau der einzelnen Schätzer erkennen. Sofern ich die von *Sundt* nicht explizit motivierte Herleitung richtig nachvollzogen habe, beruhen die Schätzer auf folgendem "Bildungsgesetz":

Man geht jeweils von den beobachteten Varianzen auf den einzelnen Niveaus aus. Also

$$\text{für } F: \quad \sum_{i=1}^{n_{jk}} \frac{p_{ijk}}{p_{\cdot jk}} (X_{ijk} - Y_{jk})^2 \quad \text{für } \begin{matrix} k = 1, \dots, s \\ j = 1, \dots, N_k \end{matrix}$$

$$\text{für } G: \quad \sum_{j=1}^{N_k} \frac{p_{\cdot jk}}{p_{\cdot \cdot k}} (Y_{jk} - Y_k)^2 \quad \text{für } k = 1, \dots, s$$

$$\text{für } H: \quad \sum_{k=1}^s \frac{z_{\cdot k}^{(1)}}{z_{\cdot \cdot}^{(1)}} (B(\varphi_k) - B(\varphi))^2$$

Von diesen Grössen errechnet man den Erwartungswert und formt dann so um, dass man erwartungstreue Statistiken erhält. Die so erhaltenen Werte werden über alle darüber liegenden Niveaus gemittelt.

Allerdings ist mir nicht einleuchtend, wieso *Sundt* einmal (bei  $F^*$ ) gewöhnlich mittelt, während er das andere Mal (bei  $G^*$ ) gewichtet gemittelt hat. (Also einmal mit Gewicht  $1/N_k$ , das andere Mal mit  $p_{..k}/p_{...}$ .) Wie üblich begegnet man der Möglichkeit, dass  $G^* < 0$  und/oder  $H^* < 0$ , indem man  $\max(G^*, 0)$  bzw.  $\max(H^*, 0)$  ansetzt.

Entsprechend dieser Vorgehensweise ergäbe sich demnach für das dreistufige Modell aus [1] mit  $c$  Gesellschaften  $l$  (der Index  $l$  bezeichnet die jeweilige Gesellschaft):

Oben aufgeführte Schätzer  $F^*_l$ ,  $G^*_l$ ,  $H^*_l$  werden über ein weiteres Niveau (gewichtet oder ungewichtet?) gemittelt. Zur Schätzung von  $I$  setzt man an:

$$T := \sum_{l=1}^c \frac{z_{.l}^{(2)}}{z_{..}^{(2)}} (B(\psi_l) - B(\psi))^2$$

$$B(\psi_l) := \frac{1}{z_{.l}^{(2)}} \sum_{k=1}^{s_l} z_{kl}^{(2)} B(\varphi_{kl})$$

$$B(\psi) := \frac{1}{z_{..}^{(2)}} \sum_{l=1}^c z_{.l}^{(2)} B(\psi_l)$$

Daraus leitet sich ab:

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{z_{..}^{(2)}} \left( \sum_{l=1}^c z_{.l}^{(2)} \text{Var}(B(\psi_l)) - z_{..}^{(2)} \text{Var}(B(\psi)) \right) \\ &= \frac{1}{z_{..}^{(2)}} \cdot \left( \sum_{l=1}^c z_{.l}^{(2)} \left( \frac{H}{z_{.l}^{(2)}} + I \right) - z_{..}^{(2)} \left( \frac{H}{z_{..}^{(2)}} + \frac{\sum_{l=1}^c (z_{.l}^{(2)})^2}{(z_{..}^{(2)})^2} I \right) \right) \\ &= \frac{1}{z_{..}^{(2)}} (c-1) \cdot H + \left( 1 - \frac{\sum_{l=1}^c (z_{.l}^{(2)})^2}{(z_{..}^{(2)})^2} \right) \cdot I \end{aligned}$$

Man erhält also

$$I^* = \frac{1}{1 - \sum_{l=1}^c (z_{\cdot l}^{(2)})^2 / (z_{\cdot \cdot}^{(2)})^2} \left( \sum_{l=1}^c \frac{z_{\cdot l}^{(2)}}{z_{\cdot \cdot}^{(2)}} (B(\psi_l) - B(\psi))^2 - (c-1) \frac{H^*}{z_{\cdot \cdot}^{(2)}} \right)$$

und wohl

$$M^* = \frac{1}{z_{\cdot \cdot}^{(3)}} \cdot \sum_{l=1}^c z_l^{(3)} B(\psi_l)$$

Der Berechnungsablauf bei einem dreistufigen hierarchischen Modell sieht demnach folgendermassen aus:

1. Errechne  $F^*$
2. Errechne  $G^*$
3. Errechne  $z_{jkl}^{(1)}$  für  $l = 1, \dots, c$ ;  $k = 1, \dots, s_l$ ;  $j = 1, \dots, N_{kl}$
4. Errechne  $H^*$
5. Errechne  $z_{kl}^{(2)}$  für  $l = 1, \dots, c$ ;  $k = 1, \dots, s_l$
6. Errechne  $I^*$
7. Errechne  $z_l^{(3)}$  für  $l = 1, \dots, c$
8. Errechne  $M^*$
9. Errechne  $\widehat{M(\psi_l)}$  für  $l = 1, \dots, c$
10. Errechne  $\widehat{M(\varphi_{kl})}$  für  $l = 1, \dots, c$ ;  $k = 1, \dots, s_l$
11. Errechne  $\widehat{\mu(\vartheta_{jkl})}$  für  $l = 1, \dots, c$ ;  $k = 1, \dots, s_l$ ;  $j = 1, \dots, N_{kl}$

Klaus-Peter Mangold  
Münchener Rückversicherungs-Gesellschaft  
Königinstrasse 107  
Postfach 40 13 20  
D-8000 München 40

## Literatur

- [1] Bühlmann, H./Jewell, W.S., Hierarchical Credibility Revisited, MVSVM, Heft 1, 1987.