Kurzmitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **- (1987)**

Heft 1

PDF erstellt am: **27.07.2024**

D. Kurzmitteilungen

Im Zusammenhang mit der auf Seite 35 publizierten Arbeit von *Bühlmann/ Jewell*, die am gemeinsamen ASTIN-Kolloquium der deutschen und schweizerischen ASTIN-Gruppe vom 23. Januar 1987 in München vom ersten Autor vorgetragen wurde, sind uns die beiden folgenden Diskussionsbeiträge zugegangen.

A. GISLER, Winterthur

Einige Bemerkungen zum hierarchischen Credibility-Modell

1 Hierarchische Strukturen und Verfahren in der Praxis

Betrachtet man Statistiken und Tarifbücher in einer Erstversicherung, so wird man fast überall einen hierarchischen Aufbau feststellen. Einzelne Tarifpositionen werden zu Untergruppen, Untergruppen zu Gruppen, Gruppen zu Hauptgruppen usw. zusammengefasst.
Diese hierarchischen Strukturen spielen bei der Prämienfestlegung eine nicht unbedeutende Rolle. So wird bei der Beurteilung von Statistiken und von Ergebnissen gleichsam "top down" vorgegangen. Als erstes werden das Gesamtgeschäft einer Branche und die einzelnen Hauptgruppen betrachtet. Erst in zweiter und tieferer Priorität folgen die Gruppen, Untergruppen, Tarifpositionen usw. Eine Überarbeitung des Tarifs wird oft erst dann in Betracht gezogen, wenn der Tarif für eine Hauptgruppe oder eine bedeutende Gruppe unausgeglichen ist.
Dieses "top down"-Prinzip ist zum Teil auch in den Kalkulationsschemen zur Berechnung der Prämien verankert. Hier möchte ich die folgenden zwei Beispiele erwähnen:

a) Motorfahrzeug Haftpflichtversicherung in der Schweiz

Vorerst wird das Prämienniveau für eine gesamte Hauptgruppe festgelegt. Anschliessend wird sukzessive die Prämie für die tieferen Ebenen bestimmt, d.h. für die Gruppen, Untergruppen usw., bis man schlussendlich bei den einzelnen Tarifpositionen angelangt ist. Technisch geschieht das durch die sogenannte mathematische Verteilung des Schadenaufwandes. Der Gesamtschadenaufwand einer Hauptgruppe wird sukzessive verteilt, zuerst auf die Gruppen, dann von den Gruppen auf die Untergruppen usw. Massgebend für die Prämienberechnung einer Tarifposition ist dann nicht der für diese Tarifposition beobachtete Schadenbedarf, sondern der Schadenbedarf, welcher sich aufgrund dieser mathematischen Verteilung ergibt (siehe *F. Bichsel* (1982)).

b) Industrie-Feuer-Tarif in der Bundesrepublik Deutschland

Bei der Berechnung der Prämienrichtlinien für die Industrie-Feuer-Betriebsunterbrechung wendet der deutsche Sachverband ebenfalls ein "top down"-Verfahren an. Zuerst wird der Bedarf für die Branche als ganzes ermittelt. Dieser wird dann verteilt auf die "Bücher", dann innerhalb der "Bücher" auf "Gruppen von statistischen Konten" und schliesslich innerhalb dieser Gruppen auf die einzelnen "Konten". Der mathematische Apparat besteht darin, das Bühlmann-Straub-Modell hintereinander auf den verschiedenen Ebenen anzuwenden (siehe *J. Strauss* (1984)).

In der hierarchischen Credibility ist die hierarchische Struktur bereits im mathematischen Modell explizit enthalten. Die optimalen Credibility-Schätzer lassen sich streng mathematisch aus den Modellannahmen herleiten. Dies ist zweifellos der saubere mathematische Weg. Selbstverständlich wird man in der Praxis im Einzelfall überprüfen müssen, ob die Modellannahmen erfüllt sind. Ich bin aber überzeugt, dass das hierarchische Credibility-Modell für die Praxis von grosser Wichtigkeit ist.

Im folgenden werden einige Eigenschaften der Credibility-Prämien im hierarchischen Modell aufgezeigt, die mir für die Interpretation und die Anwendung in der Praxis wichtig scheinen. Dabei wird unter dem Begriff hierarchische Credibility stets Bezug genommen auf die Arbeit "Hierarchical Credibility Revisited" von *Bühlmann* und *Jewell*, die im gleichen Heft abgedruckt ist.

2 Notationen

Wir werden die gleichen Notationen und die gleichen Begriffe verwenden wie im Artikel von *Bühlmann* und *Jewell*. Aus Gründen der leichteren Lesbarkeit werden diese Notationen nochmals kurz summarisch aufgeführt.

	Land	Gesellschaft	Kohorte	Risiko	Daten
Stufe	4	3	2	1	0
Variable		ψ	Φ	Θ	$\mathfrak{D}$
Indexvariable		l	k	j	i
Linear suffiziente Statistik		$B(\psi_l)$	$B(\varphi_k)$	$B(\vartheta_j)$	
Credibility-Schätzer		$\widehat{M(\psi_l)}$	$\widehat{M(\varphi_k)}$	$\widehat{\mu(\vartheta_j)}$	
Credibility-Gewichte		$Z_l^{(3)}$	$Z_k^{(2)}$	$Z_j^{(1)}$	
Volumen		$V_l^{(3)}$	$V_k^{(2)}$	$V_j^{(1)} = n_j$	
Variation		I	H	G	F
Anzahl Beobachtungen				n_j	

Zur Bezeichnung der "Nachfolger" eines bestimmten "Knotens" im Baum werden wir ebenfalls dieselbe Notation wie *Bühlmann* und *Jewell* benützen, also z.B.

$\Phi(\psi_l)$ = Menge der φ's ("Kohorten"), die von ψ_l ("Gesellschaft l") abstammen;

$\mathfrak{D}(\varphi_k)$ = Menge aller Daten, die von φ_k (Kohorte k) abstammen.

Es mag das Verständnis erleichtern, wenn sich der Leser etwa folgende konkrete Situation vorstellt:

Risiko j: bestimmte Tarifposition

n_j: Anzahl Jahresrisiken dieser Tarifposition

X_{ij}: Schadenbedarf in der letzten Beobachtungsperiode für das Risiko Nr. i in der Tarifposition j

Y_j: beobachteter Schadenbedarf der Tarifposition j

Beachte:
- Für die Credibility-Schätzer werden als Daten nur die Y_j (und nicht die einzelnen X_{ij}) benötigt.
- $\sum_j n_j Y_j$ ist bei obiger Vorstellung der beobachtete Gesamtschadenaufwand.

3 Einige Eigenschaften der Credibility-Prämien im hierarchischen Modell

i) in der Praxis wird M aus den Daten geschätzt werden müssen. Der beste Schätzer im Sinn der quadratischen Abweichung ist

$$\hat{M} = \frac{\sum_l Z_l^{(3)} B(\psi_l)}{\sum_l Z_l^{(3)}} \tag{1}$$

Ersetzt man in der Berechnung der Credibility-Schätzer M durch $\hat{M}$, so gilt:

$$\sum_j n_j (\widehat{\mu(\vartheta_j)} - Y_j) = 0 \tag{2}$$

Bemerkung:
Das Resultat (2) habe ich von *Bühlmann* erfahren. Es kann durch direktes Nachrechnen verifiziert werden. Bei Bedarf kann der explizite Beweis beim Autor angefordert werden.

Kommentar:

- Die Credibility-Prämien $\widehat{\mu(\vartheta_j)}$ "garantieren" den Risikoausgleich über den ganzen Baum. Es kommt insgesamt auf dasselbe heraus, ob als reine Risikoprämie die individuelle Beobachtung (z.B. beobachteter Schadenbedarf der Tarifposition j) oder der Credibility-Schätzer $\widehat{\mu(\vartheta_j)}$ genommen wird. Dies ist eine äusserst wünschbare und äusserst wichtige Eigenschaft für die Praxis. Es ist zu beachten, dass die Formel (2) unabhängig von den Parametern F, G, H, I gilt und somit auch unabhängig ist von allfälligen Schätzwerten, die für diese Parameter eingesetzt werden.
- Da $\sum_j n_j Y_j =$ Gesamtschadenaufwand in der Beobachtungsperiode, so liefern die Grössen $n_j\widehat{\mu(\vartheta_j)}$ eine Verteilung dieses Gesamtschadenaufwandes auf die einzelnen Risiken j (z.B. Tarifpositionen).

ii) Auf den höheren Stufen ist im allgemeinen eine analoge Beziehung wie (2) nicht mehr gültig. Eine Ausnahme ist der Spezialfall, wo ein völlig symmetrischer Baum vorliegt.

Kommentar:

- Wird bereits auf einer höheren Stufe mit der Prämiendifferenzierung aufgehört, so ist die Summe der sich daraus ergebenden Risikoprämien im allgemeinen nicht mehr identisch mit dem beobachteten Gesamtschadenaufwand.

- Dies trifft insbesondere zu, wenn überhaupt keine Prämiendifferenzierung vorgenommen wird und allen Risiken die Einheitsprämie $\hat{M}$ verlangt wird. Auf den höheren Stufen führen somit die Credibility-Schätzer im allgemeinen nicht zu einer Verteilung des Gesamtschadenaufwandes.
- Auf den höheren Stufen gelten analoge Beziehungen zu (2) nur noch im Erwartungswert. So gilt z.B.

$$E[\hat{M}] = E[Y_j] \qquad \text{und somit auch}$$

$$E[\textstyle\sum_j n_j(\hat{M} - Y_j)] = 0$$

iii) Die in Abschnitt 1 erwähnten Prämienberechnungen aus der Praxis (Motorfahrzeug Haftpflichtversicherung in der Schweiz, deutscher Industrie-Feuertarif) haben die Eigenschaft, dass bei jedem Differenzierungsschritt das Gesamtprämienniveau der zu differenzierenden Gruppe nicht tangiert wird. Die auf den höheren Stufen berechneten Prämienniveaus entsprechen dann auch nach vollständig durchgeführter Tarifberechnung mit Differenzierung auf die feinste Stufe dem für die übergeordnete Gruppe resultierenden Wert.

Beim hierarchischen Credibility-Modell wird auch "top down" vorgegangen, indem sukzessive die Credibility-Schätzer der verschiedenen Stufen berechnet werden, bis man schliesslich auf Stufe 1 angelangt ist. Es stellt sich somit die Frage, ob die obige Eigenschaft auch hier gilt und ob die Credibility-Schätzer der höheren Stufen der mittleren Credibility-Prämie der betreffenden Gruppe nach gehabter Rechnung entspricht. Die Antwort ist nein!

Kommentar:

- Die Credibility-Schätzer der höheren Stufen entsprechen nicht der mittleren Credibility-Prämie, die für diese übergeordnete Gruppe herauskommen wird. Das mittlere Prämienniveau einer übergeordneten Gruppe kann erst am Schluss von unten her aufgrund der $\widehat{\mu(\vartheta_j)}$ berechnet werden.
- Es ist deshalb Vorsicht geboten bei der praktischen Interpretation der Credibility-Schätzer der höheren Stufen. Im Modell und im ganzen Berechnungsprozedere sind sie eine Art "Apriori Mittel" für die nächsttiefere Stufe.

iv) Um etwas mehr Einblick in den unter iii) aufgeführten Sachverhalt zu gewinnen, wollen wir den einfachen Fall eines völlig symmetrischen Baumes näher unter die Lupe nehmen. Ein vollkommen symmetrischer Baum ist dadurch charakterisiert, dass alle Knoten einer bestimmten Stufe genau gleich viele Nachfolgeknoten haben. Insbesondere ist auch die Anzahl Beobachtungen n_j für alle Risiken j gleich gross.
Es sei

n_ϑ: = Anzahl ϑ's pro φ-Knoten (Anzahl "Risiken" pro "Kohorte")

n_φ: = Anzahl φ's pro ψ-Knoten (Anzahl "Kohorten" pro "Gesellschaft")

$$\bar{Y}(\psi_l) := \Big(\sum_{Y_j \in \mathfrak{D}(\psi_l)} n_j Y_j\Big) \Big/ \Big(\sum_{Y_j \in \mathfrak{D}(\psi_l)} n_j\Big)$$

(Mittel aus den Beobachtungen der "Gesellschaft" l, z.B. Schadenbedarf der Gesellschaft l)

$$\bar{Y}(\varphi_k) := \Big(\sum_{Y_j \in \mathfrak{D}(\varphi_k)} n_j Y_j\Big) \Big/ \Big(\sum_{Y_j \in \mathfrak{D}(\varphi_k)} n_j\Big)$$

(Mittel aus den Beobachtungen der "Kohorte" k , z.B. Schadenbedarf der Kohorte k)

Im vollkommen symmetrischen Baum erhält man als lineare suffiziente Statistiken:

$$B(\varphi_k) = \bar{Y}(\varphi_k) \qquad B(\psi_l) = \bar{Y}(\psi_l)$$

Ferner sind die Credibility-Gewichte für alle Knoten einer bestimmten Stufe gleich, so dass wir den unteren Index fallenlassen. So schreiben wir z.B. $Z^{(2)}$ für das Credibility-Gewicht auf Stufe 2.
Wir wollen nun die durchschnittliche Prämie der "Gesellschaft" l (D_{ψ_l}) verfolgen, die aus den Credibility-Prämien der verschiedenen Stufen resultiert. Durch Rechnen erhält man:
Stufe 3:

$$D_{\psi_l}^{(3)} = \widehat{\mu(\psi_l)} = M + Z^{(3)}(\bar{Y}(\psi_l) - M)$$

Stufe 2:

$$D_{\psi_l}^{(2)} = \frac{1}{n_\varphi} \sum_{\varphi \in \Phi(\psi_l)} \widehat{\mu(\varphi)} = M + \widetilde{Z}^{(2)}(\bar{Y}(\psi_l) - M)$$

wobei $\widetilde{Z}^{(2)} = Z^{(3)} + Z^{(2)}(1 - Z^{(3)})$

Stufe 1:

$$D_{\psi_l}^{(1)} = \frac{1}{n_\vartheta n_\varphi} \sum_{\varphi \in \Phi(\psi_l)} \sum_{\vartheta \in \Theta(\varphi)} \widehat{\mu(\vartheta)} = M + \widetilde{Z}^{(1)}(\bar{Y}(\psi_l) - M)$$

wobei $\widetilde{Z}^{(1)} = \widetilde{Z}^{(2)} + Z^{(1)}(1 - \widetilde{Z}^{(2)})$

Es ist zu beachten, dass $Z^{(3)} \leqslant \widetilde{Z}^{(2)} \leqslant \widetilde{Z}^{(1)}$

Feststellung

Die aus den Credibility-Prämien resultierende durchschnittliche Prämie für die Gesellschaft l (Knoten ψ_l) verändert sich, wenn man von Stufe zu Stufe den hierarchischen Baum hinuntersteigt. Je weiter man hinuntersteigt, um so mehr Gewicht erhält die individuelle Schadenerfahrung der "Gesellschaft" als ganzes.

Kommentar:

- In der hierarchischen Credibility erhält die Schadenerfahrung einer übergeordneten Gruppe als ganzes um so mehr Gewicht, je weiter man den hierarchischen Baum hinuntersteigt. Das nach "gehabter Rechnung" für eine übergeordnete Gruppe aus den $\widehat{\mu(\vartheta_j)}$ resultierende Prämienniveau trägt der individuellen "Gruppenerfahrung" mehr Rechnung als der entsprechende Credibility-Schätzer der übergeordneten Stufe.
- Die obige Feststellung mag auf den ersten Blick etwas überraschen. Der tiefere mathematische Grund liegt darin, dass die Heterogenität mit abnehmender Stufe zunimmt, d.h.
  $\mathrm{Var}[M(\Psi)] \leqslant \mathrm{Var}[M(\Phi)] \leqslant \mathrm{Var}[\mu(\Theta)]$.
- In der Praxis wird nicht immer zum vornherein feststehen, wieviel Stufen das Modell enthalten soll. Als Faustregel kann gesagt werden, dass die individuelle Erfahrung um so mehr Gewicht erhält, je mehr Stufen im Modell eingebaut werden.

4 Ausblick

i) Wie in Abschnitt 1 dargelegt, sind hierarchische Strukturen häufig in der Praxis anzutreffen. Zur mathematischen Modellierung und Behandlung solcher Situationen dient das hierarchische Credibility-Modell.

ii) In der Praxis startet man oft nicht bei Null. Es ist bereits ein Tarif vorhanden, der jedoch aufgrund neuer Beobachtungen und aufgrund eingetretener Veränderungen in der Risikocharakteristik überarbeitet werden soll. Dies ruft nach rekursiven Credibility-Formeln (siehe z.B. *Gerber, H.U.* und *Jones, D.A.* (1975), *Sundt* (1981)).

iii) Grossschäden können die Brauchbarkeit und Genauigkeit der Credibility-Schätzer nachteilig beeinflussen. Abhilfe kann geschaffen werden durch Credibility-Schätzer mit Stutzen der Daten (siehe *Gisler* (1980)).

Diese drei Komponenten sollten nun miteinander verknüpft werden. Gesucht wären also rekursive Credibility-Schätzer mit Stutzen in einem hierarchischen Modell.
Vielleicht wird dadurch der eine oder andere Leser angeregt, in dieser Richtung weiterzuforschen.

Dr. A. Gisler
Winterthur Versicherungen
Postfach 357
8401 Winterthur

Literaturangaben:

Bichsel, F. (1982): The Mathematical Allocation of Claims Amounts for the Calculation of Swiss Motor Liability Premiums, XVI ASTIN Colloquium, Liège (Belgium).

Bühlmann, H. und *Jewell, W.S.* (1987): Hierarchical Credibility Revisited, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 1.

Gerber, H.U. und *Jones, D.A.* (1975): Credibility Formulas of the Updating Type, Transactions of the Society of Actuaries, Vol 27, pp. 51–66.

Gisler, A. (1980): Optimum Trimming of Data in the Credibility Model, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 3, pp. 313–325.

Strauss, J. (1984): Calculation of Premium Rates according to the new German Industrial Fire Tariff 82, Proceedings of the 4 Countries ASTIN-Symposium, Akersloot, pp. 63–74.

Sundt, B. (1981): Recursive Credibility Estimation, Scandinavian Actuarial Journal, No. 1, pp. 3–21.