Valeurs actuelles de rentes futures de survivants et méthode continue

MARC CHUARD, Zurich

Valeurs actuelles de rentes futures de survivants et méthode continue

1 Préambule

Un travail[1] présenté pour le diplôme fédéral d'expert en assurances de pensions nous a fourni l'occasion, en particulier, d'établir des formules, originales à notre connaissance, permettant de calculer, selon la méthode continue, les valeurs actuelles de rentes de survivants (veuves et orphelins) qui interviennent dans la gestion actuarielle des caisses de pensions. Les valeurs obtenues diffèrent de celles que l'on calcule avec la méthode traditionnelle. L'étude de ces différences n'entrait pas dans le cadre du travail mentionné. Mais les résultats auxquels elle conduit sont intéressants et c'est pourquoi elle fait l'objet des développements qui suivent.
Les formules traditionnelles de valeurs actuelles pour rentes futures, de veuves d'une part, et d'orphelins d'autre part, sont étroitement apparentées. Une particularité cependant les sépare: alors que, pour la rente future de veuve, sans prorata, la valeur actuelle est indépendante du fractionnement, il n'en va pas de même pour la valeur actuelles correspondante relative aux rentes d'orphelins. Cette particularité, sur laquelle l'attention a déjà été attirée[2], déploie également ses effets dans la question étudiée ici.
La valeur actuelle des rentes futures de survivants se calcule pour des hommes qui peuvent être actifs, invalides ou retraités. Afin d'alléger les développements nous ne considérerons que la catégorie des *hommes actifs*. C'est la plus importante de celles qu'une caisse de pensions doit gérer. Elle nécessite les formules actuarielles les plus développées et le passage aux formules pour les autres catégories d'assurés n'est pas difficile.

[1] Faisant l'objet de la référence [1].
[2] Référence [2]

2 Rente future de veuve

Pour la catégorie des "hommes actifs" la valeur actuelle de la rente future de veuve payée mensuellement, avec capital de trois termes annuels de rente en cas de remariage, se calcule, selon le procédé utilisé habituellement[3], au moyen de

$$\underline{\ddot{a}}_x^{aw3h(12)} = \frac{\overline{N}_x^{aw3h(12)}}{D_x^a}$$

où

$$\overline{N}_x^{aw3h(12)} = \overline{D}_x^{aw3h(12)} + \overline{D}_{x+1}^{aw3h(12)} + \cdots + \overline{D}_{64}^{aw3h(12)} + \frac{l_{65}^a}{l_{65}} \overline{N}_{65}^{w3h(12)}$$

avec

$$\overline{D}_x^{aw3h(12)} = v^{x+1/2}\left(d_x^{aa}\, w_{x+1/2}^a\, \ddot{a}_{y_{x+1/2}}^{w3h(12)} + b_x\, \underline{\ddot{a}}_{x+1/2}^{iw3h(12)}\right).$$

Le trait de soulignement ($\underline{\ddot{a}}$) ou de surlignement ($\overline{N}$, $\overline{D}$) que nous introduisons[4] précise que le procédé tient compte d'un prorata.
Désirant obtenir, avec la *méthode continue,* la valeur actuelle, pour un homme actif, de la rente future de veuve comprenant, en cas de remariage, un capital égal à trois fois l'unité de terme de rente, nous établissons la formule[5]

$$\overline{a}_x^{aw3h} = \int_0^\infty e^{-\int_x^{x+t} (\delta + \mu_\tau^a + \nu_\tau)\, d\tau} \left[\mu_{x+t}^a\, w_{x+t}^a\, \overline{a}_{y_{x+t}}^{w3h} + \nu_{x+t}\, \overline{a}_{x+t}^{iw3h}\right] dt$$

Elle dépend des valeurs actuelles $\overline{a}_{y_{x+t}}^{w3h}$ et $\overline{a}_{x+t}^{iw3h}$ qui se calculent,
la première avec

$$\overline{a}_y^{w3h} = \overline{a}_y^w + 3\, \overline{A}_y^{wh}$$

[3] Référence [3], formules (77), (78), (80).
[4] Même convention que dans référence [2].
[5] Référence [1], formule (46/1).

$$\text{où} \quad \bar{a}_y^w = \int_0^\infty e^{-\int_y^{y+t} (\delta + \mu_\tau^w + \kappa_\tau)\, d\tau}\, dt,$$

$$\text{et} \quad \bar{A}_y^{wh} = \int_0^\infty e^{-\int_y^{y+t} (\delta + \mu_\tau^w + \kappa_\tau)\, d\tau}\, \kappa_{y+t}\, dt,$$

la seconde avec

$$\bar{a}_x^{i\,w3h} = \int_0^\infty e^{-\int_x^{x+t} (\delta + \mu_\tau^i)\, d\tau}\, \mu_{x+t}^i\, w_{x+t}^i\, \bar{a}_{y_{x+t}}^{w3h}\, dt.$$

Dans ces relations, où évidemment n'apparaît pas de fractionnement m, interviennent

– les taux instantanés

δ	d'intérêt,	
$\mu_x^a,\ \mu_x^i,\ \mu_x$	de décès de l'homme,	à l'âge x
ν_x	d'invalidité de l'homme,	à l'âge x
μ_y^w	de décès de la veuve,	à l'âge y
κ_y	de remariage de la veuve,	à l'âge y

– les probabilités

$w_x^a,\ w_x^i,\ w_x$	pour l'homme, d'être marié au moment de son décès,	à l'âge x

– l'âge moyen

y_x	de la femme au moment du décès de son mari,	à l'âge x.

Conformément aux principes communément adoptés en technique actuarielle de la méthode discontinue traditionelle[6], la distinction entre actifs et invalides (indices, en haut à droite, a et i du taux instantané μ_x et de la probabilité w_x) cesse à l'âge normal de la retraite (65 ans pour les hommes). Pour les âges supérieurs, anciens actifs ou invalides et retraités sont confondus (μ_x et w_x sans indice en haut à droite); le taux instantané ν_x d'invalidité est dès lors nul.

[6] Notamment référence [3].

Le taux instantané d'intérêt δ est lié au taux annuel d'intérêt i par

$$\delta = \ln(1+i).$$

Quant à chacun des taux instantanés

$$\mu_x^a \quad \mu_x^i \quad \mu_x \quad \nu_x \quad \mu_y^w \quad \kappa_y$$

il est lié à la probabilité correspondante

$$q_x^a \quad q_x^i \quad q_x \quad i_x \quad q_y^w \quad h_y$$

par les relations

$$\gamma(t) = -\frac{d}{dt}\ln G(t) \qquad g(t) = 1 - \frac{G(t+1)}{G(t)}$$

où $\gamma(t)$ est le taux instantané et $g(t)$, la probabilité annuelle, relatifs l'un et l'autre à l'ordre simple $G(t)$.

L'application de la méthode continue impose l'emploi de procédés d'intégration numérique. Pour obtenir les valeurs actuelles que nous indiquerons dans la suite nous avons fait usage de la méthode des trapèzes limités par la corde.

Deux considérations permettent de se prononcer sur la différence entre les valeurs $\underline{\ddot{a}}_x^{aw3h(12)}$ et $\bar{a}_x^{aw3h}$:

1° la valeur actuelle *sans prorata* $\ddot{a}_x^{aw3h(m)}$ est indépendante[7] du fractionnement m;

2° la valeur actuelle *avec prorata* $\underline{\ddot{a}}_x^{aw3h(12)}$ est liée à la valeur actuelle sans prorata $\ddot{a}_x^{aw3h(12)}$ par

$$\underline{\ddot{a}}_x^{aw3h(12)} = \ddot{a}_x^{aw3h(12)} + \frac{1}{24}\bar{A}_x^{aw};$$

précisons que la valeur $\bar{A}_x^{aw}$ de la relation ci-dessus s'obtient par

$$\bar{A}_x^{aw} = \frac{\bar{M}_x^{aw}}{D_x^a} \qquad \text{où} \qquad \bar{M}_x^{aw} = \sum \bar{C}_x^{aw}$$

avec[8]

$$\bar{C}_x^{aw} = v^{x+1/2}\left(d_x^{aa}\, w_{x+1/2}^a + d_x^{ai}\, w_{x+1/2}^i\right) + v^{x+1}\, l_{x+1}^{ai}\, \bar{A}_{x+1}^{iw}$$

[7] Référence [2], paragraphe 2.
[8] Référence [2], formule (9).

et

$$\bar{A}_x^{iw} = \frac{\bar{M}_x^{iw}}{D_x^i}, \qquad \bar{M}_x^{iw} = \sum \bar{C}_x^{iw}, \qquad \bar{C}_x^{iw} = v^{x+1/2} d_x^i \, w_{x+1/2}^i .$$

On déduit des deux considérations énoncées que l'on peut poser $\bar{a}_x^{aw3h} = \ddot{a}_x^{aw3h(m)}$ et que, par conséquent, la différence $\underline{\ddot{a}}_x^{aw3h(12)} - \bar{a}_x^{aw3h}$ doit correspondre à la valeur actuelle 1/24 $\bar{A}_x^{aw}$ du prorata que $\underline{\ddot{a}}_x^{aw3h(12)}$ fait intervenir.
Il est possible d'illustrer par des valeurs numériques la conclusion qui précède. Pour cela nous adoptons les bases techniques EVK 1980 4%[9]. Afin de respecter rigoureusement les particularités de la méthode continue, nous avons établi les valeurs des taux instantanés, qu'elle fait intervenir, à partir des probabilités fournies dans les bases EVK 1980; pour cela, utilisant les relations de passage indiquées précédemment, nous avons, pour chaque cas, construit l'ordre $G(t)$ au moyen des probabilités $g(t)$ puis calculé le taux instantané $\gamma(t)$ en faisant usage de procédés de dérivation numérique. Compte tenu des écarts dus aux opérations nécessitées par l'application de la méthode continue, les valeurs numériques du tableau suivant apportent la confirmation attendue:

x	$\underline{\ddot{a}}_x^{aw3h(12)}$	$\bar{a}_x^{aw3h}$	$\underline{\ddot{a}} - \bar{a}$	$\frac{1}{24}\bar{A}_x^{aw}$
20	1,089	1,085	0,004	0,004
25	1,320	1,315	0,005	0,004
30	1,585	1,579	0,006	0,005
35	1,897	1,889	0,008	0,006
40	2,249	2,240	0,009	0,008
45	2,624	2,613	0,011	0,009
50	2,993	2,980	0,013	0,011
55	3,324	3,309	0,015	0,012
60	3,595	3,579	0,016	0,014

[9] Référence [3]

3 Rente future d'orphelins

La valeur actuelle de la rente d'orphelins, payée mensuellement, s'obtient usuellement, pour les "hommes actifs", au moyen de[10]

$$\underline{\ddot{a}}_x^{ak(12)} = \frac{\overline{N}_x^{ak(12)}}{D_x^a}$$

où

$$\overline{N}_x^{ak(12)} = \overline{D}_x^{ak(12)} + \overline{D}_{x+1}^{ak(12)} + \cdots + \overline{D}_{64}^{ak(12)} + \frac{l_{65}^a}{l_{65}} \overline{N}_{65}^{k(12)}$$

avec

$$\overline{D}_x^{ak(12)} = v^{x+1/2} (d_x^{aa}\, k_{x+1/2}\, \ddot{a}_{z_{x+1/2}}^{k(12)} + b_x\, \underline{\ddot{a}}_{x+1/2}^{ik(12)}).$$

Comme pour la rente de veuve, le trait de soulignement ($\underline{\ddot{a}}$) ou de surlignement ($\overline{N}$, $\overline{D}$) indique la prise en considération d'un prorata.
Les particularités qui caractérisent la *méthode continue* nous conduisent, pour la valeur actuelle de la rente future d'orphelin, à la formule[11]

$$\overline{a}_x^{ak} = \int_0^\infty e^{-\int_x^{x+t} (\delta + \mu_\tau^a + \nu_\tau)\, d\tau} [\mu_{x+t}^a\, k_{x+t}\, \overline{a}_{z_{x+t}}^k + \nu_{x+t}\, \overline{a}_{x+t}^{ik}]\, dt$$

Elle dépend des valeurs actuelles $\overline{a}_{z_{x+t}}^k$ et $\overline{a}_{x+t}^{ik}$ qui se calculent,
la première avec

$$\overline{a}_z^k = \overline{a}_{\overline{u-z}|} = \frac{1 - e^{-\delta(u-z)}}{\delta}$$

en admettant que la mortalité des enfants est nulle et que la pension d'orphelin est payée jusqu'à l'âge u (d'ordinaire, 20 ans),
la seconde avec

$$\overline{a}_x^{ik} = \int_0^\infty e^{-\int_x^{x+t} (\delta + \mu_\tau^i)\, d\tau} \mu_{x+t}^i\, k_{x+t}\, \overline{a}_{z_{x+t}}^k\, dt$$

[10] Référence [3], formules (87), (88), (90).
[11] Référence [1], formule (47/1).

Bien entendu le fractionnement m est absent des relations précédentes. Quant aux taux instantanés dont elles dépendent ce sont

$$\delta \quad \mu_x^a \quad \mu_x^i \quad \mu_x \quad \nu_x$$

rencontrés dans la valeur actuelle de la rente future de veuve, plus

- le nombre moyen k_x des orphelins ayant droit à une pension au moment où leur père décède à l'âge x,
- l'âge moyen z_x des orphelins ayant droit à une pension au moment où leur père décède à l'âge x.

La valeur actuelle *avec prorata* $\underline{\ddot{a}}_x^{ak(12)}$ est liée à la valeur actuelle *sans prorata* $\ddot{a}_x^{ak(12)}$ par

$$\underline{\ddot{a}}_x^{ak(12)} = \ddot{a}_x^{ak(12)} + \frac{1}{24} \bar{A}_x^{ak}$$

précisons que la valeur $\bar{A}_x^{ak}$ de la relation ci-dessus s'obtient par

$$\bar{A}_x^{ak} = \frac{\bar{M}_x^{ak}}{D_x^a} \qquad \text{où} \qquad \bar{\mathrm{M}}_x^{ak} = \sum \bar{C}_x^{ak}$$

avec[12]

$$\bar{C}_x^{ak} = v^{x+1/2} (d_x^{aa} + d_x^{ai}) \, k_{x+1/2} + v^{x+1} \, l_{x+1}^{ai} \, \bar{A}_{x+1}^{ik}$$

et

$$\bar{A}_x^{ik} = \frac{\bar{M}_x^{ik}}{D_x^i}, \qquad \bar{M}_x^{ik} = \sum \bar{C}_x^{ik}, \qquad \bar{C}_x^{ik} = v^{x+1/2} d_x^i \, k_{x+1/2} .$$

Or, contrairement à la rente de veuve, la valeur actuelle de la rente d'orphelin, sans prorata, $\ddot{a}_x^{ak(m)}$ n'est *pas indépendante*[13] du fractionnement m.

On en conclut que la valeur actuelle $\bar{a}_x^{ak}$, calculée avec la méthode continue, est la limite vers laquelle tendent $\underline{\ddot{a}}_x^{ak(\infty)}$ et $\ddot{a}_x^{ak(\infty)}$ lorsqu'on fait tendre vers ∞

[12] Référence [2], formule (14).

[13] Référence [2], paragraphe 3.

le fractionnement m, et qui sont égales entre elles. Par conséquent la différence $\underline{\ddot{a}}_x^{ak(12)} - \overline{a}_x^{ak}$ doit correspondre à la différence $\underline{\ddot{a}}_x^{ak(12)} - \underline{\ddot{a}}_x^{ak(\infty)}$.
Pour une illustration numérique nous suivons la même voie que dans le cas précédent de la rente future de veuve, et obtenons les valeurs du tableau qui suit. Les écarts qu'elles font apparaître sont faibles et la confirmation qu'elles apportent est très satisfaisante.

x	$\underline{\ddot{a}}_x^{ak(12)}$	$\overline{a}_x^{ak}$	$\underline{\ddot{a}} - \overline{a}$	$\underline{\ddot{a}}_x^{ak(12)} - \underline{\ddot{a}}_x^{ak(\infty)}$
20	0,2068	0,2063	0,0005	0,0003
25	0,2482	0,2477	0,0005	0,0004
30	0,2850	0,2846	0,0004	0,0004
35	0,3076	0,3070	0,0006	0,0005
40	0,2925	0,2919	0,0006	0,0005
45	0,2364	0,2359	0,0005	0,0004
50	0,1558	0,1555	0,0003	0,0003
55	0,0775	0,0775	0,0000	0,0001
60	0,0327	0,0327	0,0000	0,0000

4 Remarque finale

La justification des différences entre les valeurs actuelles obtenues par la voie habituelle, basée sur des probabilités, et celles auxquelles conduit la méthode continue, qui fait intervenir des taux instantanés, est particulièrement intéressante lorsqu'il s'agit de rentes futures de survivants associées aux rentes de retraite et d'invalidité. En effet les formules de ces valeurs actuelles dépendent de nombreux éléments. Malgré les complications qui en résultent, des raisonnements de caractère général permettent de fournir les explications désirées.
S'agissant des rentes de survivants on constate que l'approche actuarielle est différente selon qu'il s'agit des veuves ou des orphelins. Cela est dû à une particularité, signalée antérieurement: la valeur actuelle de la rente sans prorata n'est indépendante du fractionnement que pour la rente de veuve.

Une illustration numérique concrétise les conclusions présentées. Elle doit surmonter cependant les difficultés de calcul inhérentes à la méthode continue et à la fixation de taux instantanés correspondant aux probabilités du procédé traditionnel.

Marc Chuard
VITA
Compagnie d'assurances sur la vie
Case postale
8022 Zurich

Références

[1] *Chuard, Marc*: L'application de la méthode continue dans la gestion actuarielle des caisses de pensions. Cahiers N[os] 14 a et 14 b de l'Institut de sciences actuarielles de l'Université de Lausanne, 1985.
[2] *Chuard, Marc*: Analyse des valeurs actuelles de rentes futures de survivants. Bulletin de l'Association des actuaires suisses, 1984.
[3] Technische Grundlagen der Eidgenössischen Versicherungskasse (EVK 1980), Text. Bern, 1980.

Résumé

L'auteur fournit les formules des valeurs actuelles pour rentes de veuve et pour rentes d'orphelins selon la méthode continue. Il justifie les différences entre les résultats fournis par ces formules et ceux auxquels conduit le procédé utilisé habituellement. Des exemples numériques illustrent les conclusions.

Zusammenfassung

Der Verfasser gibt die Formeln der kontinuierlichen Methode für den Barwert der Witwen- und der Waisenrente an. Er erklärt die Differenz zwischen den mit diesen Formeln und den mit gewöhnlich gebrauchten Formeln gerechneten Werten. Zahlenbeispiele begleiten die Erklärungen.

Abstract

The author presents the formulae for the present value of widows' and orphans' annuities based on the method of continuous discounting. He explains the differences between the results obtained in this way as compared to the usual ones. Some numerical examples illustrate the conclusions.