Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1986)

Heft: 2

Artikel: Aus der mathematischen Statistik und der Risikotheorie in der Versicherung

Autor: Ammeter, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967052

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

Hans Ammeter, Zürich

Aus der mathematischen Statistik und der Risikotheorie in der Versicherung

Am 19. Februar 1981 hat unser am 10. März dieses Jahres verstorbene Ehrenpräsident seine Abschiedsvorlesung an der ETH gehalten. Dieser Vortrag ist bisher nicht weiter publiziert worden. Er enthält eine Übersicht über das vielfältige wissenschaftliche Werk unseres dahingegangenen Kollegen und zudem verschiedene autobiographische persönliche Erinnerungen. Der Inhalt scheint es uns wert zu sein, nachträglich als Andenken an den unvergessenen Verstorbenen in den "Mitteilungen" veröffentlicht zu werden.

Das Redaktionskollegium

Le 19 février 1981, notre Président d'honneur, décédé le 10 mars dernier, tenait sa leçon d'adieux à l'EPF de Zurich. Jusqu'à ce jour, cet exposé n'a fait l'objet d'aucune publication; il fournit une vue d'ensemble de la production scientifique de feu notre collègue, ainsi que quelques souvenirs autobiographiques. Il nous semble indiqué, en mémoire du disparu toujours présent, de faire connaître cette leçon d'adieux à l'ensemble des lecteurs du "Bulletin".

La Rédaction

On February 19th, 1981, the honorary chairman of our association, who died on March 10th of this year, gave his farewell lecture at the Swiss Federal Institute of Technology. This lecture has not been published anywhere thus far. It contains an overview of the many-sided scientific life work of our late colleague together with some personal reminiscences. We consider the content of this lecture worthy to be published in our "Bulletin" in memory of its unforgettable author.

The Editorial Board

I Einleitung

Herzlichen Dank Ihnen allen, die Sie zu meiner Abschiedsvorlesung gekommen sind, die ich einem Rückblick auf meine wissenschaftliche Tätigkeit widmen möchte. Es schien uns sinnvoll, für das übliche Referat an der Preisfeier des Walter Saxer-Versicherungs-Hochschulpreises gerade meine Abschiedsvorlesung vorzusehen. Nun als Einleitung einige autobiographische Hinweise.

Schon während meiner Mittelschulzeit begann ich mich für eine Laufbahn als Versicherungsmathematiker zu interessieren. Mit Hilfe meines damaligen Mathematiklehrers konnte ich zu Herrn Prof. Marchand gelangen – ein Ihnen vielleicht noch bekannter Name –, der mir die nötigen Aufschlüsse über diesen Beruf gab. Prof. Marchand sagte damals, in diesem Beruf müsse man drei Stufen unterscheiden, nämlich den Hilfsrechner, den Versicherungstechniker und schliesslich den eigentlichen Versicherungsmathematiker mit Hochschulabschluss, wobei es in jeder Stufe möglich sei, in die nächsthöhere zu avancieren.

Nach bestandener Matura im Herbst 1932 meldete ich mich wieder bei ihm und bewarb mich gleichzeitig um eine Stellung als Versicherungstechniker bei der Rentenanstalt, da aus wirtschaftlichen Gründen für mich auf absehbare Zeit ein Hochschulstudium nicht möglich war. Damals war gerade die Zeit der grossen Wirtschaftskrise der dreissiger Jahre. So wurde ich zwar angestellt, aber nur als Hilfsrechner, und musste noch froh darüber sein, denn es war ausserordentlich schwierig, bei rund 100 000 Arbeitslosen in der Schweiz überhaupt irgendeine Anstellung zu finden.

Meine erste Aufgabe bestand darin, Prämien durch 1,1 zu dividieren. Niemand erklärte mir den Sinn dieser Arbeit, und ich hatte das Gefühl, ich müsse bald dabei verblöden. Ob das tatsächlich der Fall war, kann ich natürlich nicht selbst beurteilen. Aber jedenfalls nach einigen Monaten ging es dann besser, und ich wurde mit der praktischen Versicherungstechnik vertraut gemacht. Dazu erhielt ich auch eine sehr gute Einführung in die Lehren der Versicherungsmathematik in den Vorlesungen von Prof. Marchand an der ETH. Für mich war es ein Glück im Unglück meines schlechten Starts, dass ich in die Hände hervorragender Fachleute geriet, von denen ich neben Prof. Marchand den späteren Professor Wyss nennen möchte. Der letztere war immer bereit, mir zu helfen, indem er mich mit der massgebenden Literatur bekanntmachte und sogar auch über die Ideen des Anfängers diskutierte. Diesen beiden Lehrern schulde ich einen ganz besonderen Dank.

Nach und nach konnte ich so immer tiefer in das Lehrgebäude der Versicherungsmathematik eindringen, und nach zehn Jahren praktischer und theoretischer Tätigkeit veröffentlichte ich meine erste Arbeit über das Zufallsrisiko bei kleinen Versicherungsbeständen. So kam ich auch in Kontakt mit anderen Versicherungsmathematikern und wurde schon 1936 in die Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker aufgenommen. Auch hier fand ich Hilfe von verschiedenen Seiten. Dank schulde ich vor allem Prof. Walter Saxer und auch seinen Nachfolgern als Redaktoren der versicherungsmathematischen Zeitschrift in der Schweiz, den Herren Prof. Jecklin und Prof. Nolfi. Durch weitere Untersuchungen, die ich nach und nach veröffentlichte, wurde ich langsam bekannt, wobei die Anerkennung zuerst sichtlich ihren Schwerpunkt im Ausland fand, aber schliesslich auch in der Schweiz sich bemerkbar machte, vor allem durch die Verleihung der Ehrendoktorwürde der ETH im Herbst 1964, der dann bald auch ein Lehrauftrag folgte, wodurch ich mich lebenslänglich mit der ETH in Dankbarkeit verbunden fühle.
In meinen über 50 veröffentlichten Arbeiten habe ich mich wohl mit fast allen Einzelgebieten der Versicherungsmathematik befasst. Dabei habe ich meine praktische Herkunft nie verleugnet, indem ich mich eigentlich nur mit Problemen beschäftigte, die einen praktischen Hintergrund hatten, und erst zufrieden war, wenn auch das Problem der numerischen Berechenbarkeit gelöst war, was manchmal ganz besondere Schwierigkeiten barg. Im folgenden möchte ich nur zwei Gebiete behandeln, die fast zu Herzensanliegen auswuchsen, nämlich die mathematische Statistik in der Versicherung einerseits und die Risikotheorie andererseits.

II Die mathematische Statistik in der Versicherung

Ich beginne mit der mathematischen Statistik, weil ich dem XIII. Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker – dem ersten Kongress nach dem zweiten Weltkrieg – eine Arbeit* einreichte über die Anwendung des χ^2-Testes bei der Ausgleichung von Sterbetafeln nach mechanischen Methoden. Diese Arbeit fand überall grosse Anerkennung. Um was handelte es sich?

* Ein vollständiges Verzeichnis der Arbeiten Ammeters ist in Heft 1, 1986, Seite 7 ff., enthalten.

In der Versicherungsmathematik werden oft Sterbetafeln nach einer mechanischen Methode ausgeglichen, bei welcher der ausgeglichene Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x' nach der Formel (1) berechnet wird,

$$q_x' = \sum_{\nu=-k}^{+k} a_\nu q_{x+\nu} \tag{1}$$

d.h. sozusagen als gleitender Durchschnitt aus den $2k + 1$ Nachbarwerten der beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeit q_x. In dieser Formel sind die a_ν die Gewichte, mit denen die unausgeglichenen Nachbarwerte der beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x in den ausgeglichenen Wert q_x' eingehen. Es gibt eine ganze Reihe derartiger Formeln, die mit den Namen ihrer Erfinder – z.B. Woolhouse, Karup, Spencer, King usw. – verbunden sind.
Es ist üblich, die Güte der Ausgleichung durch das Kriterium χ^2 gemäss

$$\chi^2 = \sum_x \frac{(T_x - T_x')^2}{T_x'} \tag{2}$$

zu messen, das aus der Zahl der beobachteten Toten T_x und der nach der Ausgleichung erwarteten Zahl der Toten T_x' für alle Alter x in der Sterbetafel hervorgeht. Dadurch lässt sich ein objektiver Massstab für die Güte der Ausgleichung gewinnen. Die Grösse χ^2 lässt sich interpretieren als Quadratsumme von n *unabhängigen*, mit (0,1) normal verteilten Zufallsvariabeln, deren Verteilungsgesetz durch die von Pearson stammende χ^2-Verteilung gegeben ist:

$$f(\chi^2) = \frac{e^{-\chi^2/2}\,(\chi^2)^{(n/2)-1}}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \tag{3}$$

In dieser Formel bedeutet n die Anzahl der in der Sterbetafel auftretenden Alter, die gegebenenfalls bei analytischen Ausgleichungen für jeden aus den beobachteten Toten abgeleiteten Parameter der analytischen Sterbeformel um eine Einheit zu reduzieren ist; das so reduzierte n ist dann die Anzahl der Freiheitsgrade. Mit Hilfe der χ^2-Verteilung (3) kann dann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden für eine schlechtere Ausgleichung aus rein zufälligen Gründen, woraus sich die Beurteilung der Ausgleichung ergibt.

Die verblüffend einfache Anwendungsregel des χ^2-Tests bei analytischen Ausgleichungen hat leider dazu verführt, die genannte Freiheitsgradregel über ihre legitimen Grenzen hinaus anzuwenden, z.B. eben bei mechanischen Ausgleichungen. In diesem letzteren Fall kann die Grösse χ^2 nämlich *nicht* als eine Quadratsumme *unabhängiger* Zufallsvariablen interpretiert werden. Es handelt sich vielmehr um eine Quadratsumme untereinander *abhängiger* Zufallsvariablen, deren Verteilungsgesetz in meiner Kongressarbeit durch seine charakteristische Funktion hergeleitet worden ist. Diese charakteristische Funktion lässt sich in expliziter Form folgendermassen darstellen:

$$\varphi_{\chi^2}(t) = \{1 - c_1(2it) + c_2(2it)^2 - \ldots\}^{-1/2} \tag{4}$$

worin die Koeffizienten c_j sich aus den Gewichtskoeffizienten der mechanischen Ausgleichsformel a_ν berechnen lassen. Die charakteristische Funktion der klassischen χ^2-Verteilung von Pearson

$$\varphi_{\chi^2}(t) = \{1 - 2it\}^{-n/2} \tag{5}$$

ist darin als Spezialfall enthalten. Aus der charakteristischen Funktion der auf untereinander abhängige zufällige Variable verallgemeinerten χ^2-Verteilung lassen sich ihre Momente berechnen. Es zeigt sich, dass z.B. der Erwartungswert von χ^2 bei mechanischen Ausgleichungen proportional zu n ausfällt, wobei der Proportionalitätsfaktor beispielsweise für die in der Schweiz sehr beliebte Ausgleichsformel von King den Wert 0,825 annimmt.

Die Herleitung dieses eleganten Resultats hat mir vor 30 Jahren viel Mühe, aber auch Befriedigung gebracht, und schliesslich erlag ich der Versuchung, die verallgemeinerte χ^2-Verteilung auf weitere Probleme anzuwenden. Das hat unter anderem zu folgendem Ergebnis geführt, das ich in einer weiteren Arbeit veröffentlichte.

Es ist eine kleine Schwäche des klassischen χ^2-Tests, dass der Test nur schwach reagiert, wenn die zu prüfende Sterbetafel im Niveau zwar nur wenig, aber systematisch etwas zu hoch oder zu tief liegt. Das rührt daher, dass durch die Quadrierung der Differenzen zwischen den erwarteten und den beobachteten Toten das Vorzeichen der Differenzen keine Rolle mehr spielt. Diese Schwäche kann überwunden werden, wenn man die von einem Ende her akkumulierten standardisierten Differenzen quadriert, d.h. man bildet der Reihe nach die Quadratsummen nach Formel (6),

$$
\begin{array}{l}
\chi_1^2 \\
(\chi_1+\chi_2)^2 \\
(\chi_1+\chi_2+\chi_3)^2 \qquad \text{mit} \quad \chi_r = \sqrt{\dfrac{(T_r - T'_r)^2}{T'_r}} \\
\vdots \\
(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n)^2
\end{array}
\tag{6}
$$

wobei die einzelnen χ mit dem Vorzeichen der unquadrierten Differenz im Zähler der einzelnen χ_r eingesetzt werden, so dass sie sich wegen des wechselnden Vorzeichens in der akkumulierten Summe immer wieder aufheben. Die Summe

$$
(I\chi)^2 = \sum_x \left(\sum_r \chi_r\right)^2 \tag{7}
$$

sollte bei einer guten Ausgleichung klein ausfallen und bei einer schlechten grösser. Natürlich kann man nicht nur die Summe der χ vom untersten zum obersten Alter bilden, sondern auch umgekehrt vom obersten Alter zum untersten oder auch das arithmetische Mittel beider Summationen bilden, was nicht auf das gleiche herauskommt.
So ergibt sich der untere und der obere $(I\chi)^2$-Test und schliesslich der doppelseitige. Die einzelnen χ_r kann man wiederum als normal verteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert Null und der Streuung Eins betrachten. Die einzelnen Summanden der Quadratsumme haben jeweils den Erwartungswert 1, 2, 3, ..., n. Diesmal betrachten wir eine analytische Ausgleichung, ohne allerdings die Reduktion der Freiheitsgrade zu berücksichtigen. Dann sind die einzelnen χ untereinander stochastisch unabhängig, und der Erwartungswert von $(I\chi)^2$ ist beim unteren und oberen Test gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$. Dividiert man die Quadratsumme durch diesen Erwartungswert, so erhält man den Betrag 1 bei allen drei Tests. Das dermassen bestimmte einseitige Kriterium folgt, wie ich gezeigt habe, einer verallgemeinerten χ^2-Verteilung, deren charakteristische Funktion durch

$$
\varphi_{(I\chi)^2}(t) = \left\{1 + \binom{n+1}{2}\theta + \binom{n+2}{4}\theta^2 + \cdots + \binom{2n}{2n}\theta^n\right\}^{-1/2} \tag{8}
$$

$$
\text{mit} \quad \theta = 2it
$$

gegeben ist, während der Aufbau beim doppelseitigen Kriterium analog, aber etwas komplizierter ausfällt. Aus den Koeffizienten der Polynome kann man wiederum die Momente der zugrundeliegenden Verteilungen von $(I\chi)^2$ berechnen, woraus sich die zugrundeliegende Verteilung approximieren lässt, was wiederum eine objektive Beurteilung der Ausgleichung erlaubt.
Schliesslich habe ich verschiedene Methoden, vor allem asymptotische Annäherungen, entwickelt, welche die numerischen Berechnungen erleichtern. Ferner habe ich die Leistungsfähigkeit der neuen Kriterien untersucht. Dabei hat sich gezeigt, dass diese neuen Kriterien leistungsfähiger sind als das klassische χ^2-Kriterium, was zu erwarten war, allerdings nur, wenn man Gegenhypothesen betrachtet, die einseitig im Niveau zu hoch oder zu tief verlaufen. Diese Stärke fällt aber leider dahin, wenn man komplizierter verlaufende Gegenhypothesen betrachtet. Nicht gelöst habe ich das Problem, wie man die Ausgleichsmethode berücksichtigen müsste.
Die Auffindung der verallgemeinerten χ^2-Verteilung und ihre Anwendungen waren das erfreuliche Resultat einer mühevollen Arbeit. Vor allem musste ich dabei mein allgemein-mathematisches Rüstzeug beträchtlich erweitern.
Kurz nach jenem Zeitraum, in dem ich mich mit der verallgemeinerten χ^2-Verteilung beschäftigte, schrieb die Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker eine etwas allgemeinere Preisfrage aus über "Wahrscheinlichkeitstheoretische Kriterien für die Beurteilung der Ausgleichung einer Sterbetafel". Um am Preisausschreiben teilnehmen zu können, musste ich mich auf diesem Gebiet nochmals kräftig weiterbilden. Nach längeren Anstrengungen reichte ich eine Arbeit ein, die schliesslich von der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker "mit dem höchstmöglichen Preis" – so das Preiskomitee – ausgezeichnet wurde, wobei seinerzeit Prof. Saxer das Preiskomitee präsidierte. Ich beschränke mich im folgenden darauf, die Zusammenfassung der Schlussfolgerungen vorzulesen:

«1. Die Frage nach der Güte der verschiedenen Ausgleichungsmethoden ist durch die Fisherschen Kriterien – wenigstens für die analytischen Methoden – im wesentlichen abgeklärt. Es zeigt sich, dass bei analytischen Ausgleichungen die χ^2-Minimum-Methode als leistungsfähigste Methode zu gelten hat.
2. Im Laufe des 20. Jahrhunderts sind eine ganze Reihe von Testverfahren entwickelt worden, welche die wahrscheinlichkeitstheoretische Überprüfung von Ausgleichungen hinsichtlich

a) der in den einzelnen Altern auftretenden Abweichungen zwischen Ausgleichung und Beobachtung,
b) beider Gesichtspunkte gleichzeitig

erlauben. Mit Hilfe dieser Tests lässt sich die relative Güte von verschiedenen Ausgleichungen in objektiver Weise überprüfen.

3. Von den bis heute bekannten Kriterien zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Überprüfung von Ausgleichungen ist eigentlich nur das klassische χ^2-Verfahren von K. Pearson theoretisch genügend entwickelt, so dass es den bei analytischen und mechanischen Ausgleichungen auftretenden besonderen Verhältnissen Rechnung zu tragen vermag. Es ist wohl eine der wichtigsten Aufgaben für die weiteren Forschungen, die anderen Verfahren so auszubauen, dass auch sie die bei Ausgleichungen auftretenden Abhängigkeiten theoretisch einwandfrei berücksichtigen können.
4. Die Theorie von Neymann und Pearson lehrt, dass es keinen ‹Universal-Test› gibt, der bei beliebiger Gegenhypothese das schärfste Kriterium darstellt. Dieses theoretische Ergebnis wird durch die in der Arbeit dargestellten numerischen Untersuchungen bestätigt.
5. Leistungsfähigste Tests lassen sich angeben, sobald ihre Anwendung auf ganz bestimmte Arten von Gegenhypothesen beschränkt wird. Für einseitige Abweichungen (durchwegs zu grosse oder zu kleine Sterblichkeit) stellen die beiden $P(\lambda)$-Tests die leistungsfähigsten Kriterien dar.
6. Dem klassischen χ^2-Verfahren von K. Pearson kommt in dem Sinne der Charakter eines ‹Universal-Tests› zu, als es in allen Fällen zu einem eingermassen brauchbaren Ergebnis führt und niemals gänzlich unbrauchbar wird. Dieser universellen Anwendungsmöglichkeit steht der Nachteil gegenüber, dass für bestimmte Gegenhypothesen leistungsfähigere Spezialtests gefunden werden können.»

Soweit das zusammengefasste Ergebnis meiner Preisarbeit. Sie sehen, das Gebiet „mathematische Statistik in der Versicherung“ war schon damals ein ergiebiger Jagdgrund für junge Leute. Auch heute noch gibt es ungeklärte Probleme, so dass hier Futter für weitere Walter Saxer-Hochschulpreise zu finden ist.

III Die Risikotheorie

Meine Beschäftigung mit Sterbetafel-Ausgleichungen, die zu dem Dreigestirn von Arbeiten geführt hat, die ich soeben versucht habe Ihnen zu skizzieren, scheint eine Jugendliebe des Sprechenden aufzudecken. Die Bezeichnung "Seitensprung" wäre aber wohl zutreffender, denn ich habe schon vorher und während der Zeit des Seitensprungs, überhaupt lebenslang, meine grosse Liebe der sogenannten Risikotheorie zugewandt, auf die ich im folgenden zurückkommen will.

In meiner Jugendzeit, d.h. in den dreissiger und vierziger Jahren dieses Jahrhunderts, war das Ansehen der Risikotheorie vor allem unter den Praktikern ziemlich tief gesunken. Zum Teil waren hier Vorurteile im Spiel, indem man wichtige Arbeiten gar nicht verstand und daher die Risikotheorie als das Musterbeispiel einer unfruchtbaren Theorie schalt. Etwas fundierter war der Einwand, in der Lebensversicherung sei das technische Risiko im Vergleich zum kommerziellen Risiko weniger wichtig, und in der Sachversicherung wollte man ohnehin von der Mathematik nichts wissen. Von Gewicht war meines Erachtens lediglich der Einwand, dass die Theorie mit Annahmen arbeite, die in der Praxis nicht zutreffen. Dies zeigte sich darin, dass die Schwankungen in der Sterblichkeit und noch viel mehr die Schwankungen der Schadenzahlen in der Sachversicherung grösser sind als nach der Poisson-Verteilung. Dies hat eine Arbeit von Lange gezeigt, welche die Schwankungen der preussischen Volkssterblichkeit untersuchte. Dieses Resultat bestätigte ich durch eine eigene breitangelegte Untersuchung im Versicherungsbestand der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt. Es schien mir daher dringend nötig, durch besser angepasste Grundlagen die Risikotheorie mit ihren wertvollen und grundlegenden Möglichkeiten wieder in den Sattel zu heben. Ich versuchte dies durch ein verallgemeinertes Urnenschema in einer 1948 veröffentlichten Arbeit.

In der klassischen Theorie wird eine Urne mit schwarzen und weissen Kugeln angenommen, wobei das Mischungsverhältnis die Schadenswahrscheinlichkeit veranschaulicht. Aus dieser Urne werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen, wobei in der Lebensversicherung die schwarzen Kugeln die beobachteten Toten und die weissen Kugeln die Überlebenden symbolisieren sollten. Daraus ergibt sich die Binomialverteilung, die durch verschiedene Grenzübergänge für grosse Zahlen in die Poisson- und schliesslich in die Normalverteilung übergeführt werden kann. Auf dieser Grundlage, vor allem mit der Poisson-Verteilung, arbeitet auch die vom Schweden Filip

Lundberg entwickelte kollektive Risikotheorie, die gegenüber der bisherigen individuellen Theorie – vor allem nach der verbesserten Darstellung von Cramér – schon einen gewaltigen Fortschritt realisierte, aber ausserhalb Schwedens eigentlich nicht verstanden wurde und daher zumeist weitgehend unbekannt blieb.

Die einzige Urne im klassischen Schema ersetzte ich durch eine Reihe von Urnen mit systematisch ändernden Mischungsverhältnissen der schwarzen und weissen Kugeln, welche die in den verschiedenen Jahren durch Änderungen z.B. in den Witterungsverhältnissen und auch durch andere Ursachen bedingten Grundschwankungen in den Schadenswahrscheinlichkeiten repräsentieren sollten. Neben dieser Reihe von Urnen wird eine Primärurne angenommen, in der Lose enthalten sind für jede Sekundärurne. Dann wird zuerst ein Los aus der Primärurne gezogen und nachher aus der gezogenen Sekundärurne n Kugeln nach der klassischen Methode. Auf diese Weise wird eine zufallsartig schwankende Grundwahrscheinlichkeit symbolisiert, die mit den reinen Zufallsschwankungen der Sekundärurne kombiniert eine Gesamtverteilung ergibt, welche besser mit der Wirklichkeit in der Lebensversicherung und vor allem in der Sachversicherung harmonisiert. Die erhaltene Verteilung wird verschiedenen Grenzübergängen für grosse Zahlen unterworfen; es ergibt sich so anstelle der klassischen Poisson-Verteilung

$$f(r;\, t) = \frac{e^{-t} t^r}{r!} \tag{9}$$

die negative Binomialverteilung

$$f(r;\, t,\, h) = \binom{h+r-1}{r} \left(\frac{t}{t+h}\right)^r \left(\frac{h}{t+h}\right)^h \tag{10}$$

in der die zufällige Variable r die Anzahl der Gestorbenen, t die erwartete Schadenzahl und h einen Schwankungsparameter bedeutet, der die je nach den vorliegenden Verhältnissen zu erwartenden Grundschwankungen misst und um so grösser ausfällt, je kleiner diese Grundschwankungen sind. Im Grenzübergang $h \to \infty$ geht die negative Binomialverteilung (10) wieder in die klassische Poisson-Verteilung (9) über. In gleicher Weise wie in der klassischen kollektiven Theorie kann dann die Schadenzahl r in den Totalschaden x übergeführt werden, indem die Faltungspotenzen der Schadensummenverteilung $s(x)$ eingeführt werden und schliesslich durch Summierung über alle möglichen Schadenzahlen r die Verteilung des Gesamtschadens x entsteht. Interessant sind die ersten Momente der ursprünglichen und der verallgemeinerten Verteilung. Es gilt für den Erwartungswert

$$\mu_1 = t S_1, \qquad S_1 \quad \text{mittlere Schadensumme} \tag{11}$$

Darnach fällt der Erwartungswert des Gesamtschadens für beide Verteilungen gleich aus, während sich für die Varianz die unterschiedlichen Formeln

$$\mu_2' = t S_2 \quad \text{bzw.} \quad \mu_2' = t S_2 + \frac{t^2}{h} S_1^2 \tag{12}$$

ergeben, worin S_2 das zweite Moment der Schadensummenverteilung $s(x)$ bedeutet. In der Formel für die Varianz tritt somit nach der verallgemeinerten Theorie ein zusätzliches Glied auf, das aus den Grundschwankungen hervorgeht.

Überraschenderweise kann gezeigt werden, dass die verallgemeinerte Gesamtschadensummenverteilung auch aus anderen Urnenmodellen hervorgeht, z.B. aus dem seinerzeit von Polya-Eggenberger aufgestellten Modell mit Wahrscheinlichkeitsansteckung, aber auch aus weiteren Modellen.

Von besonderer Bedeutung ist es, dass man die verallgemeinerte Verteilung auf die klassischen Formeln zurückführen kann, wenn man die gegebenen Rechenelemente – die Frequenzfunktion der Schadensummenverteilung $s(x)$ und die erwartete Schadenzahl t – durch die transformierten Elemente

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t \frac{\ln(1+\chi)}{\chi} \\ \bar{s}(x) &= \frac{1}{\ln(1+\chi)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{1+\chi}\right)^r \frac{s^{*r}(x)}{r} \end{aligned} \tag{13}$$

ersetzt, worin $\chi = t/h$ und $s^{*r}(x)$ die r-te Faltungspotenz der Schadensummenverteilung $s(x)$ bedeuten. Damit ist die verallgemeinerte Risikotheorie durch diese Transformationsformeln auf die etwas einfacheren klassischen

Formeln zurückgeführt, und man kann die bekannten Ergebnisse ohne weiteres auch auf die verallgemeinerten Annahmen ausdehnen. Dies gilt insbesondere auch für die Ruinwahrscheinlichkeit, welche von der kollektiven Theorie als leistungsfähiges Instrument aufgebaut wurde, mit dessen Hilfe man unter anderem die Probleme der Solvabilität in den Griff bekommen kann, während die individelle Theorie eigentlich nur die Stabilität von Versicherungsbeständen messen konnte. Diese Transformationsmöglichkeit darf aber nicht dazu führen, dass man ohne Transformation die klassischen Formeln anwendet und sich lediglich im Geiste vorstellt, die Transformation sei bereits durchgeführt, was leider nur allzu oft geschieht.
Mit Hilfe der kollektiven Risikotheorie kann man eine Reihe von Fragestellungen behandeln, für welche die übliche Versicherungsmathematik keine Antwort weiss, weil sie sich eigentlich gar nicht direkt auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung stützt. Es sind dies z.B. die Frage nach dem Maximum des Selbstbehaltes, der Minimalzahl der Versicherten, dem notwendigen Sicherheitszuschlag zu den laufenden Prämien, um eine hinreichende Stabilität der Jahresergebnisse zu gewährleisten, und der erforderlichen Sicherheitsreserve, um zu einer verantwortbaren Solvabilität zu gelangen. Die Begriffe der Stabilität und der Solvabilität werden übrigens oft verwechselt. Während nämlich die Stabilität durch die Verteilungsfunktion des Gesamt-Jahresschadens sich messen lässt, muss man sich für die Solvabilität auf die Ruinwahrscheinlichkeit stützen, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass die anfängliche Sicherheitsreserve u, der die mit einem bestimmten Sicherheitszuschlag erhöhten Prämien gutgeschrieben und alle Schadensummen belastet werden, sich jemals erschöpfen könnte.
Neben diesen an sich bekannten Problemen, welche die Sicherheit der Versicherungsträger beinhalten, die ich in einer Reihe von Arbeiten nach der verallgemeinerten Theorie behandelt habe, die immerhin beispielsweise dazu führten, dass die Versicherungskommissionen der OECD und der EG eine Formel des Sprechenden für die Solvabilitätsreserve in der Risiko-Lebensversicherung akzeptiert haben, habe ich einige neue Fragestellungen aufgegriffen und mit Hilfe der verallgemeinerten Theorie einer Lösung entgegengeführt. Hier sind zu nennen die Tarifierung der Überschadens- oder Stop-Loss-Deckung, die Erfahrungstarifierung, die Grenzen der Versicherbarkeit für beliebige Risiken sowie die risikotheoretische Gewinnermittlung und schliesslich das Grossrisikoproblem, mit dem ich mich im folgenden noch etwas näher befassen möchte.

Anlass zu diesen Fragestellungen gab die Tatsache, dass in den letzten Jahrzehnten immer grössere Risikoobjekte nach Deckung suchten, die schliesslich auf mehrere Milliarden Franken Versicherungssummen anwuchsen. Man denke hier nicht nur an Atomkraftwerke, sondern auch an gewöhnliche Kraftwerke, bei denen ein Bruch der Staumauer Tausende von Toten nach sich ziehen kann, und an die modernen Riesenflugzeuge mit mehreren Hunderten von Passagieren oder an Brände in Grossfabriken usw.
Hier kam ich auf die Idee, gestützt auf eine Arbeit von Franckx, der eine Formel für die Verteilung des grössten Schadens aus einem Versicherungsbestand während eines Jahres gefunden hatte, diese Formel auf eine der numerischen Berechnung zugängliche Form zu bringen und sie gleichzeitig zu verallgemeinern auf den zweitgrössten, den drittgrössten, schliesslich n't-grössten Schaden. Andererseits ging ich darauf aus, die allgemeine Formel für die Verteilung des Gesamtschadens aus einem beliebigen Versicherungsbestand zu finden, wenn der grösste oder die n grössten Schäden ausgeschlossen sind. Die allgemeine Formel von Franckx für den Grösstschaden m ist in Formel (14) gegeben

$$\phi(m) = Q[S(m)] \tag{14}$$

in der $\phi(m)$ die Verteilungsfunktion des Grösstschadens m, Q die erzeugende Funktion der Schadenzahlverteilung und $S(m)$ die Verteilungsfunktion der Schadensummenverteilung im Gesamtversicherungsbestand bedeuten. Hier zeigte es sich, dass – wie Kupper bewiesen hat – die Verallgemeinerung der Schadenzahlverteilung, die an Stelle der Poisson-Verteilung auf die negative Binomialverteilung führt, sich sehr wenig auf die numerischen Resultate auswirkt; man kann also – was auch plausibel ist – sich ohne weiteres auf die klassische Poisson-Verteilung stützen, was auf die einfachen Formeln (15) führt. Für die Verteilungsfunktion $\phi(m)$ erhält man nun

$$\phi(m) = e^{-t[1-S(m)]} \tag{15a}$$

was durch Differenzieren die Frequenzfunktion

$$\varphi(m) = \frac{d\phi(m)}{dm} = t\,s(m)\,e^{-t[1-S(m)]} \tag{15b}$$

ergibt. Diese Formel kann man verallgemeinern auf den n't-grössten Schaden, nämlich

$$\varphi_n(m) = t\,s(m)\,e^{-t[1-S(m)]}\,\frac{\{t[1-S(m)]\}^{n-1}}{(n-1)!} \tag{16}$$

Um zu einem der numerischen Berechnung zugänglichen, aber vorsichtigen Ansatz zu gelangen, muss man eine Annahme treffen für die Schadensummenverteilung, deren Frequenzfunktion mit $s(m)$ und deren Verteilungsfunktion mit $S(m)$ bezeichnet ist. Nach Benktander und Segerdahl ist die Paretoverteilung, welche für die Verteilungsfunktion durch Formel (17) gegeben ist,

$$S(x) = 1 - x^{1-\alpha}, \quad x \geqslant 1 \tag{17}$$

die gefährlichste Annahme für den Versicherer. Die Übereinstimmung mit der Wirklichkeit ist zwar für die kleinen Summen meistens schlecht, aber für den Bereich der grossen Summen im allgemeinen sehr gut, manchmal sogar verblüffend gut. Für die Grösstschadenverteilung kommt es aber offensichtlich nur auf den Bereich der grossen Summen an. Ein Nachteil ist es, dass die Paretoverteilung nur schwach gegen die x-Achse konvergiert, so dass in extremen Fällen sogar der Mittelwert, auf alle Fälle jedoch die höheren Momente der Verteilung der Schadensummen nicht existieren. Diesen Nachteil kann man durch Stutzung der Verteilung ausmerzen, was die Berechnungen allerdings kompliziert, aber immerhin nicht verunmöglicht.
Mit Hilfe der vorsichtigen Paretoformel kommt man für den Mittelwert M des grössten Schadens m auf den eleganten Ausdruck

$$M(m) = t^{1/(\alpha-1)}\,\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right) \tag{18}$$

worin Γ die bekannte Γ-Funktion und ihr Argumentwert den reziproken Wert der mittleren Schadensumme bedeutet, so dass man auch schreiben kann:

$$M(m) = t^{1/(\alpha-1)}\,\Gamma\left(\frac{1}{S_1}\right) \tag{18'}$$

Ähnliche Formeln kann man auch für die höheren Momente herleiten. Auf diese Weise gelangt man zu höchst interessanten Resultaten über die Struktur der Grösstschäden. Beispielsweise kann man allgemein feststellen, je gefährlicher der Höchstschaden selbst ist, desto weniger gefährlich sind die nachfolgenden Schäden für den Versicherer. Ferner erkennt man, dass ein unendlich grosser Gesamtschaden endlich wird, falls man den Höchstschaden – etwa durch Rückversicherung – eliminieren kann, usw. Die Theorie der Höchstschäden erlaubt es somit, das brennende Grossschadenproblem einer Analyse zuzuführen und damit praktische Lösungen zu erreichen. Dadurch gelangt man z.B. zu einem Ansatz für die Grossschadenreserve, was nicht zuletzt für die Steuerbefreiung dieser Reserve von praktischer Bedeutung ist.

Mit dieser Skizze über das Grösstschadenproblem, das ich vor rund zehn Jahren bearbeitet hatte, komme ich zum Schluss. Meine versicherungsmathematische Forschungstätigkeit hat dann leider ihr Ende gefunden. In den Jahren danach war ich administrativ in der Geschäftsleitung der Rentenanstalt, als Präsident der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker und auch des 21. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, schliesslich als Mitglied der Eidg. AHV-Kommission – von meiner Lehrtätigkeit ganz zu schweigen – derart überlastet, dass ich keine Zeit mehr für die Entwicklung wirklich fruchtbarer Ideen fand. Bei meinem Abschied von der ETH drängt es mich aber, all denen meinen Dank abzustatten, die mir in irgendeiner Weise geholfen haben. Hier möchte ich vor allem der ETH als Ganzes, meinen verstorbenen Lehrern Prof. Marchand, Prof. Wyss und Prof. Saxer sowie dem unter uns weilenden Prof. Jecklin, aber auch meinen Freunden und ganz besonders meinen Nachfolgern, Prof. Bühlmann und PD Dr. Kupper, für ihre von wahrer Freundschaft getragene grosse Hilfe danken. Wahrscheinlich werde ich mich oft mit einer gewissen Wehmut an die Jahre meiner wissenschaftlichen Aktivität und auch an meine Lehrtätigkeit zurückerinnern.