

Semirekursive Berechnung von Gesamtschadenverteilungen und exakte Stop Loss-Prämien

Autor(en): **Hürlimann, Werner**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): - **(1985)**

Heft 2

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967072>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

WERNER HÜRLIMANN, Winterthur

Semirekursive Berechnung von Gesamtschadenverteilungen und exakte Stop Loss-Prämien

Einführung

Kürzlich hat J. Bertram in [4] eine allgemeine Methode zur Berechnung von Gesamtschadenverteilungen, die negative Risikosummen berücksichtigt, vorgestellt. Diese sogenannte FFT-Methode (FFT steht für «Fast-Fourier-Transformation») ist sehr elegant, theoretisch befriedigend, schnell und durchaus exakt in der Praxis.

Ein gewisser Nachteil der FFT-Methode liegt im relativ hohen Bedarf an Speicherkapazität. Wohlverstanden, der begrenzte Computer-Arbeitsspeicherplatz ist heutzutage kein echtes technologisches Problem mehr (z. B. virtuelle Speichertechnik). Eine kleine Computer Konfiguration verfügt aber nicht immer um 640 KB Hauptspeicherkapazität, die nötig sind, falls man die FFT-Methode mit z. B. 2^{14} Punkte berechnen will. Somit erscheint es wünschenswert eine Methode zu entwickeln, die jeder moderne Personal Computer schlucken könnte. Rekursive Methoden (z. B. die Adelson-Panjer Rekursionsmethode zur Berechnung der zusammengesetzten Poissonverteilung) benötigen wenig Speicher und sind exakt. Leider sind sie auf positive Risikosummen beschränkt. Die vorliegende Verallgemeinerung auf negative Risikosummen, genannt semirekursive Methode, beruht auf der Zerlegung der Einzelschadenverteilung in zwei Verteilungen für positive und negative Risikosummen und anschliessend deren Faltung. Infolge von Fehlerabschätzungen, leistet unsere Methode in der Praxis eine beliebige Genauigkeit. Sie benötigt wenig Speicher und ist im Programmieraufwand freundlicher als die FFT-Methode. Für kleine Poissonparameter und kleine negative Risikosummen ist sie auch von der Computerzeit her eine echte Alternative zur FFT-Methode. Hat man praktische Anwendungen in Sicht (z. B. Stop Loss-Prämien, siehe Abschnitt 5), so braucht man nicht die ganze Verteilung zu rechnen (was hingegen bei der FFT-Methode geschehen muss) und spart damit Computerzeit. Weiter ist die FFT-Methode nicht frei von numerischen Schwierigkeiten, die bei der Implementierung auftreten können. Unsere Praxis hat gezeigt, dass der schnelle FFT-Algorithmus von Schwarz (vgl. [8]) in gewissen Fällen numerisch instabil und somit praktisch nicht mehr brauchbar ist. Der viel langsamere Algorithmus von Cooley-Tukey (vgl. z. B. [9], S. 75) ist numerisch stabiler und liefert zuverlässigere Resultate. Unsere semirekursive Methode ist, was die Berechnung von Stop-Loss-Prämien anbelangt, schneller

als dieser letztgenannte in vielen praktischen Anwendungen. Schliesslich sei noch erwähnt, dass man mit Hilfe des semirekursiven Algorithmus schwankende Grundwahrscheinlichkeiten behandeln kann. Der Berechnungsprozess ist aber, abgesehen von der Einfachheit, bedeutend langsamer als die entsprechende FFT-Methode.

An dieser Stelle möchte ich Herrn E. Moor herzlich dafür danken, dass er mir seine Implementierung zur Adelson-Panjer Rekursion zeigte, was die Entstehung dieser Arbeit entscheidend beeinflusste.

1 Grundkenntnisse

In der Risikotheorie wird der Risikoprozess des Gesamtschadens für eine feste Zeitdauer (z. B. 1 Jahr) durch folgende Zufallsvariable beschrieben:

$$X = \sum_{i=1}^N Y_i \quad (1.1)$$

Dabei gibt N die Anzahl der Schäden an und Y_i beschreibt die Schadenssumme für den i -ten Schadenfall. Es wird vorausgesetzt, dass N zusammen mit den Y_i ein System unabhängiger Zufallsvariablen bilden und dass alle Y_i gleich verteilt sind. Sind die Y_i gemäss der Einzelschadenverteilungsfunktion $H(x)$ verteilt und ist p_k die Wahrscheinlichkeit dafür, dass k Schadenereignisse auftreten, so ist die Verteilungsfunktion von X , genannt Gesamtschadenverteilung, gegeben durch

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H^{*k}(x), \quad (1.2)$$

wobei H^{*k} die k -te Faltungspotenz von H ist.

In dieser Arbeit interessieren wir uns hauptsächlich für den Fall, dass N Poisson verteilt ist, mit Parameter λ , d. h.

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

Weiter behandeln wir nur diskret arithmetische Verteilungen $H(x)$. Als Anwendung haben wir die Stop Loss-Deckung vor Auge. Ist t der Selbstbehalt, so ist die Stop Loss-(Netto)Prämie $SL(F, t)$ als Erwartungswert des Überschadens definiert durch

$$SL(F, t) = \sum_{k>t} (k-t) f(k), \quad (1.4)$$

wobei f die zu F gehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist.

In dieser Arbeit werden folgende Bezeichnungen festgehalten. Kleine lateinische Buchstaben f, g, \dots verwenden wir für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Die entsprechenden grossen Buchstaben F, G, \dots stehen für die zugehörigen Verteilungsfunktionen. Eckige Klammern werden für Intervalle von ganzen Zahlen benützt. Zum Beispiel bedeutet $[a, b]$ die Menge der ganzen Zahlen x mit $a \leq x \leq b$.

2 Die semirekursive Methode

Gegeben sei eine diskrete Einzelschadenverteilungsfunktion $H(x)$ (positive und negative Risikosummen seien zugelassen), die sich aus zwei Verteilungsfunktionen zusammensetzt (nicht unbedingt Einzelschadenverteilungsfunktionen), d. h.

$$H(x) = c_1 H_1(x) + c_2 H_2(x), \quad c_1 + c_2 = 1. \quad (2.1)$$

Gesucht ist ein numerisches Verfahren zur Berechnung der zusammengesetzten Poissonverteilung mit Poissonparameter λ

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} H^{*k}(x) \quad (2.2)$$

für den Fall, dass die Verteilungen

$$F_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} e^{-\lambda_i} H_i^{*k}(x), \quad \lambda_i = \lambda c_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.3)$$

rekursiv berechenbar sind.

Aus praktischen Gründen behandeln wir im folgenden nur den interessanten Fall, wo H_1 ausschliesslich positive und H_2 negative Risikosummen zulässt. Die Verteilungen F_1, F_2 werden mit Hilfe der Rekursionsformel von Adelson-Panjer berechnet.

Darstellung als Faltungsprodukt

Es seien ψ, ψ_1, ψ_2 die charakteristischen Funktionen von H, H_1, H_2 und ζ, ζ_1, ζ_2 diejenigen von F, F_1, F_2 . Für die charakteristische Funktion ζ der zusammengesetzten Poissonverteilung F erhalten wir

$$\begin{aligned} \zeta &= e^{\lambda\psi - \lambda} = e^{\lambda(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)} \\ &= e^{\lambda_1\psi_1 - \lambda_1} \cdot e^{\lambda_2\psi_2 - \lambda_2} = \zeta_1 \cdot \zeta_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wissen wir, dass falls die charakteristische Funktion einer Verteilung das Produkt der charakteristischen Funktionen von gegebenen Verteilungen ist, so ist die ursprüngliche Verteilung identisch mit dem Faltungsprodukt der gegebenen Verteilungen.

Somit gelten die Beziehungen

$$F = F_1 * F_2 \quad (2.5)$$

für die Verteilungsfunktion F , respektiv

$$f = f_1 * f_2 \quad (2.6)$$

für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

Der semirekursive Algorithmus

Die Dichte $h(x)$ der Einzelschadenverteilungsfunktion $H(x)$ lässt sich schreiben als

$$h(x) = c_1 h_1(x) + c_2 h_2(x) \quad (2.7)$$

wobei

$$c_1 = \sum_{x \geq 0} h(x), \quad c_2 = \sum_{x < 0} h(x) \quad (2.8)$$

und die h_i 's definiert sind durch

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{h(x)}{c_1}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad h_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ \frac{h(x)}{c_2}, & x < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Wie bereits erwähnt, sind die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

$$f_i(x) = \sum_{k=0}^x \frac{\lambda_i^k}{k!} e^{-\lambda_i} h_i^{*k}(x), \quad i = 1, 2, \quad (2.10)$$

nach Adelson-Panjer rekursiv berechenbar (vgl. z. B. [6]).

Setzen wir

$$m_1 = \max_x \{h_1(x) \neq 0\}, \quad m_2 = -\min_x \{h_2(x) \neq 0\}, \quad (2.11)$$

so gelten die Rekursionsformeln für $f_1(x)$, resp. $f_2(x)$:

$$f_1(0) = e^{\lambda_1(h_1(0)-1)}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{\min(x, m_1)} j \lambda_{1j} f_1(x-j) \quad \text{für } x > 0, \quad \lambda_{1j} = \lambda_1 h_1(j)$$

$$f_2(0) = e^{-\lambda_2} \tag{2.12}$$

$$f_2(x) = \frac{-1}{x} \sum_{j=1}^{\min(-x, m_2)} j \lambda_{2j} f_2(-x-j) \quad \text{für } x < 0, \quad \lambda_{2j} = \lambda_2 h_2(-j)$$

Die semirekursive Methode besteht aus zwei Schritten:

1. Schritt

Zunächst wird $f_2(x)$ im Intervall $[-T_2, 0]$, T_2 genügend gross, nach Adelson-Panjer gerechnet und in einem Vektor gespeichert. Die Grenze T_2 kann dabei so gewählt werden, dass die Genauigkeit der Rechenanlage voll ausgenützt wird (wenn möglich doppelte Genauigkeit), um $f_2(x)$ möglichst klein ausserhalb von $[-T_2, 0]$ zu machen (siehe Diskussion in Abschnitt 5).

2. Schritt

Mit Hilfe des abgespeicherten Vektors $f_2(x)$ werden f_1 und die Faltung $f_1 * f_2$ miteinander rekursiv gerechnet, f_1 nach Adelson-Panjer.

Es bleibt noch zu zeigen, wie man die Faltung $f_1 * f_2$ rekursiv rechnen kann, falls $f_2(x)$ aufgerufen werden darf. Im diskreten Fall, wird $f = f_1 * f_2$ mit der Faltungssumme berechnet:

$$f(x) = \sum_{i+j=x} f_1(j) f_2(i), \quad j \geq 0, \quad i \in [-T_2, 0], \quad x \in [-T_2, \infty[\tag{2.13}$$

Die Bedingung $i = x - j \in [-T_2, 0]$ führt zur Formel

$$f(x) = \sum_{j=\max(0, x)}^{x+T_2} f_1(j) f_2(x-j), \quad x \in [-T_2, \infty[\tag{2.14}$$

Die Herleitung der gewünschten Rekursionsformeln geht über eine Folge von reellwertigen Hilfsfunktionen $g_n(y)$, $y \in [0, T_2]$, $n \in \mathbb{N}$, die folgendermassen definiert sind:

$$\begin{cases} g_0(y) = 0, & y \in [0, T_2] \\ g_{n+1}(y) = g_n(y-1) + f_1(n) f_2(-y+1), & y \in [1, T_2] \\ g_{n+1}(0) = 0, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.15}$$

Eine routinemässige Rechnung zeigt, dass $f=f_1 * f_2$ wie folgt gewonnen wird:

$$f(n-T2) = g_n(T2) + f_1(n)f_2(-T2), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Man überzeugt sich, dass die Formeln (2.15) und (2.16) mit Hilfe eines Hilfsvektors $g(y)$ (anstelle der Folge $g_n(y)$) rekursiv vollzogen werden können.

3 Numerisches Beispiel

Die numerische Illustration erfolgt anhand einer einfachen Einzelschadenverteilung. Wie solche Verteilungen im allgemeinen gewonnen werden, kann in [2] nachgelesen werden. Der ausschliesslich für Lebensversicherung interessierte Leser konsultiere z. B. [6]. Zusammenfassend ist unser Beispiel beschrieben durch folgende Parameter und Tabellen:

Poissonparameter: $\lambda = 2$

Diskretisierungsschritt für die Risikosummen: $d = 2500$

$T2 = 100$

Tabelle 1
Einzelschadenverteilung $H(x)$

$x = \text{Risikosumme}/d$	-15	-11	-6	-3	1	4	5	7	10	14	20	25	35	50	80
Dichte $100h(x)$	1	2	5	11	24	7	8	7	10	6	7	6	3	2	1

Erwartungswert $E\{X\} = 40000$

Tabelle 2
(Auszug aus dem Computer Output)

Selbstbehalt	Gesamtschadenverteilung: F (Selbstbehalt)	Netto Stop Loss-Prämie
- 20000	0.03029	60324
- 10000	0.06547	50761
0	0.26330	41765
10000	0.39779	35090
20000	0.49827	29497
30000	0.57868	24788
40000	0.63817	20798
50000	0.69532	17337
60000	0.73862	14484

Tabelle 2 (Fortsetzung)

Selbstbehalt	Gesamtschadenverteilung: F (Selbstbehalt)	Netto Stop Loss-Prämie
70000	0.79133	12148
80000	0.82393	10188
90000	0.85874	8531
100000	0.87917	7181
110000	0.89322	6028
120000	0.90923	5037
130000	0.92948	4214
140000	0.94043	3545
150000	0.94969	2979
160000	0.95598	2501
170000	0.96082	2083
180000	0.96622	1713
190000	0.97058	1390
200000	0.97690	1110

4 Rechenaufwand der semirekursiven Methode

Ein geeignetes Mass für den Rechenaufwand eines Algorithmus ist hier gegeben durch die Anzahl reeller Multiplikationen (vgl. [5], S. 117). Interessiert man sich für die Werte der Verteilung F im Intervall $[-T_2, T_1]$ (T_2 wie in vorigen Abschnitten), so folgt mit Hilfe der Methode aus Abschnitt 2:

$$\begin{aligned}
 \text{Anzahl reeller Multiplikationen} &= T_2 * m_2 - \frac{m_2(m_2 + 1)}{2} \\
 &\quad + T_1 * m_1 - \frac{m_1(m_1 + 1)}{2} \\
 &\quad + (T_2 + 1) T_1
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei m_2 , resp. m_1 den absoluten Betrag der minimalen, resp. maximalen Risikosumme bedeutet. Im Vergleich dazu benötigt die FFT-Methode ([5], S. 121):

$$\text{Anzahl reeller Multiplikationen} = 4n({}_2\log n + {}_2\log(s + 1)) \tag{4.2}$$

wobei $s = m_2 + m_1 + 1$ und $n = 2^r$, $r \in \mathbb{N}$, die Anzahl Punkte zur Berechnung der FFT ist.

Es dürfte nun nicht allzu schwierig sein, Vergleichskriterien aufzustellen (vgl. z.B. [5], wo der Fall $T1=0$ behandelt wird). Wir bemerken nur, dass bei der Berechnung von Stop-Loss Prämien mit Selbstbehalt in der Höhe der erwarteten (z.B. positiven) Schadenbelastung, der Wert von $T1$ noch ziemlich klein sein sollte, um die FFT-Methode im Rechenaufwand zu schlagen.

5 Fehlerabschätzungen und exakte Stop-Loss-Prämien

Es ist wohlbekannt, dass Stop-Loss-Prämien für diskret arithmetische Verteilungen rekursiv berechnet werden können (z. B. [6] für positive Risikosummen). Die Erweiterung auf negative Risikosummen ist naheliegend. Die Verteilung F der Zufallsvariable X habe die Eigenschaft, dass $f(-T2)$ verschwindend klein ist. Die Existenz von

$$\sum_{k=-T2}^{\infty} kf(k) \approx E\{X\} \quad (= \text{Erwartungswert von } X) \quad (5.1)$$

wird vorausgesetzt. Die folgende Rekursionsformel folgt sofort aus der Definition von $SL(F, t)$:

$$SL(F, t+1) = SL(F, t) - \sum_{k=-T2}^{\infty} f(k) + \sum_{k=-T2}^t f(k) = SL(F, t) - 1 + F(t). \quad (5.2)$$

Als Anfangswert nehmen wir

$$SL(F, -T2) = \sum_{k=-T2}^{\infty} kf(k) + T2 \cdot \sum_{k=-T2}^{\infty} f(k) \approx E\{X\} + T2. \quad (5.3)$$

Wir diskutieren im folgenden die Genauigkeit der semirekursiven Methode und geben anschliessend eine Fehlerabschätzung für die Berechnung von Stop-Loss-Prämien mit Hilfe unseres Algorithmus. Für eine Grösse a bezeichnet \bar{a} eine Approximation von a , $\varepsilon_a = (\bar{a} - a)/a$ den relativen Fehler und $\Delta_a = \bar{a} - a$ den absoluten Fehler.

Die Bezeichnungen des Abschnitts 2 gelten durchwegs.

Wir betrachten folgende Grössen und deren Approximationen aus der semirekursiven Methode:

$$\begin{aligned}
F_2(\infty) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_2(-x) = 1, & \overline{F_2(\infty)} &= \sum_{x=0}^{T_2} f_2(-x), \\
f(x) &= \sum_{j=\max(0,x)}^{\infty} f_1(j) f_2(x-j), & \overline{f(x)} &= \sum_{j=\max(0,x)}^{x+T_2} f_1(j) f_2(x-j), \\
F(t) &= \sum_{x=-T_2}^t f(x), & \overline{F(t)} &= \sum_{x=-T_2}^t \overline{f(t)}, \\
F(\infty) &= \sum_{x=-T_2}^{\infty} f(x), & \overline{F(\infty)} &= 1, \\
E &= \sum_{k=-T_2}^{\infty} kf(k), & \overline{E} = E\{X\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} kf(k).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Wir bemerken, dass der Erwartungswert \overline{E} sich exakt aus der Einzelschadenverteilungsfunktion berechnen lässt gemäss $\overline{E} = \lambda \sum_x xh(x)$. Die ganze positive Zahl T_2 sei nun so gewählt, dass

$$\begin{aligned}
\overline{F_2(\infty)} &= 1 - \varepsilon \\
f_2(-x) &\leq f_2(-T_2) = \delta \quad \text{für alle } x \geq T_2,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

wobei ε und δ beliebig kleine vorgegebene positive reelle Zahlen sind. Natürlich gilt $T_2 = T_2(\varepsilon, \delta)$. Wir leiten zunächst einige Abschätzungen her. Wir haben

$$\begin{aligned}
F(\infty) &= \sum_{x=-T_2}^{\infty} \sum_{j=\max(0,x)}^{\infty} f_1(j) f_2(x-j) = \sum_{j=0}^{\infty} f_1(j) \cdot \sum_{k=-T_2-j}^0 f_2(k) \\
&\geq \sum_{j=0}^{\infty} f_1(j) \sum_{k=-T_2}^0 f_2(k) = \sum_{j=0}^{\infty} f_1(j) \overline{F_2(\infty)} = 1 - \varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Somit gilt

$$1 - \varepsilon \leq F(\infty) \leq 1. \tag{5.7}$$

Der absolute Fehler in der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ lässt sich leicht abschätzen durch

$$|\Delta_{f(x)}| = \left| \sum_{j=x+T_2+1}^{\infty} f_1(j) f_2(x-j) \right| \leq \sum_{j=x+T_2+1}^{\infty} f_1(j) \cdot \delta \leq \delta \tag{5.8}$$

Für den absoluten Fehler in der Verteilungsfunktion $F(x)$ hat man

$$|\Delta_{F(x)}| = \left| \sum_{k=-T_2}^x \Delta_{f(k)} \right| \leq \sum_{k=-T_2}^x |\Delta_{f(k)}| \leq (x + T_2 + 1) \delta \tag{5.9}$$

Zur Abschätzung von $\Delta_E = \bar{E} - E = \sum_{k=-\infty}^{-T2} kf(k)$ benötigen wir folgende Grössen

$$\begin{aligned}
 E_+ &= \lambda \sum_{x \geq 0} xh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kf_1(k) \quad (= \text{Erwartungswert von } F_1) \\
 E_- &= \lambda \sum_{x \leq 0} xh(x) = \sum_{k=-\infty}^0 kf_2(k) \quad (= \text{Erwartungswert von } F_2) \quad (5.10) \\
 \bar{E}_- &= \sum_{k=-T2}^0 kf_2(k) \quad (= \text{Approximation von } E_-).
 \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind exakt berechenbar, \bar{E}_- mit Hilfe der Adelson-Panjer Rekursionsformel für f_2 . Durch Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \Delta_E &= \sum_{k=-\infty}^{-T2} k \left[\sum_{j=0}^{\infty} f_1(j) f_2(k-j) \right] \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} f_1(j) \sum_{k=-\infty}^{-T2-j} (k+j) f_2(k) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} jf_1(j) \cdot \sum_{k=-\infty}^{-T2-j} f_2(k) + \sum_{j=0}^{\infty} f_1(j) \cdot \sum_{k=-\infty}^{-T2-j} kf_2(k) \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$|\Delta_E| \leq E_+ \cdot \varepsilon + \left| \sum_{k=-\infty}^{-T2} kf_2(k) \right| = E_+ \varepsilon + |\Delta_{E_-}| \quad (5.12)$$

Die Grösse $\frac{\Delta_E}{\bar{E}}$ wird uns interessieren. Für diese gilt

$$\left| \frac{\Delta_E}{\bar{E}} \right| \leq v, \quad \text{wobei} \quad v = \frac{E_+ \varepsilon + |\Delta_{E_-}|}{|\bar{E}|}. \quad (5.13)$$

Wir wenden uns nun zum Fehler in der Stop-Loss-Prämie. Aus den Gleichungen (5.2), (5.3) folgt mit (5.4), dass

$$\begin{aligned}
 SL(F, x) &= SL(F, -T2) + \sum_{t=-T2}^{x-1} (F(t) - F(\infty)) \\
 &= E + T2 \cdot F(\infty) + \sum_{t=-T2}^{x-1} F(t) - (T2+x)F(\infty) \\
 &= E - xF(\infty) + \sum_{t=-T2}^{x-1} F(t) \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Berechnen wir $SL(F, x)$ in der Praxis gemäss

$$\overline{SL(F, x)} = \bar{E} - x\overline{F(\infty)} + \sum_{t=-T_2}^{x-1} \overline{F(t)}, \quad (5.15)$$

so folgt

$$\begin{aligned} \Delta_{SL(F, x)} &= \bar{E} - E - x(1 - F(\infty)) + \sum_{t=-T_2}^{x-1} \Delta_{f(t)} \\ &= \Delta_E - x(1 - F(\infty)) + \sum_{t=-T_2}^{x-1} \Delta_{f(t)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Schätzen wir dies ab:

$$\begin{aligned} |\Delta_{SL(F, x)}| &\leq v|\bar{E}| + \varepsilon|x| + \sum_{t=-T_2}^{x-1} |\Delta_{f(t)}| \\ &\leq v|\bar{E}| + \varepsilon|x| + \sum_{t=-T_2}^{x-1} (t + T_2 + 1)\delta \end{aligned} \quad (5.17)$$

Nach Ausrechnung der Summe in der Abschätzung erhalten wir

$$|\Delta_{SL(F, x)}| \leq v|\bar{E}| + \varepsilon|x| + \frac{1}{2}|(x + T_2)^2 + x + T_2|\delta \quad (5.18)$$

In der Praxis interessiert man sich für den Prämienatz $\frac{SL(F, x)}{\bar{E}}$ für einen endlichen Bereich $k_1\bar{E} \leq x \leq k_2\bar{E}$. Setzen wir

$$\begin{aligned} k &= \max\{|k_1|, |k_2|\} \\ c = c(\varepsilon, \delta) &= \max_{k_1\bar{E} \leq x \leq k_2\bar{E}} \frac{1}{2} \frac{|(x + T_2)^2 + x + T_2|}{|\bar{E}|} \end{aligned} \quad (5.19)$$

so folgt für den absoluten Fehler im Stop-Loss-Prämienatz:

$$\left| \frac{\Delta_{SL(F, x)}}{\bar{E}} \right| \leq v + k\varepsilon + c(\varepsilon, \delta)\delta. \quad (5.20)$$

Mit wachsendem $T_2 = T_2(\varepsilon, \delta)$ wird in der Praxis wohl $c(\varepsilon, \delta)\delta$ gegen 0 streben, so dass Stop-Loss-Prämien beliebig genau approximiert werden können. Somit ist die Konvergenz des semirekursiven Verfahrens begründet. Übrigens kann unser Abschätzungsverfahren der FFT-Methode angepasst werden. Eine Notiz hierzu erscheint im «Scandinavian Actuarial Journal».

6 Schwankende Grundwahrscheinlichkeiten

Für manche praktische Probleme der Risikotheorie ist es nicht zweckmässig anzunehmen, dass die erwartete Anzahl Schäden für eine feste Zeitperiode konstant sei. Man denke etwa an saisonbedingte und ökonomisch bedingte Schwankungen dieses Parameters. Eine Einführung zu diesem Thema findet man z. B. in [2].

Wir nehmen an, dass die erwartete Anzahl Schäden für eine feste Zeitperiode gleich λZ ist, wobei Z eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 1 ist. Nimmt man an, dass die Anzahl Schäden Poisson verteilt ist, so ist die Wahrscheinlichkeit P_k dafür, dass k Schadenereignisse eintreten gegeben durch

$$P_k = \int_0^{\infty} e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^k}{k!} dU(q), \quad (6.1)$$

wobei $U(q)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass $Z \leq q$ ist.

Für praktische computerunterstützte Untersuchungen genügt es meistens eine diskrete Verteilung $U(q)$ zu betrachten. Wir beschränken uns hier auf diesen Fall. Es seien endliche viele q_i 's vorgegeben mit

$$U(q_i) = w_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.2)$$

Die zusammengesetzte Poissonverteilung mit Parameter λq sei gegeben durch

$$F_{\lambda q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^k}{k!} H^{*k}(x). \quad (6.3)$$

Die Gesamtschadenverteilung mit Grundwahrscheinlichkeiten P_k (die sogenannte gemischte zusammengesetzte Poissonverteilung, in Englisch «mixed Poisson») ist dann gleich

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k H^{*k}(x) = \sum_{i=1}^n w_i F_{\lambda_i}(x) \quad (6.4)$$

wobei $\lambda_i = \lambda q_i$ gesetzt wurde. Da F_{λ_i} semirekursiv berechenbar ist, ist es auch F . Der einzige Nachteil des Verfahrens liegt im n -fachen Aufwand an Computerzeit. In diesem Fall sollte die entsprechende FFT-Methode wohl vorgezogen werden.

Werner Hürlimann
Allgemeine Mathematik
Winterthur-Leben
8400 Winterthur

Literaturverzeichnis

- [1] Adelson, R. M.: Compound Poisson Distributions, Operations Research Quartely, vol 17, p. 73–75, 1966.
- [2] Beard, R. E., Pentikäinen, T. and Pesonen, E.: Risk Theory, 2nd edition. Chapman and Hall, London, 1976.
- [3] Bertram, J.: Numerische Berechnung von Gesamtschadenverteilungen. Blätter der DGVM, Band XV, Heft 2, 1981.
- [4] Bertram, J.: Calculation of aggregate claims distributions in case of negative risk sums, XVII-th ASTIN Colloquium Lindau, Germany, 1983.
- [5] Bühlmann, H., Numerical Evaluation of the Compound Poisson Distribution: Recursion or Fast Fourier Transform?, Scand. Actuarial J., p. 116–126, 1984.
- [6] Held, R. P.: Zur rekursiven Berechnung von Stop-Loss-Prämien für Pensionskassen, MVSVM, Band 82, Heft 1, S. 67–89, 1982.
- [7] Panjer, H. H.: Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions, ASTIN Bulletin 12, p. 22–26, 1981.
- [8] Schwarz, H. R.: Elementare Darstellung der schnellen Fouriertransformation, Computing 18, S. 107–116, 1977.
- [9] Stoer, J.: Einführung in die Numerische Mathematik I, Heidelberger Taschenbücher Bd. 105, 4. Auflage, 1983.

Zusammenfassung

Eine Verallgemeinerung der Adelson-Panjer Rekursionsformel zur Berechnung der zusammengesetzten Poissonverteilung im Falle beliebiger Risikosummen wird vorgestellt. Das Verfahren wird auf die «exakte» numerische Gewinnung von Stop-Loss-Prämien angewendet. Anhand von Fehlerabschätzungen, die auf einer Rechenanlage durchgeführt werden können, wird die Konvergenz der Methode erläutert. Schliesslich bemerken wir noch, dass schwankende Grundwahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden können.

Résumé

L'auteur présente une généralisation à des sommes de risque quelconques de la formule de récurrence d'Adelson-Panjer pour le calcul de la distribution de Poisson composée. Le procédé permet d'obtenir des valeurs numériques exactes pour les primes «stop loss». A l'aide d'évaluations des erreurs d'approximations, qui peuvent être effectuées sur un ordinateur, l'article explique la convergence de la méthode. L'auteur remarque finalement qu'il est possible de traiter le cas de la variation des probabilités de base.

Summary

A generalization to the case of arbitrary risk sums of the Adelson-Panjer recursion formula for computing the Compound Poisson distribution is presented. The procedure is applied to obtain "exact" numeric values for the stop loss premiums. With the aid of error bounds which could be implemented on a desk computer, we show the convergence of the method. Finally we remark that it is possible to take into account also the variation of the basic probabilities.