Bemerkungen zur Pay-Back-Methode

Erhard Kremer, Hamburg

Bemerkungen zur Pay-Back-Methode

1 Vorbemerkungen

Verfolgt man die versicherungsmathematischen Publikationen des letzten Jahrzehntes, so erkennt man eine zunehmende Theoretisierung des Bereiches der Prämienkalkulation. Inzwischen sind allgemeinere Prämienprinzipien mathematisch analysiert (s. De Vylder, Goovaerts und Haezendonck (1984) und die Theorie der Erfahrungstarifierung (s. Norberg (1979), Höddinghaus (1980)) ausgebaut worden. Besonders interessante mathematische Beiträge zur Prämienkalkulation wurden für spezielle Rückversicherungsverträge geliefert. De Vylder (1982), Goovaerts und De Vylder (1982), Goovaerts und Declerq (1980), Kremer (1982), (1983a), Winkler (1982) wenden Resultate der konvexen Optimierung und der Mathematischen Stochastik zur Abschätzung der Prämien spezieller Rückversicherungsverträge an und Kremer (1984) entwickelt eine asymptotische Prämienformel für eine umfassende Klasse von Rückversicherungsverträgen, aus der einige bekannte Prämienformeln (s. Kremer (1983b)) als Spezialfälle folgen. Diese Resultate scheinen jedoch überwiegend von theoretischem Interesse zu sein.
Die in der Rückversicherungspraxis eingesetzten Tarifierungsverfahren sind aus Praktikabilitätsgründen oft relativ elementar. Einige dieser Verfahren scheinen zunächst von Praktikern empirisch entwickelt und erst später mathematisch begründet worden zu sein (s. Benktander (1954), (1969), (1977), Kremer (1982), (1983b)). Einen elementaren Überblick über die wichtigsten Tarifierungsverfahren gibt Flemming (1983), die mathematischen Fundierungen werden in Kremer (1983b) skizziert. Fast alle der dort zitierten Verfahren sind inzwischen mathematisch begründet und aus geeigneten stochastischen Modellen hergeleitet (s. Kremer (1983b)). Lediglich das in der Praxis häufig verwendete *Pay-Back-Verfahren* wurde bislang noch nicht mathematisch analysiert (bzw. dem Verfasser ist keine entsprechende Publikation bekannt). Flemming (1982, S. 11) bezeichnet die Methode noch als nichtmathematisch und führt kaufmännische Argumente an. Mit der vorliegenden Notiz zeigt nun der Verfasser, dass das *Pay-Back-Verfahren* mit einem klassischen Teilgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie, der sogenannten *Erneuerungstheorie*, mathematisch begründbar ist. Einen Hinweis auf diese Beziehung findet man bereits im Buch von Karlin und Taylor (1975, Seite 204).

2 Die Pay-Back-Methode

Betrachtet werde ein Kollektiv von Risiken. Es sei ein Rückversicherungsvertrag abgeschlossen, der im Zeitablauf Schäden für den Rückversicherer erzeugt. Die Zeiten zwischen den aufeinander folgenden Schäden seien durch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable:

$T_j : (\Omega, A, P) \to (0, \infty)$
(Zeit zwischen dem j-ten und $(j-1)$-ten Schaden
des Kollektivs)
$j = 1, 2, \ldots$

beschrieben, die Schadenhöhen durch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable:

$X_j : (\Omega, A, P) \to (0, \infty)$
(Höhe des j-ten Schadens des Kollektivs).
$j = 1, 2, \ldots$

Zusätzlich werde angenommen, dass die Schadenhöhen X_j von den Schadenzwischenzeiten T_j unabhängig sind. Der Rückversicherungsvertrag sei für eine Dauer von h Perioden abgeschlossen. Die sogenannte *Pay-Back-Methode* besteht nun darin, die Nettorisikoprämie des Rückversicherungsvertrages über die Formel:

$$v := h \cdot \frac{\mu}{\tau} \tag{2.1}$$

mit den als existent angenommenen Erwartungswerten:

$$\mu = E(X_j), \quad j = 1, 2, \ldots$$
$$\tau = E(T_j), \quad j = 1, 2, \ldots$$

zu berechnen (siehe Flemming (1983), S. 11)). Die Grösse τ ist interpretierbar als diejenige (mittlere) Zeitdauer, in welcher der (mittlere) Schaden μ durch Prämieneinnahmen amortisiert werden muss, damit der Rückversicherer keine Verluste erleidet. Die Grösse τ wird als *Pay-Back-Periode* bezeichnet. Die Prämie (2.1) sollte durch einen Sicherheitszuschlag ergänzt werden. Hierauf wird im folgenden Abschnitt noch eingegangen.
Die durch (2.1) beschriebene Grösse erscheint als sinnvolle Approximation der Netto-Risiko-Prämie. Die erwünschte theoretische Rechtfertigung geben wir im folgenden Abschnitt.

3 Mathematische Begründung der Pay-Back-Methode

Im obigen stochastischen Modell bezeichne:

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} T_j$$

und

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leqslant t\}}, \; t \geqslant 0$$

(mit der Indikatorfunktion 1_M der Menge M), d.h. N_t ist die Anzahl der Schäden des Kollektivs bis zur Zeit t. Damit erhält man als Schadenbelastung des Rückversicherungsvertrages im Intervall $[t, t+h]$:

$$XS(t) = \sum_{j=N_t+1}^{N_{t+h}} X_j,$$

und wir können als erstes Resultat formulieren:

Satz 1:
Die Nettorisikoprämie ist im Intervall $[t, t+h]$ gegeben

durch $$E(XS(t)) = [U(t+h) - U(t)] \cdot \mu \tag{3.1}$$

mit $$U(t) = E(N_t).$$

Ferner gilt:

$$\mathrm{Var}(XS(t)) =$$

$$[U(t+h) - U(t)] \cdot \sigma^2 + \sum_{i=1}^{k} [V(t+h, t+h) + V(t, t) - 2\,V(t+h, t)] \cdot \mu^2 \tag{3.2}$$

mit der Kovarianz:

$$V(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}\,(N_{t_1}, N_{t_2})$$

und

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_j) \in [0, \infty).$$

Beweis:

Wegen:

$$XS(t) = \left(\sum_{j=1}^{N_{t+h}} X_j - \sum_{j=1}^{N_t} X_j \right)$$

und:

$$E\left(\sum_{j=1}^{N_s} N_j\right)=U(s)\cdot\mu$$

folgt direkt die Formel für $E(XS(t))$. Zur Berechnung der Varianz betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned}E\left(\sum_{j=N_t+1}^{N_{t+h}} X_j\right)^2&=E\left(\sum_{j=N_t+1}^{N_{t+h}} X_j^2\right)+2\cdot E\left(\sum_{j=N_t+1}^{N_{t+h}}\sum_{k=j+1}^{N_{t+h}} X_jX_k\right)\\&=(U(t+h)-U(t))\cdot E(X_j^2)+\\&\quad+E((N_{t+h}-N_t)\,(N_{t+h}-N_t-1))\cdot\mu^2,\end{aligned}$$

womit man wegen:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=N_t+1}^{N_{t+h}} X_j\right)^2=E\left(\sum_{j=N_t+1}^{N_{t+h}} X_j\right)^2-E(N_{t+h}-N_t)^2\cdot\mu^2$$

die Behauptung erhält. □

Wie im Abschnitt vorher sei definiert:

$$v=h\cdot\frac{\mu}{\tau}$$

und ferner:

$$\sigma^2=h\cdot\frac{\sigma^2}{\tau}+\left[\frac{h}{\tau}\left(1-\frac{h}{\tau}\right)+2\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\int_0^h U(s)\,ds\right]\cdot\mu^2.$$

Mit diesen Bezeichnungen folgt der

Satz 2:

Die Verteilung von T_j sei nicht arithmetisch und T_j integrabel in der 3. Potenz. Dann gilt:

(a) $\lim\limits_{t\to\infty} E(XS(t))=v$

(b) Ist die Verteilung von T_j sogar streng nicht arithmetisch, d.h.:

$$\Phi(t)=E(\exp(i\cdot t\cdot T_j))\neq 1\qquad\forall t\neq 0$$
$$\liminf_{|t|\to\infty}|1-\Phi(t)|>0,$$

so folgt:

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{Var}(XS(t))=\sigma^2.$$

Beweis:

Teil (a): folgt direkt mit (3.1) und dem klassischen *Erneuerungstheorem* (s. Kohlas (1977), Satz 2, S. 57):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t+h)-U(t)}{h} = \frac{1}{\tau} = :\lambda \tag{3.3}$$

Teil (b): wegen (3.2) und (3.3) ist lediglich zu zeigen:

$$\lim_{t\to\infty} [V(t+h,t+h)+V(t,t)-2\cdot V(t+h,t)] =$$

$$= \lambda\cdot h(1-\lambda\cdot h)+2\cdot\lambda\cdot\int_0^h U(s)ds.$$

Dies folgt durch direktes Einsetzen, falls gezeigt ist:

$$\lim_{t\to\infty} (V(t+\Delta,t)-\lambda_i\cdot t\cdot(1+2K_1))$$

$$=(K_1+4K_2+K_1^2)+\lambda\cdot\Delta\cdot(K_1+\lambda\cdot\Delta/2) \tag{3.4}$$

$$-\lambda\cdot\int_0^{\Delta} U(s)ds$$

mit

$$K_1=\frac{1}{2}\cdot\lambda^2\cdot E(X_j^2)-1$$

$$K_2=[\lambda^2\cdot E(X_j^2)/2]^2-\lambda^3\cdot E(X_j^3)/6$$

Es gilt:

$$V(t+\Delta,t)=E(N_{t+\Delta}\cdot N_t)-E(N_{t+\Delta})\cdot E(N_t)$$

und mit der Darstellung:

$$N_{t+\Delta}\cdot N_t = N_t + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} 1_{\{S_n\le t,\, S_m\le t\}} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty} 1_{\{S_n\le t+\Delta,\, S_m\le t\}}$$

folgt (als Verallgemeinerung der Formel (2.4) in Daley und Mohan (1978)):

$$V(t+\Delta,t)=U(t)+\int_0^t U(t-s)\,U(ds)$$

$$+\int_0^{t+\Delta} U(t+\Delta-s)\,U(ds)$$

$$-\int_t^{t+\Delta} U(t+\Delta-s)\,U(ds)$$

$$-U(t+\Delta)\cdot U(t). \tag{3.5}$$

Ferner hat man (s. Daley und Mohan (1978)):

$$U(t)=\lambda\cdot t+K_1+o(t^{-1}),\quad t\to\infty \tag{3.6}$$

$$\int_0^t U(t-s)\,U(ds)=U(t)\cdot K_1+\frac{1}{2}\cdot\lambda^2\cdot t^2$$
$$+K_1\cdot\lambda\cdot t+2\cdot K_2+o(1). \tag{3.7}$$

Mit (3.6) und partieller Integration folgt:

$$\int_t^{t+\Delta} U(t+\Delta-s)\,U(ds)=\int_0^{\Delta} U(\Delta-s)\,U(t+ds)$$
$$=-\int_0^{\Delta} U(t+s)\,U(\Delta-ds)-U(\Delta)\cdot U(t) \tag{3.8}$$
$$=\lambda\cdot\int_0^{\Delta} U(s)ds+o(1)$$

Die Behauptung (3.4) erhält man durch Einsetzen von (3.6)–(3.8) in (3.5). □

Dieses Resultat rechtfertigt es, die Nettorisiko-Prämie $E(XS(t))$ durch μ zu approximieren, d.h. beim *Erwartungswertprinzip* (s. De Vylder, Goovaerts und Haezendonck (1984)) als Risikoprämie:

$$RP=\nu\cdot(1+\Lambda)\qquad(\Lambda\geqslant 0)$$

zu wählen. Bei Verwendung des *Varianzprinzips* folgt als Approximation der Risikoprämie:

$$RP=\nu+\Lambda\cdot\sigma^2\quad(\Lambda\geqslant 0).$$

Unter der speziellen Annahme einer exponentiell-verteilten Schadenzwischenzeit T_j (d.h. N_t ist Poisson-verteilt)
folgt mit:

$$\eta:=\mathrm{E}(\mathrm{X}_j^2)=\sigma^2+\mu^2$$

die einfachere Formel:

$$\sigma^2=h\cdot\frac{\eta}{\tau}$$

also für das Varianzprinzip:

$$RP=h\cdot\frac{\mu+\Lambda\cdot\eta}{\tau}.$$

Bei der Anwendung dieser einfachen Prämienformel in der Praxis müssen lediglich die unbekannten Parameter μ, τ, σ^2 geschätzt werden, etwa mit den klassischen Mittelwert- und Varianzschätzern bzw. mit kürzlich publizierten verfeinerten Methoden (s. Vardi (1982)).
Alle obigen Prämienformeln sind i.a. lediglich asymptotisch (d.h. für grosses t) exakt. Wünschenswert wäre es, auch bei finitem t Abschätzungen zu erhalten. Als einfaches Resultat erhält man den

Satz 3:

Für die Nettoprämie gelten die folgenden Abschätzungen:

(a) falls für die Verteilungsfunktion F von T_j gilt:

$$\int_t^{\infty} (1-F(x))dx \leqslant \tau \cdot (1-F(t), \qquad \forall t \geqslant 0$$

(d.h. die Verteilung ist vom sog. Typ *NBUE*, siehe Barlow und Proschan (1975), S 159), so folgt:

$$E[XS(t)] \leqslant v \cdot (1+\Lambda_1), \qquad \forall t \geqslant 0$$

mit

$$\Lambda_1 := \mu / v$$

(b) falls die Verteilung der T_j eine Dichte f besitzt und die Ausfallrate:

$$r(x) = f(x) \Big/ \left(1 - \int_0^x f(t)\,dt\right)$$

die Bedingung

$$r(x) \in [\alpha, \beta] \subset (0, \infty], \qquad \forall x > 0$$

erfüllt, so folgt:

$$E[XS(t)] \leqslant v \cdot (1+\Lambda_2), \qquad \forall t \geqslant 0$$

mit:

$$\Lambda_2 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha \cdot \beta \cdot \tau} \cdot \frac{\mu}{v}.$$

Anmerkung:

Im Fall exponential-verteilter Schadenzwischenzeiten T_{ij} ist die obere Schranke in Teil (b) exakt. Interpretiert man $\Lambda_1 \cdot \mu$ als Sicherheitszuschlag, so liefert die

obere Schranke aus Teil (a) eine einfache Formel für die Risikoprämie, kalkuliert nach dem Erwartungsprinzip.
Verfeinerungen des Korollars kann man mit einer neueren Arbeit von Brown (1980) herleiten.

Beweis:

Es gilt nach Theorem 3.14, S. 171 in Barlow und Proschan (1975)

$$\frac{t}{\tau}-1 \leqslant U(t) \leqslant \frac{t}{\tau}$$

also:

$$U(t+h)-U(t) \leqslant \frac{h}{\tau}+1.$$

Einsetzen in (3.1) liefert direkt die Behauptung. Analog folgt Aussage (b), denn nach Barlow und Proschan (1963), Theorem 5.2 hat man:

$$\frac{t}{\tau}+\frac{1}{\beta\tau}-1 \leqslant U(t) \leqslant \frac{t}{\tau}+\frac{1}{\alpha\tau}-1. \qquad \square$$

Prof. Dr. E. Kremer
Universität Hamburg
Institut für Mathematische Stochastik
Bundesstrasse 55
2000 Hamburg 13

Literaturangaben

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1963): Comparison of replacement policies, and renewal theory implications. Annals of Mathematical Statistics 1963, p. 577–589.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975): Statistical theory of reliability and lifte testing. Holt, Rinehart and Winston.

Benktander, G. (1954): A method of fixing the premium of excess-of-loss in fire. Transactions of the International Congress of Actuaries 1954, p. 823.

Benktander, G. (1969): The calculation of a motor excess rate. The Review 1969, p. 68.

Benktander, G. (1977): The calculation of a fluctuation loading for an excess-of-loss cover. Astin Bulletin 9, p. 272.

Brown, M. (1980): Bounds, inequalities, and monotonicity properties for some specialized renewal processes. Annals of Probability Vol. 8, p. 227–240.

Cox, D. R. (1966): Erneuerungstheorie München 1965.

Daley, D. J. and Mohan, N. R. (1978): Asymptotic behaviour of the variance of renewal processes and random walks. Annals of Probability 1978, p. 516.

De Vylder, F. (1982): Best upper bounds for integrals with respect to measures allowed to vary under conical and integral constraints. Insurance: Mathematics and Economics 1, p. 109.

De Vylder, F. and Goovaerts, M. J. (1982): Analytical best upper bounds on stop-loss premiums. Insurance: Mathematics and Economics 1, p. 197.

De Vylder, F., Goovaerts, M. J. and Haezendonck, H. (1984): The Mathematics of Insurance Premiums. Noth Holland.

Flemming, K. (1983): Einführung in die Mathematik der Nichtlebensrückversicherung. Kölnische Rück 1983.

Goovaerts, M. G. and Declerq, M. (1980): On an application of a smoothing inequality to the estimation of stop-loss-premiums. Scandinavian Actuarial Journal 1980.

Höddinghaus, B. (1980): Erfahrungstarifierung. Verlag Versicherungswirtschaft.

Karlin, S. and Taylor, H. H. (1975): A first course in stochastic processes. Academic Press, Inc.

Kohlas, J. (1977): Stochastische Methoden des Operations Research. Teubner 1977.

Kremer, E. (1982): Rating of largest claims and ECOMOR reinsurance treaties for large portfolios. Astin Bulletin 13, p. 47.

Kremer, E. (1983a): Distribution-free upper bounds on the premiums of the LCR and ECOMOR treaties. Insurance: Mathematics and Economics 1983.

Kremer, E. (1983b): Rating of nonproportional reinsurance treaties based on ordered claims. Nato-Advanced Study Institute on Insurance Premiums, Belgien, Juli 1983.

Kremer, E. (1984): An asymptotic formula for the net premium of some reinsurance treaties. Scandinavian Actuarial Journal 1984.

Norberg, R. (1979): The credibility approach to experience rating. Scandinavian Actuarial Journal 1979.

Vardi, Y. (1982): Nonparametric estimation in renewal processes. Annals of Statistics 1982.

Winkler, G. (1982): Integral representation and upper bounds for stop-loss-premiums under constraints given by inequalities. Scandinavian Actuarial Journal 1982.

Zusammenfassung

Zur Tarifierung spezieller Rückversicherungsverträge wird in der Praxis häufig die sogenannte Pay-Back-Methode eingesetzt. Das Verfahren wird dargestellt und mittels der Erneuerungstheorie mathematisch begründet.

Résumé

La tarification de certains contrats de réassurance se base parfois sur la méthode dite du «pay-back». L'article présente cette méthode et la justifie mathématiquement à partir de la théorie du renouvellement.

Summary

In practice one often applies the so-called Pay-Back-Method for rating special reinsurance covers. The method is presented and characterized by applying the renewal theory.