Ruine et réassurance

Marc-Henri Amsler, Lausanne

Ruine et réassurance

Introduction

Dans son article «How to fix retention» publié en 1978 [1] *E. Straub* a proposé une méthode permettant de déterminer selon un schéma commun pour les formes de réassurance les plus courantes les pleins de conservation correspondant à une probabilité de ruine donnée.
A la même époque, l'auteur du présent article développait une méthode susceptible de déterminer les conditions d'équilibre financier d'un portefeuille quelconque [2]. Le «Bulletin» a publié par la suite deux applications de cette dernière méthode, [3] et [4]. Les lignes qui suivent proposent une nouvelle application, à savoir celle à laquelle *E. Straub* s'est intéressé dans l'article rappelé ci-dessus: la détermination des pleins de conservation dans un traîté de réassurance. Dans leur essence, les deux méthodes en question sont proches. Le présent article développe cependant une solution à partir d'autres hypothèses, à savoir:

- que le nombre des sinistres est de type Poisson pondéré, non de type Poisson pur;
- que la réassurance altère le taux de la marge de sécurité comprise dans les primes;
- que la charge annuelle des sinistres est de type gamma.

La seconde hypothèse est d'importance. En effet, la réassurance a pour premier but de céder une forte part des fluctuations au réassureur. Le risque de fluctuation étant financé par la marge de sécurité, il est dans la nature des choses qu'un portefeuille, réassurance déduite, doive se contenter d'un taux de marge de sécurité plus faible que sans réassurance.
Les hypothèses 1 et 3 ne sont pas fondamentales.
Par ailleurs, les développements qui suivent conservent certaines notations utilisées dans les articles [3] et [4].
Le présent article se propose le triple objectif suivant:

a) indiquer une méthode permettant de fixer les pleins de conservation vis-à-vis d'un réassureur de façon à satisfaire aux critères de la «probabilité de ruine» et de la «marge de solvabilité», toujours plus à l'honneur en Europe occidentale;

b) montrer que la méthode proposée relève d'un seul principe, contenu dans l'équation d'équilibre aléatoire des portefeuilles d'assurance; enfin

c) sur la base d'un exemple proche de la pratique et pour les formes de réassurance les plus courantes, mener les raisonements jusqu'à l'obtention des valeurs numériques des pleins de conservation correspondant à une probabilité de ruine imposée d'avance.

L'aspect théorique du présent travail prend racine tout naturellement dans la théorie du risque collectif. Il s'appuye sur la théorie de l'équation d'équilibre aléatoire, qui représente un développement récent de la théorie de la ruine au sens de Cramèr. Sous son aspect pratique, le travail se propose de résoudre le problème suivant: connaissant les caractéristiques financières et techniques d'une compagnie ou d'un portefeuille d'assurance – telles que l'encaisse de primes, les marges, les coûts d'exploitation, la structure des risques, les provisions libres – que peut-on dire du niveau de solvabilité de ladite compagnie? Si le niveau de solvabilité est insuffisant, comment aménager la réassurance de façon à ramener ce niveau dans des limites acceptables?

Les chapitres 1 et 2 ci-après exposent les bases théoriques de la méthode. L'actuaire intéressé essentiellement à l'application de la méthode peut s'économiser l'étude de ces deux premiers chapitres. Le chapitre 3 répond à la première question posée ci-dessus: que peut-on dire du niveau de solvabilité d'un portefeuille non-réassuré? Les chapitres 4 à 7 traitent de la manière de fixer les pleins de conservation pour les trois types de réassurance les plus courants: la réassurance proportionnelle, la réassurance en stop-loss et la réassurance en excess-of-loss. Le chapitre 8 présente, pour un niveau de solvabilité donné, une comparaison des coûts entre les divers types de réassurance traîtés aux chapitres 4 à 7.

La compagnie d'assurance sur laquelle s'appliqueront les raisonnements théoriques, en vue de l'obtention de résultats numériques, a les caractéristiques suivantes:

Compagnie «Star Ltd»
Données techniques et économiques

Encaisse annuelle de primes	13000000.–
Frais d'administration et charges diverses	2000000.–
Disponible pour couvrir les sinistres $P+\Lambda=$	11000000.–
Provision de fluctuation $R=$	3600000.–

		moyenne	variance
Charge annuelle des sinistres	X	$E = 10\,000\,000$	$V = 2 \cdot 10^{12}$
Variable de structure	W	$E_W = 1$	$V_W = 1/h = 0{,}01$
Variable de Poisson	H	$E_H = t = 5000$	$V_H = 5000$
Montant d'un sinistre	Y	$E_Y = 2000$	$V_Y = 196 \cdot 10^6$

1. Notations et définitions

L'auteur pense pouvoir s'appuyer sur les connaissances suivantes du lecteur dans le domaine des processus actuariels:

1.1 Variables aléatoires

Les variables aléatoires intervenant dans le processus actuariel sont:
W = variable de structure, caractérisant les fluctuations globales du risque assuré;
H = variable du hasard pur (variable de Poisson);
N = nombre des sinistres intervenant en une année;
Y = montant des sinistres, pris individuellement;
X = montant total des sinistres intervenant pendant une année.
Les dites variables sont liées entre elles. La loi du nombre N est obtenue par pondération des lois de Poisson de probabilités

$$\operatorname{prob}(H=n) = \frac{(wt)^n}{n!} e^{-wt} \tag{1}$$

par la loi de structure W, comme suit:

$$\operatorname{prob}(N=n) = \int_w f(w) \frac{(wt)^n}{n!} e^{-wt} dw \tag{2}$$

et la loi des charges totales annuelles X par pondération des lois du montant d'un sinistre convoluées par la loi du nombre N

$$\operatorname{prob}(X<x) = \sum_n \operatorname{prob}(N=n) F_Y^{*n}(x). \tag{3}$$

Ordinairement les opérations de pondération ne conduisent pas, pour X, à des lois faciles à manier.

1.2 Fonction caractéristique réelle

Heureusement que dans les questions d'équilibre financier, ce ne sont pas les fonctions de répartition elles-mêmes qui interviennent, mais les fonctions caractéristiques réelles, qui, elles, sont beaucoup plus maniables.
La fonction caractéristique réelle (abrégée par le sigle f.c.r.) d'une variable aléatoire quelconque est donnée par l'expression

$$\psi(s)=\ln \int_x e^{sx} dF(x).$$

Pour la plupart des lois analytiques, $\psi(s)$ exists quoique parfois un peu compliquée à exprimer analytiquement. Nous utiliserons par la suite les f.c.r. suivantes:

	probabilités	fonction caractéristique
Loi de Poisson:	$\frac{t^n}{n!} e^{-t}$	$\psi(s)=t(e^s-1)$
Loi gamma:	$\frac{h^h}{\Gamma(h)} x^{h-1} e^{-hx}$	$\psi(s)=\ln\left(1-\frac{s}{h}\right)^{-h}$

Les f.c.r. ont notamment les trois propriétés suivantes:

Propriété 1: $\psi'(0)=E(X)$ (espérance mathématique)
$\psi''(0)=V(X)$ (variance)

Propriété 2: Si X et Z sont liées linéairement par

$$Z=a+bX$$

alors $$\psi_Z(s)=as+\psi_X(bs),$$

ψ_Z et ψ_X représentent les f.c.r. des variables Z et X.
Propriété 3: Dans une pondération des types (2) et (3), les f.c.r. des lois pondérante, pondérée et résultante sont liées par la règle d'inclusion suivante:

$$\underset{\text{résultante}}{\psi(s)} = \underset{\text{pondérante}}{\psi} \underset{\text{pondérée}}{[\psi(s)]}. \tag{4}$$

De la propriété 3, nous avons, entre les f.c.r. des variables W, H, N, Y et X intervenant dans le processus actuariel, les relations (les symboles sans indice se rapportent à la variable X du montant total des sinistres):

correspondant à la pondération (2):

$$\psi_N(s) = \psi_W[\psi_H(s)], \tag{5}$$

correspondant à la pondération (3):

$$\psi(s) = \psi_N[\psi_Y(s)] \tag{6}$$

soit, pour l'ensemble,

$$\psi(s) = \psi_W[\psi_H[\psi_Y(s)]]. \tag{7}$$

1.3 Les moments

Les relations entre le espérances mathématiques et les variances des variables W, H et Y créant le processus actuariel d'une part, et l'espérance mathématique et la variance de la variable X résultant de la pondération d'autre part sont données par dérivation de la relation (7) à l'origine (selon propriété 1 des f.c.r.). En dérivant les fonctions imbriquées (7) par rapport à s et en portant $s=0$, on trouve:

$$E(X) = E(W)\,E(H)\,E(Y) \tag{8}$$

$$V(X) = V(W)\,E^2(H)\,E^2(Y) + E(W)\,V(H)\,E^2(Y) + E(W)\,E(H)\,V(Y) \tag{9}$$

Notons en passant que ces relations sont bien satisfaites pour la «Star Ltd» dont les caractéristiques techniques ont été données en introduction:

$E(X) = 1 \cdot 5000 \cdot 2000 = 10\,000\,000$

$V(X) = 0{,}01 \cdot 5000^2 \cdot 2000^2 + 1 \cdot 5000 \cdot 2000^2 + 1 \cdot 5000 \cdot 196 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^{12}.$

Si l'on introduit pour les espérances mathématiques et variances des variables W et H les valeurs et symboles suivants:

$$E(W) = 1 \qquad V(W) = \tfrac{1}{h}$$
$$E(H) = t \qquad V(H) = t$$

on obtient pour l'espérance et la variance du montant total X des sinistres, selon (8) et (9):

$$E(X) = t \cdot E(Y) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \tfrac{1}{h}\, t^2 E^2(Y) + tE^2(Y) + tV(Y) \\ &= \tfrac{1}{h}\, t^2 E^2(Y) + tm_2(Y) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{où } m_2(Y) = V(Y) + E^2(Y).$$

1.4 Calculs numériques

Pour certaines lois de distribution, les moments et les f.c.r. s'expriment par des formules mathématiques simples, qui permettent d'obtenir facilement des valeurs numériques. D'autres lois – notamment les lois de variables tronquées – sont malcommodes à manier par des formules mathématiques. Pour obtenir des valeurs numériques, on évaluera simplement les intégrales correspondantes par des méthodes adéquates de quadrature (p.ex. par la formula de Simpson). Pour une variable $\bar{X}$ tronquée en M, nous avons p.ex.

$$E(\bar{X}) = \int_0^M x\,dF(x) + M\,[1 - F(M)]$$

$$m_2(\bar{X}) = \int_0^M x^2\,dF(x) + M^2\,[1 - F(M)]$$

$$\psi_{\bar{X}}(s) = \ln\left[\int_0^M e^{sx}\,dF(x) + e^{aM}\,[1 - F(M)]\right]$$

Le calcul pratique de ces intégrales ne présente en fait pas de complications majeures: les intégrants de même que les intervalles d'intégration sont bornés; ainsi l'évaluation des intégrales ne pose pas de problèmes de convergence. Enfin les ordinateurs courants, de même que les calculateurs de table programmables, permettent d'obtenir les valeurs numériques avec toute la précision désirée. C'est cette méthode de calcul direct que nous appliquerons pour déterminer les moments des variables tronquées intervenant dans les portefeuilles réassurés.

2. **Emprunts à la théorie du risque collectif**

2.1 Probabilité de ruine

La probabilité de ruine d'un portefeuille d'assurance a été définie et formalisée mathématiquement par l'Ecole suédoise. On a

$$\text{prob. de ruine} < \varepsilon = e^{\varrho R}, \tag{12}$$

expression dans laquelle

R = montant de la provision de fluctuation
ϱ = coefficient défini par l'équation

$$\int e^{\varrho x} f_B(x)\,dx = 1 \tag{13}$$

où $f_B(x)$ est la densité de probabilité liée à la valeur B du bénéfice annuel.
On montre que le coefficient ϱ, solution de (13), est unique. Sa valeur est négative.
Définie par les expressions (12) et (13), la notion de probabilité de ruine n'est pas aisée à manipuler. Dans bien des cas la résolution de l'équation (13) est ardue; de plus, les liaisons de ϱ avec les caractéristiques du portefeuille, prime, marge, provision de fluctuation, ne sont pas faciles à profiler. Notre propos est de mettre les relations (12) et (13) sous une forme praticable en vue des applications aux problèmes de réassurance.

2.2 *Equation d'équilibre aléatoire*

En prenant le logarithme naturel des deux membres de (13), on obtient

$$\ln \int e^{\varrho x} f_B(x) \cdot dx = 0.$$

Le membre de gauche est la f.c.r. du montant du bénéfice annuel B pour la valeur $s=\varrho$ de l'argument. (13) s'écrit donc

$$\psi_B(\varrho) = 0. \tag{14}$$

Or la variable B représentant le bénéfice annuel est liée à la prime pure P du portefeuille, à sa marge de sécurité Λ et à la variable X des charges totales annuelles des sinistres par

$$B = P + \Lambda - X.$$

B et X sont donc liés linéairement. La propriété 2 des f.c.r. (voir chapitre 1) donne

$$\psi_B(s) = (P+\Lambda)s + \psi(-s). \tag{15}$$

L'équation (14) dit que (15) s'annule pour $s=\varrho$, c.à.d.

$$(P+\Lambda)\,\varrho + \psi(-\varrho) = 0. \tag{16}$$

Or ϱ peut être extrait de (12):

$$\varrho = \frac{\ln \varepsilon}{R}.$$

En portant cette dernière valeur dans (16), on obtient

$$\boxed{(P+\Lambda)\,\frac{\ln \varepsilon}{R}+\psi\left(\frac{-\ln \varepsilon}{R}\right)=0} \tag{17a}$$

ou, en utilisant (7),

$$\boxed{(P+\Lambda)\,\frac{\ln \varepsilon}{R}+\psi_W\left[\psi_H\left[\psi_Y\left(\frac{-\ln \varepsilon}{R}\right)\right]\right]=0} \tag{17b}$$

Les expressions (17a) et (17b) représentent deux formes d'une même équation, dite «équation d'équilibre aléatoire». Cette équation, fondamentale, lie, sous sa forme concentrée (17a)

- les caractéristiques du risque, comprises dans la f.c.r. $\psi(s)$,
- aux moyens financiers nécessaires pour supporter le risque soit P, Λ et R.

Sous sa forme explicite (17b), l'équation d'équilibre lie

- les caractéristiques des trois variables intervenant dans le processus actuariel:
  la variable de structure W;
  la loi de Poisson H;
  le montant des sinistres individuels Y;
- aux moyens financiers protégeant le portefeuille
  la prime pure P;
  la marge de sécurité Λ comprise dans les primes;
  la provision de fluctuation R.

La borne supérieure ε de la probabilité de ruine intervient dans l'équation par son seul logarithme et établit la liaison entre les deux pôles du portefeuille: le risque et les moyens financiers.

Les équations (17a) et (17b) ne comportent que des grandeurs ayant chacune un sens bien défini dans le cadre d'un portefeuille d'assurance. Le coefficient ϱ de la représentation classique a disparu.

L'équation d'équilibre représente l'aboutissement du développement mathématique dont nous avons besoin pour résoudre les questions de réassurance.

2.3 Validité de l'équation d'équilibre aléatoire

Il est évident que l'équation d'équilibre aléatoire ci-dessus est valable sous les hypothèses qui sont généralement admises en théorie du risque collectif, soit:

- stationnarité du processus;
- indépendance statistique des variables N (nombre des sinistres) et Y (montant des sinistres individuels);
- indépendance statistique des montants des sinistres.

Par ailleurs, l'équation d'équilibre a une validité générale, que le portefeuille considéré soit réassuré ou non. En effet, dans les développements mathématiques qui ont abouti à l'équation d'équilibre, aucune hypothèse restrictive n'est intervenue sur le type de portefeuille considéré.

3. Portefeuille sans réassurance

Comme expliqué plus haut, l'équation d'équilibre lie, par l'intermédiaire de la probabilité de ruine ε, les risques aux moyens financiers mis à disposition. A titre d'exemple, appliquons cette équation à la «Star Ltd». Des caractéristiques indiquées en introduction extrayons les éléments suivants:

	en monnaie originale	en unités monétaires normées[1]
Encaisse de primes brutes, par an	13000000	1,3
Frais et charges diverses	2000000	0,2
Disponible pour couvrir les risques	$P+\Lambda=11000000$	1,1
Coût annuel des sinistres		
en moyenne	$E(X)=P=10000000$	1,0
de variance	$V(X) = 2\cdot 10^{12}$	0,02
Provision de fluctuation	$R=3600000$	0,36

Dans ce portefeuille, les paramètres intervenant dans l'équation d'équilibre sont:

$$P=1,0$$
$$\Lambda=0,1$$
$$V=0,02$$
$$R=0,36$$

[1] Ramenant la charge annuelle moyenne à l'unité: $E(X)=1$.

Il est notoire qu'il est très difficile de connaître le type exact de la distribution du montant total des sinistres X. Tout ce que l'on sait est qu'une telle distribution n'est pas gaussienne. Arrêtons-nous à une hypothèse plausible: le montant total des sinistres pendant un an, la variable X, est de type gamma.

La f.c.r. d'une variable gamma d'espérance mathématique $E = P$ et de variance V est:

$$\psi(s) = -\frac{P^2}{V} \ln\left(1 - \frac{V}{P} s\right).$$

L'équation d'équilibre (17a) prend ainsi la forme

$$(P + \Lambda) \frac{\ln \varepsilon}{R} - \frac{P^2}{V} \ln\left(1 + \frac{V}{P} \frac{\ln \varepsilon}{R}\right) = 0. \tag{18}$$

En remplaçant dans cette équation les paramètres par leurs valeurs numériques, comme indiqué ci-dessus, nous trouvons:

$$(1 + 0{,}1) \frac{\ln \varepsilon}{0{,}36} - \frac{1}{0{,}02} \ln\left(1 + \frac{0{,}02}{1} \frac{\ln \varepsilon}{0{,}36}\right) = 0.$$

La solution de cette équation donne le niveau de stabilité du portefeuille. On trouve

$$\varepsilon = 0{,}042.$$

L'équation d'équilibre indique donc qu'entre le risque (supposé de type gamma) et les moyens financiers, l'équilibre s'établit à un niveau de probabilité de ruine de 4% (on sait que la probabilité de ruine se situe au-dessous de la borne supérieure ε). L'intérêt de l'équation d'équilibre sous sa forme (18) réside dans le fait qu'il est possible de mesurer l'influence de chacun des paramètres sur la probabilité de ruine, p.ex. l'influence sur ε de la marge de sécurité Λ ou de la provision de fluctuation R.

Un niveau $\varepsilon = 4{,}2\%$ n'est pas satisfaisant: la «Star Ltd» doit améliorer son financement ... ou céder une partie de ses risques à un réassureur. C'est par la réassurance que nous chercherons à rétablir l'équilibre de la «Star». Notre objectif est de réduire ε de 4,2% à 1%.

4. Partage des risques avec le réassureur

4.1 *Critère de solvabilité*

Comme indiqué en introduction, le critère utilisé dans la présente étude pour juger du niveau de solvabilité d'un portefeuille d'assurance est celui de la

probabilité de ruine. L'outil pour mesurer la probabilité de ruine est l'équation d'équilibre aléatoire (17a) resp. (17b).
Lorsque le portefeuille étudié est protégé par une réassurance, l'équation d'équilibre comprendra prime, marge et paramètres de risque du portefeuille pour propre compte (portefeuille ppc), donc réassurance déduite. En utilisant pour le portefeuille ppc des symboles barrés, l'équation d'équilibre aléatoire aura la forme

$$(\bar{P}+\bar{\Lambda})\,\frac{\ln\bar{\varepsilon}}{R}+\bar{\psi}\left(\frac{-\ln\bar{\varepsilon}}{R}\right)=0. \tag{19}$$

Les paramètres $\bar{P}$, $\bar{\Lambda}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\psi}$ dépendront évidemment de la manière avec laquelle le partage se fera entre la compagnie cédante et le réassureur, notamment du plein de conservation M. Si maintenant l'on se propose d'obtenir une stabilité caractérisée par une borne supérieure de la probabilité de ruine imposée d'avance, une probabilité de $\varepsilon = 1\%$ p.ex., l'équation d'équilibre ne comportera plus qu'un seul paramètre inconnu : le plein de conservation M, compris dans les paramètres. La résolution de l'équation par rapport à ce paramètre représentera l'aboutissement de l'opération que nous nous proposons de réaliser : déterminer le plein de conservation M correspondant à une probabilité de ruine ε donnée. Restera encore par la suite à déterminer la prime de réassurance correspondant au dit plein de conservation.
Les éléments de l'équation d'équilibre qui doivent être partagés avec le réassureur sont
- le prime pure P,
- la marge de sécurité comprise dans les primes Λ,
- le risque, concrétisé par la f.c.r. $\psi(s)$.

4.2 *Partage de la prime pure P*

Le rôle de la prime pure P étant de financer la moyenne des charges annuelles des sinistres, la prime P doit être partagée entre compagnie et réassureur proportionnellement aux charges moyennes supportées par les deux partenaires. Soit $E(X)$ la charge moyenne du portefeuille entier et $E(\bar{X})$ la charge ppc. Le rapport

$$\alpha=\frac{E(\bar{X})}{E(X)} \tag{20}$$

donne la règle du partage de la prime:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{– prime pure ppc} & \bar{P}=\alpha P \\ \text{– prime pure de réassurance} & \bar{\bar{P}}=(1-\alpha)P \end{array}\right\} \quad (21)$$

4.3 *Partage de la marge de sécurité Λ*

Le rôle de la marge Λ étant de protéger la compagnie contre le risque de fluctuation des charges annuelles, la marge Λ doit être partagée entre compagnie et réassureur en fonction de l'intensité des fluctuations. Notre intention n'est pas de proposer la fonction qu'il y a lieu de choisir. Nous avons simplement opté pour un partage conservant à la compagnie cédante une marge de sécurité réduite en proportion de la réduction de l'écart-type obtenue par la réassurance. D'autres règles de partage sont possibles; notre méthode permet d'introduire pour le partage toute fonction de la variance.
Soit $V(X)$ la variance du portefeuille entier et $V(\bar{X})$ la variance du portefeuille ppc. Le rapport

$$\beta=\left(\frac{V(\bar{X})}{V(X)}\right)^{1/2} \quad (22)$$

donne ainsi, au vu de notre option, la règle de partage de la marge de sécurité comprise dans les primes:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{– marge de sécurité ppc} & \bar{\Lambda}=\beta\Lambda \\ \text{– marge de sécurité de réassurance} & \bar{\bar{\Lambda}}=(1-\beta)\Lambda \end{array}\right\} \quad (23)$$

4.4 *Partage des risques*

C'est la f.c.r. $\psi(s)$ qui caractérise les risques. Selon le type de réassurance choisi, le partage se fera au niveau du montant total annuel X des sinistres ou au niveau du montant d'un sinistre Y.
Pour une variable X (positive) quelconque, de fonction de répartition $F(x)$, correspondant au risque complet, on a (c.f. chapitre 1)

$$\psi(s)=\ln \int e^{sx}dF(x),$$

et pour cette même variable $\bar{X}$ mais tronquée en M:

$$\bar{\psi}(s)=\ln\left[\int_0^M e^{sx}dF(x)+e^{sM}(1-F(M))\right], \tag{24}$$

c.f. chiffre 1.4.

4.5 *Equation d'équilibre du portefeuille pour propre compte*

En introduisant dans l'équation d'équilibre les grandeurs correspondant au portefeuille ppc selon chiffres 4.2 à 4.4, nous obtenons:
pour une réassurance du montant total annuel des sinistres

$$(\alpha P+\beta \Lambda)\frac{\ln\bar{\varepsilon}}{R}+\bar{\psi}\left(\frac{-\ln\bar{\varepsilon}}{R}\right)=0, \tag{25a}$$

pour une réassurance du montant des sinistres individuels

$$(\alpha P+\beta \Lambda)\frac{\ln\bar{\varepsilon}}{R}+\psi_W\left[\psi_H\left[\bar{\psi}_Y\left(\frac{-\ln\bar{\varepsilon}}{R}\right)\right]\right]=0. \tag{25b}$$

Dans ces équations, $\bar{\varepsilon}$ représente la borne supérieure de la probabilité de ruine correspondant au portefeuille pour propre compte.

4.6 *Prime de réassurance*

Les facteurs α et β représentant les parts des primes pures et marges conservées par la compagnie cédante (c.f. chiffres 4.2 et 4.3), la prime cédée au réassureur, marge de sécurité comprise, est

– prime de réassurance $=\bar{\bar{P}}+\bar{\bar{\Lambda}}$

$$=(1-\alpha)P+(1-\beta)\Lambda \tag{26}$$

5. **Réassurance proportionnelle (en quote-part)**

Cette forme de réassurance est caractérisée par un partage du portefeuille (primes, marges et sinistres) dans une proportion fixe. Soit α la part conservée ppc par la compagnie cédante:

$$\alpha<1.$$

L'effet de la réassurance sur le niveau ε de la probabilité de ruine se détecte immédiatement à partir de l'équation d'équilibre. Entre les grandeurs se rapportant au portefeuille entier (symboles non-barrés) et ceux du portefeuille ppc (symboles barrés), nous avons

$$\bar{X} = \alpha X$$

donc
et
$$\left.\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \alpha E(X) \\ V(\bar{X}) &= \alpha^2 V(X) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

et, selon la propriété 2 des f.c.r. (chiffre 1.2 ci-dessus)

$$\bar{\psi}(s) = \psi(\alpha s). \tag{28}$$

De ces relations, nous tirons:

de (27) $\quad \bar{P} = \alpha P$

et $\quad \beta^2 = \dfrac{V(\bar{X})}{V(X)} = \alpha^2$

c.-à-d. $\quad \beta = \alpha$

c.-à-d., de (23) $\quad \bar{\Lambda} = \beta \Lambda = \alpha \Lambda$

De (28), on tire

$$\bar{\psi}\left(\frac{-ln\,\bar{\varepsilon}}{R}\right) = \psi\left(\frac{-\alpha \ln \bar{\varepsilon}}{R}\right).$$

L'équation d'équilibre (25a) devient alors – et ceci quel que soit le type de la distribution du montant total annuel X des sinistres –

$$(\alpha P + \alpha \Lambda)\,\frac{\ln \bar{\varepsilon}}{R} + \psi\left(\frac{-\alpha \ln \bar{\varepsilon}}{R}\right) = 0.$$

Cette équation est pratiquement identique à celle du portefeuille complet (17a)

$$(P + \Lambda)\,\frac{\ln \varepsilon}{R} + \psi\left(\frac{-\ln \varepsilon}{R}\right) = 0.$$

L'équation d'équilibre n'ayant qu'une solution (c.f. chapitre 1), on tire de ces deux équations:

$$\alpha \ln \bar{\varepsilon} = \ln \varepsilon$$

c.-à-d. $$\alpha = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \bar{\varepsilon}} \tag{29}$$

ou $$\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{30}$$

Cette relation, simple, lie les probabilités de ruine «avec» et «sans» réassurance, α étant le taux de la part conservée par la compagnie cédante pour propre compte. La relation dit, p.ex., qu'un partage par moitié entre compagnie et réassureur ($\alpha = 0,5$) réduit la borne supérieure de la probabilité de ruine à son carré. Si p.ex. $\varepsilon = 0,1$, ce qui est signe d'une solvabilité plus que problématique, la cession de la moitié du portefeuille au réassureur permet à la compagnie cédante d'atteindre une situation plus satisfaisante

$$\bar{\varepsilon} = (0,1)^2 = 0,01.$$

Cette réduction est essentiellement due au fait que la compagnie cédante conserve la même provision de fluctuation R, donc dispose, après réassurance, d'une provision de fluctuation deux fois plus importante en valeur relative, par rapport au volume du portefeuille.

Enfin la prime de réassurance, marge comprise, est donnée par la formule

$$\bar{\bar{P}} + \bar{\bar{\Lambda}} = (1-\alpha)\,(P+\Lambda) \tag{31}$$

Exemple (portefeuille de la «Star Ltd»).

Au chapitre 3, nous avons trouvé pour la borne supérieure de la probabilité de ruine *sans* réassurance

$$\varepsilon = 0,042 \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \ln \varepsilon = -3,170$$

Nous désirons ramener ε à

$$\bar{\varepsilon} = 0,01 \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \ln \bar{\varepsilon} = -4,605.$$

Ainsi le plein de conservation vaut, selon (29):

$$\alpha = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \bar{\varepsilon}} = 0,6884.$$

Le plein de conservation est de 68,84%.

La «Star» doit céder à son réassureur 31,16% de son portefeuille pour ramener sa probabilité de ruine au-dessous de la borne supérieure de 1%.

Les primes se répartissent comme suit entre la cédante et son réassureur:

	portefeuille ppc		au réassureur
$P = 10000000 =$	6884000	$+$	3116000
$\Lambda = 1000000 =$	688400	$+$	311600
au total $11000000 =$	7572400	$+$	3427600

Relevons enfin que, en réassurance proportionnelle, les formules et les valeurs numériques ne dépendent pas du type de la variable X représentant les charges annuelles des sinistres.

6. Réassurance en stop-loss

Dans un contrat de réassurance en stop-loss, le partage entre la compagnie cédante et le réassureur s'opère au niveau des charges totales de l'année: X. Soit M le plein de conservation de la cédante. Les équations d'équilibre sont (équations 17a et 25a) pour le portefeuille entier:

$$(P+\Lambda)\frac{\ln \varepsilon}{R}+\psi\left(\frac{-\ln \varepsilon}{R}\right)=0$$

et pour le portefeuille ppc

$$(\alpha P+\beta\Lambda)\frac{\ln \bar{\varepsilon}}{R}+\bar{\psi}\left(\frac{-\ln \bar{\varepsilon}}{R}\right)=0.$$

La recherche du plein de conservation M s'opère comme indiqué sous chiffre 4.1: dans l'équation d'équilibre du portefeuille ppc les paramètres α et β, de même que la fonction $\bar{\psi}$ du risque tronqué dépendent du plein de conservation M. Si on se fixe un niveau de solvabilité, c.-à-d. une borne supérieure $\bar{\varepsilon}$, l'équation d'équilibre du portefeuille ppc ne comporte d'inconnu que le plein M. Une résolution de l'équation par rapport à M donne donc la réponse à notre question: connaître le montant du plein M correspondant à un niveau de solvabilité donné.
La résolution pratique de l'équation d'équilibre se fera en donnant à M différentes valeurs, puis en déterminant, par approximations successives, pour quelle valeur de M l'équation est satisfaite.

Exemple (portefeuille de la «Star Ltd»)
Le portefeuille a les caractéristiques suivantes (c.f. chapitre 3):

$$P=1$$
$$\Lambda=0{,}1$$
$$V=0{,}02$$
$$R=0{,}36.$$

Le portefeuille non-réassuré, supposé de type gamma, est «en équilibre» à un niveau de solvabilité correspondant à une borne $\varepsilon=4{,}2\%$. Cette situation est insatisfaisante. Essayons d'abaisser la borne de 4,2% à 1%, par une réassurance en stop-loss. Précisons tout d'abord la manière de déterminer les valeurs numériques des facteurs α et β, de même que la valeur de la f.c.r. $\bar{\psi}$ en fonction du plein M. Les formules pour les moments et la f.c.r. de la variable $\bar{X}$ tronquée en M

$$E(\bar{X}), \quad m_2(\bar{X}), \quad \psi_{\bar{X}}(s)$$

ont été indiquées au chiffre 1.4. Le calcul numérique de ces valeurs se fait par quadratures.
Le coefficient α devient (formule 20)

$$\alpha=\frac{E(\bar{X})}{E(X)}=E(\bar{X}), \quad \text{car } E(X)=1.$$

Le coefficient β s'exprime au moyen des variances «avec» et «sans» réassurance. On a
– portefeuille complet $\quad V(X)=0{,}02$
– portefeuille ppc $\quad V(\bar{X})=m_2(\bar{X})-E^2(\bar{X})$.
Ainsi, selon (22)

$$\beta=\left[\frac{V(\bar{X})}{V(X)}\right]^{1/2}=\left[\frac{m_2(\bar{X})-E^2(\bar{X})}{0{,}02}\right]^{1/2}.$$

Enfin la f.c.r. $\bar{\psi}(s)$ doit être calculée pour un argument

$$s=\frac{-\ln\bar{\varepsilon}}{R}=\frac{-\ln(0{,}01)}{0{,}36}=+12{,}79213941.$$

Le tableau I indique[2] pour quelques valeurs du plein M, les valeurs numériques de α et de β, ainsi que de $\bar{\psi}$. En dernière colonne, on trouve la valeur du membre

[2] Sous l'hypothèse d'une charge annuelle de type gamma.

de gauche de l'équation d'équilibre. L'équilibre est acquis pour $M = 1{,}2234$, c.-à-d. pour un plein de conservation de 122,34% de la charge annuelle moyenne des sinistres.

Tableau I

Réassurance en stop-loss de la «Star Ltd»

Valeurs numériques des paramètres α, β et de la fonction $\bar{\psi}$ pour diverses valeurs du plein de conservation M

M en unités monétaires normées	α	β	$\bar{\psi}$	membre de gauche de l'équation d'équilibre*
1,00	0,94367	0,55123	12,39170	−0,38506
1,10	0,97867	0,77061	13,20475	−0,30029
1,20	0,99361	0,90906	13,80849	−0,06479
1,22	0,99512	0,92671	13,90570	−0,00943
→1,2234	0,99534	0,92942	13,92149	+0,00005←
1,23	0,99574	0,93446	13,95155	+0,01847
1,30	0,99847	0,97206	14,22446	+0,20835
1,40	0,99971	0,99328	14,48829	+0,42929
∞	1,00000	1,00000	14,77515	+0,70379

* Equation d'équilibre:

$$(\alpha P + \beta \Lambda)\,\frac{\ln \bar{\varepsilon}}{R} + \bar{\psi}\left(\frac{-\ln \bar{\varepsilon}}{R}\right) = 0$$

c.-à-d.

$$(\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0{,}1)\,\frac{\ln 0{,}01}{0{,}36} + \bar{\psi}\left(\frac{-\ln 0{,}01}{0{,}36}\right) = 0.$$

Pour la valeur de M assurant l'équilibre, la connaissance des paramètres α et β permet de calculer la prime de réassurance, selon (26):
La prime se décompose comme suit:

		portefeuille ppc		au réassureur
prime pure	$P =$	αP	+	$(1-\alpha)P$
marge de sécurité	$\Lambda =$	$\beta\Lambda$	+	$(1-\beta)\Lambda$
soit, en valeurs numériques, prime pure	10000000 =	9953400	+	46600
marge de sécurité	1000000 =	929420	+	70580
au total	11000000 =	10882820	+	117180
soit	100%	98,93%		1,07%

On remarquera que l'on a, à l'équilibre,

$$\beta < \alpha \quad \text{resp.} \quad 1-\beta > 1-\alpha$$

c.-à-d. que la compagnie doit céder relativement une plus forte part sur sa marge de sécurité que sur sa prime pure; cela s'explique par le fait que la cédante se décharge sur son réassureur, pour une prime modique, des fluctuations *dangereuses* de son portefeuille.

A noter encore que la marge cédée au réassureur (70580) est en valeur absolue plus forte que la prime pure (46600). Ce fait dépend évidemment des caractéristiques techniques du portefeuille considéré et de l'option prise sur la règle de partage de la marge de sécurité.

Une dernière remarque: la valeur de la fonction de répartition de la charge annuelle X des sinistres pour le plein $M=1{,}2234$

$$F(1{,}2234)=0{,}93596 \simeq \frac{15}{16}$$

indique que le réassureur interviendra en moyenne une fois tous les 16 ans. La charge annuelle moyenne du réassureur étant de

$$(1-\alpha)P=0{,}00466\,P,$$

la prestation du réassureur, lorsque les sinistres dépasseront le plein de 1.2234 se montera en moyenne à

$$\frac{(1-\alpha)P}{1-F(1{,}2234)}=\frac{0{,}00466\,P}{0{,}06404}=0{,}0728\,P$$

c.-à-d. à 728000 en unités monétaires originales.

Toutes ces valeurs numériques se rapportent à un niveau de solvabilité correspondant à une borne supérieure de la probabilité de ruine de $\bar{\varepsilon}=1\%$. Les calculs peuvent être refaits aisément si le niveau de 1% est jugé trop élevé.

Pour mener à bien les calculs numériques dans le cas de la réassurance en stop-loss, nous avons fait l'hypothèse que la charge annuelle X des sinistres est de type gamma. D'autres hypothèses de travail sont pensables.

7. Réassurance en excess-of-loss

Dans ce genre de contrat, le partage entre la compagnie cédante et le réassureur s'opère au niveau des sinistres pris individuellement, c.-à-d. au niveau de la variable Y. Soit à nouveau M le plein conservé par la cédante sur chaque sinistre. Les équations d'équilibre sont (équations 17b et 25b):

pour le portefeuille entier

$$(P+\Lambda)\frac{\ln \varepsilon}{R}+\psi_W\left[\psi_H\left[\psi_Y\left(\frac{-\ln \varepsilon}{R}\right)\right]\right]=0$$

et pour le portefeuille ppc

$$(\alpha P+\beta\Lambda)\frac{\ln \bar{\varepsilon}}{R}+\psi_W\left[\psi_H\left[\bar{\psi}_{\bar{Y}}\left(\frac{-\ln \bar{\varepsilon}}{R}\right)\right]\right]=0.$$

La recherche du plein M s'effectuera sur le schéma décrit au chiffre 4.1 et déjà utilisé dans le cas de la réassurance en stop-loss. Notre objectif est de ramener une probabilité de ruine jugée par trop forte à un niveau acceptable.

Exemple (portefeuille de la «Star Ltd»)
Les éléments du portefeuille dont nous aurons besoin sont:

		en monnaie originale	en u.m.o.*
Encaisse annuelle de primes		13000000	6500
Frais et charges diverses		2000000	1000
Disponsible pour les sinistres	$P+\Lambda=$	11000000	5500
Provision de fluctuation	$R=$	3600000	1800
Charge annuelle des sinistres X			
moyenne		10000000	5000
variance		$2\cdot 10^{12}$	$0{,}5\cdot 10^{6}$
Variable de structure W			
moyenne		1	1
variance		$1/h=0{,}01$	0,01
Nombre des sinistres H			
moyenne		$t=5000$	5000
variance		5000	5000
Montant des sinistres Y			
moyenne		2000	1
variance		$196\cdot 10^{6}$	49

* Ramenant le coût moyen d'un sinistre à l'unité: $E(Y)=1$ (u.m.o. = unité monétaire opérationnelle).

Il y a lieu maintenant de faire des hypothèses sur la nature des variables W, H et Y de la «Star Ltd». Faison les hypothèses suivantes – plausibles et souvent invoquées dans ce genre de questions:

Variable W: de type gamma, avec

$$E(W)=1 \quad V(W)=1/h \quad \psi(s)=-h\ln\left(1-\frac{s}{h}\right)$$

pour la «Star», $h=100$

Variable H: de type de Poisson, avec

$$E(H)=t \quad V(H)=t \quad \psi(s)=t(e^s-1)$$

pour la «Star», $t=5000$

Variable Y: de type de Pareto

de fonction de répartition $F(x)=1-\left(\dfrac{a}{a+x}\right)^{a+1}$

avec $E(Y)=1 \quad V(Y)=\dfrac{a+1}{a-1}$

pour la «Star» $V(Y)=49$

c.-à-d. pour a: $a=\dfrac{50}{48}$

(la f.c.r. d'une variable de Pareto n'est pas exprimable par des fonctions analytiques élémentaires!)

Ces hypothèses conduisent à un risque collectif X de type compliqué, pour ne pas dire inconnu. X n'est pas de type gamma, comme supposé dans nos considérations sur la réassurance en stop-loss. De plus, l'hypothèse que Y est du type de Pareto conduit à une impasse si l'on considère un portefeuille sans réassurance: en effet la f.c.r. d'une variable de Pareto non-tronquée n'existe pas pour des valeurs postives de l'argument (l'argument est positif dans l'équation d'équilibre). Par contre $\psi(s)$ existe pour une variable de Pareto tronquée et un argument positif. Ainsi l'hypothèse d'un Y de type de Pareto est tout à fait sensée en présence d'une réassurance en excess-of-loss.
La triple inclusion des f.c.r. intervenant dans l'équation d'équilibre donne, en utilisant les hypothèses ci-dessus:

$$\psi_W[\psi_H[\bar{\psi}_{\bar{Y}}(s)]]=-h\ln\left[1-\frac{t}{h}\left(e^{\bar{\psi}_{\bar{Y}}(s)}-1\right)\right].$$

L'équation d'équilibre du portefeuille ppc devient donc

$$(\alpha P+\beta\Lambda)\frac{\ln\bar{\varepsilon}}{R}-h\ln\left[1-\frac{t}{h}\left(e^{\bar{\psi}_{\bar{Y}}\left(\frac{-\ln\bar{\varepsilon}}{R}\right)}-1\right)\right]=0.$$

Etablissons maintenant les formules qui expriment les paramètres α et β en fonction des moments

$$E(\bar{Y}) \quad \text{et} \quad m_2(\bar{Y})$$

qui, eux, seront calculés par quadratures (c.f. chiffre 1.4). Selon (20) et (10)

$$\alpha = \frac{E(\bar{X})}{E(X)} = \frac{tE(\bar{Y})}{tE(Y)} = E(\bar{Y}) \quad \text{car } E(Y) = 1.$$

Le paramètre β s'exprime au moyen des variances «avec» et «sans» réassurance (formule 22). De (11), on a

pour le portefeuille complet

$$V(X) = \frac{1}{h} t^2 E^2(Y) + tm_2(Y),$$

pour le portefeuille ppc

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{h} t^2 E^2(\bar{Y}) + tm_2(\bar{Y}).$$

En introduisant les valeurs numériques correspondant au portefeuille de la «Star», on obtient:

$$V(X) = 0{,}01 \cdot 5000^2 \cdot 1^2 + 5000 \cdot (49+1) = 0{,}5 \cdot 10^6$$
$$V(\bar{X}) = 0{,}01 \cdot 5000^2 E^2(\bar{Y}) + 5000\, m_2(\bar{Y}).$$

Ainsi, selon (22):

$$\beta = \left[\frac{V(\bar{X})}{V(X)}\right]^{1/2} = [(0{,}5\, E^2(\bar{Y}) + 0{,}01\, m_2(\bar{Y}))]^{1/2}.$$

Enfin, la f.c.r. $\bar{\psi}_{\bar{Y}}(s)$ doit être calculée pour un argument

$$s = \frac{-\ln \bar{\varepsilon}}{R} = \frac{-\ln 0{,}01}{0{,}36} = 12{,}79213941.$$

Le tableau II[3] indique pour quelques valeurs du plein M, les valeurs numériques de α et de β, ainsi que de

$$e^{\bar{\psi}_{\bar{Y}}\left(\frac{-\ln 0{,}01}{0{,}36}\right)} - 1.$$

En dernière colonne, on trouve la valeur du membre de gauche de l'équation d'équilibre. L'équilibre est acquis pour $M = 24$, c.-à-d. pour un plein de

[3] Sous les hypothèses particulières faites sur le type des variables W et Y.

conservation égal à 24 fois le coût moyen d'un sinistre (en monnaie originale: 48000).

Tableau II

Réassurance en excess-of-loss de la «Star Ltd»

Valeurs numériques des paramètres α, β et de la fonction $\bar{\psi}$ pour diverses valeurs du plein de conservation M

M *en unités* monétaires opérationnelles	α	β	$e^{\bar{\psi}}-1$	membre de gauche de l'équation d'équilibre*
10	0,91450	0,66925	0,0023495	−0,05786
15	0,94205	0,69296	0,0024222	−0,02776
20	0,95632	0,70616	0,0024603	−0,00989
→24	0,96356	0,71329	0,0024799	−0,00006←
25	0,96501	0,71477	0,0024839	+0,00225
30	0,97086	0,72094	0,0024999	+0,01120

* Equation d'équilibre:

$$(\alpha P+\beta \Lambda)\,\frac{\ln \bar{\varepsilon}}{R}-h \ln\left[1-\frac{t}{h}\,(e^{\bar{\psi}}-1)\right]=0$$

c.-à-d.
$$(\alpha\cdot 5000+\beta\cdot 500)\,\frac{\ln 0{,}01}{0{,}36}-100 \ln\,[1-50\,(e^{\bar{\psi}}-1)]=0$$

Pour la valeur de M assurant l'équilibre, la connaissance des paramètres α et β permet de calculer la prime de réassurance, selon (26):

La prime se décompose comme suit:

		portefeuille ppc	au réassureur
prime pure	$P=$	αP	$+\ (1-\alpha)P$
marge de sécurité	$\Lambda=$	$\beta\Lambda$	$+\ (1-\beta)\Lambda$
soit, en valeurs numériques, prime pure	10000000=	9635600	+ 364400
marge de sécurité	1000000=	713290	+ 286710
au total	11000000=	10348890	+ 651110
soit	100%	94,08%	5,92%

On remarquera que l'on a, à l'équilibre,

$$\beta<\alpha \quad \text{resp.} \quad 1-\beta>1-\alpha$$

c.-à-d. que la compagnie doit céder relativement une plus forte part sur sa marge de sécurité que sur sa prime pure. A noter également que la marge cédée au réassureur (286710) n'est que très légèrement inférieure à la prime pure (364400).

8. Comparaison des coûts

L'objectif du présent travail est – et reste – la mise au point d'une méthode permettant de déterminer les pleins de conservation correspondant à une probabilité de ruine fixée d'avance. La méthode a été donnée; des exemples numériques ont suivi. Notre parcours est donc achevé.

Néanmoins, il n'est pas sans intérêt de comparer entre eux les coûts des réassurances imaginées – dans le cas du portefeuille de démonstration de la «Star Ltd» – pour ramener la probabilité de ruine au-dessous d'une limite acceptable: sans réassurance, la «Star» évoluait avec une probabilité de ruine de l'ordre de 4,2%. La réduction de cette probabilité à 1% nous a amené à envisager l'une ou l'autre des réassurances suivantes, aux coûts suivants:

Portefeuille de la «Star»

Prime pure	10000000
Marge de sécurité	1000000
Total	11000000

Forme de réassurance	Plein de conservation	Primes de réassurance en valeur absolue	en % du volume des primes de 11000000
Proportionnelle	68,84%		
Prime	du portefeuille	3116000	
Marge		311600	
Total		3427600	31,16%
Excess-of-loss	24 fois le coût moyen		
Prime	d'un sinistre	364400	
Marge		286710	
Total		651110	5,92%
Stop-loss	122,34% de la charge annuelle		
Prime	moyenne des sinistres	46600	
Marge		70580	
Total		117180	1,07%

Comme il fallait s'y attendre, les coûts (en prime pure et en marge de sécurité) sont les plus forts dans le cas de la réassurance proportionnelle et les plus faibles dans le cas de la réassurance en stop-loss. Néanmoins, ni les rapports des coûts entre eux, ni l'ordre de grandeur des primes de réassurance n'ont de valeur générale quel que soit le portefeuille étudié. Ils sont valables pour le portefeuille de la «Star» qui, bien que proche de la réalité, ne représente qu'un cas particulier parmi beaucoup d'autres.

Conclusion

Nos considérations terminées, reprenons les objectifs que nous nous étions proposés dans l'introduction et voyons dans quelle mesure nous avons pu les atteindre. Ce sera là notre conclusion. L'objectif était triple:

a) «Indiquer une méthode permettant de fixer les pleins de conservation vis-à-vis d'un réassureur de façon à satisfaire aux critères de la «probabilité de ruine» et de la «marge de solvabilité», toujours plus à l'honneur en Europe occidentale.»
   La méthode proposée est celle de l'équation d'équilibre aléatoire, équation qui lie analytiquement
   - le risque, concrétisé par le portefeuille d'assurance,
   - les moyens financiers disponibles pour supporter le risque,
   - la borne supérieure de la probabilité de ruine, au sens de Cramer.

   Le plein de conservation est celui qui «équilibre» risque et moyens financiers pour un niveau de solvabilité donné. A titre de sous-produit, la méthode livre la prime de réassurance (prime pure et marge de sécurité).
b) «Montrer que la méthode proposée relève d'un seul principe, contenu dans l'équation d'équilibre aléatoire des portefeuilles d'assurances.»
   L'équation d'équilibre aléatoire étant valable quels que soient le portefeuille considéré et la forme de réassurance choisie, la méthode proposée permet de résoudre d'une manière uniforme toutes les questions de détermination de pleins de conservation (du moins théoriquement). La méthode relève donc bien d'un seul principe.
   La méthode jouit de plus d'une propriété fondamentale et très utile pour la pratique. L'équation d'équilibre est «exacte» en ce sens que, dans le cadre des hypothèses faites généralement en théorie du risque collectif, l'équation relie les divers paramètres du portefeuille étudié par une relation analytique exacte. L'équation étant exacte, le plein de conservation qui en est la solution

est exact à son tour. La méthode livre donc, pour la compagnie cédante, en quelque sorte, un optimum lorsque le type de réassurance est donné d'avance. Une réassurance plus forte que ne l'indique la méthode n'est pas nécessaire pour atteindre une probabilité de ruine donnée, alors que cela aurait été nécessaire, à titre de mesure de sécurité, si le plein livré n'avait été qu'approximatif.

c) «Sur la base d'un exemple proche de la pratique et pour les formes de réassurance les plus courantes, mener les raisonnements jusqu'à l'obtention des valeurs numériques des pleins de conservation correspondant à une probabilité de ruine imposée d'avance.»
Les raisonnements ont été conduits pour trois types de réassurance: réassurance proportionnelle, en stop-loss et en excess-of-loss. Les calculs ont pu être menés à chef, numériquement, pour un portefeuille imaginaire, choisi d'avance, mais qui dans sa structure ne représente ni un cas particulier dans l'ensemble des cas possibles, ni un cas spécialement simple. Les calculs numériques ne sont pas complexes.

Les trois objectifs semblent donc avoir été atteints.

Marc-Henri Amsler
Université de Lausanne
Bâtiment B.F.S.H.
1015 Lausanne

Bibliographie

[1] *Straub, E.:* How to fix retention. BAAS, Vol. 78, Cahier 1, p. 95–104.
[2] *Amsler, M.-H.:* L'équation générale d'équilibre d'un risque collectif. BAAS, Vol. 78, Cahier 2, p. 211–246.
[3] *Amsler, M.-H.:* Ruine et provision de fluctuation. BAAS, Vol. 79, Cahier 1, p. 41–56.
[4] *Amsler, M.-H.:* Ruine et fusion de portefeuilles d'assurance. BAAS, Vol. 80, Cahier 1, p. 85–104.

Résumé

L'article rappelle premièrement les relations fondamentales liant risque, moyens financiers et probabilité de ruine, puis applique ces relations à la recherche des pleins de conservation pour les types de réassurance les plus courants. L'approche théorique est complétée par un exemple pratique permettant de mener les raisonnements jusqu'à l'obtention de valeurs numériques.

Zusammenfassung

Die Arbeit erinnert zunächst an die grundlegenden Beziehungen zwischen Risiko, Finanzierungsmitteln und Ruinwahrscheinlichkeit und wendet diese zur Festsetzung von Selbstbehalten für die gebräuchlichsten Rückversicherungstypen an. Die theoretischen Ausführungen werden durch ein praktisches Beispiel, welches auch numerische Ergebnisse vermittelt, vervollständigt.

Summary

First the article recalls the basic relations between risk, financiel means and ruin probability and then applies these relations to fix retentions under a few most common reinsurance arrangements. The theoretical exposition is complemented by a practical example which enables numerical results to be obtained.