Gamma Power-Entwicklung zur Berechnung der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens

Manfred Oschwald, Pfullendorf, z. Zt. Budapest

Gamma Power-Entwicklung zur Berechnung der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens

Umfangreiche empirische Untersuchungen gaben den Anstoss für die Normal Power (NP) Methode, die heute bei der Berechnung der Verteilungsfunktion (VF) des Gesamtschadens verbreitet Anwendung findet. Die NP-Formel, die von L. Kauppi und P. Ojantakanen [2] angegeben wurde, konnte von T. Pentikäinen [3] durch eine Variablentransformation unter Ausnutzung der Edgeworth-Entwicklung auch theoretisch begründet werden.

Es liegt nun nahe, Pentikäinens „Trick" auf Orthogonalreihen zu übertragen. Arbeitet man mit den Hermiteschen Polynomen, lässt sich die NP Methode bestätigen, wählt man die Laguerreschen Polynome, finden wir entsprechend eine Gamma Power (GP) Methode.

Es seien im folgenden $P_0(x)$, $P_1(x), \ldots$ orthogonale Polynome mit Belegungsfunktion $w(x) = W'(x)$, wobei $P_i(x)$ vom Grad i ist und $P_0(x) = 1$ gewählt wird. Wir nehmen nun an, dass sich eine differenzierbare Funktion F durch eine Reihe approximieren lässt, d.h.:

$$F(x) \approx W(x) + w(x)(A_1 \bar{P}_1(x) + \ldots + A_n \bar{P}_n(x)). \tag{1}$$

Dabei sind die A_i von der Wahl der Polynome abhängige Koeffizienten und $\bar{P}_i$ geht durch die Beziehung

$$w(x)\bar{P}_i(x) = \int_0^x w(y) P_i(y) dy \tag{2}$$

aus P_i hervor.

Wir entwickeln nun die Taylorreihe zu $F(x + \Delta x)$, also:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + F'(x)\Delta x + \ldots \tag{3}$$

und setzen (1) ein. Dadurch ergibt sich:

$$F(x + \Delta x) \approx W(x) + w(x)(A_1 \bar{P}_1(x) + \ldots + A_n \bar{P}_n(x)) + w(x)\Delta x + \ldots \tag{4}$$

Durch eine geeignete Wahl von Δx vereinfacht sich dieser Ausdruck. Mit

$$\Delta x = -(A_1 \bar{P}_1(x) + \ldots + A_n \bar{P}_n(x)) \tag{5}$$

ergibt sich:

$$F(x+\Delta x) \approx W(x). \tag{6}$$

Setzen wir noch $x+\Delta x=y$, so gilt:

$$F(y) \approx W(x). \tag{7}$$

Während also in (1) die Approximation von $F(x)$ mittels $W(x)$ noch durch additive Terme verbessert wird, geschieht die Auswertung von $W(x)$ in (7) sofort an einer „verbesserten" Stelle.
Arbeitet man in Approximation (1) mit den Laguerreschen Polynomen

$$P_i(x) = (-1)^i x^{1-\alpha} e^x \frac{d^i}{dx^i} (x^{i+\alpha-1} e^{-x}), \tag{8}$$

so ergibt sich das bekannte Verfahren von Bowers (siehe H. U. Gerber [1], S. 56ff).
Wir betrachten hierzu eine nichtnegative Zufallsvariable (ZV) S mit VF G, wobei $G(s) = \text{Prob}\,[S \leqslant s]$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass $S \leqslant s$ gilt. Weiterhin definieren wir $\beta = \text{E}[S]/\text{Var}[S]$ als den Quotient Erwartungswert durch Varianz.
Für die VF $F(x) = \text{Prob}\,[X \leqslant x]$ der ZV $X = \beta S$ ergibt sich aus (1), wenn wir die Entwicklung für $n=4$ abbrechen und die Existenz der ersten vier Momente voraussetzen:

$$F(x) \approx \Gamma_{1,\alpha}(x) + A_3 \int_0^x P_3(y) w(y) dy + A_4 \int_0^x P_4(y) w(y) dy, \tag{9}$$

wobei wir $w(x) = \gamma_{1,\alpha}(x)$ wählen und

$$\gamma_{1,\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \tag{10}$$

die Dichte, sowie $\Gamma_{1,\alpha}$ die VF der Gammaverteilung mit den Parameter α und 1 darstellen. Dazu setzen wir noch

$$\alpha = E[X] = (E[S])^2/\text{Var}[S]. \tag{11}$$

Oft wird die Approximation von Bowers (9) in der Form:

$$\begin{aligned} F(x) \approx\ & \Gamma_{1,\alpha}(x) - \gamma_{1,\alpha}(x)((\alpha+2)(\alpha+1)x - 2(\alpha+2)x^2 + x^3) A_3 \\ & + \gamma_{1,\alpha}(x)((\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)x - 3(\alpha+3)(\alpha+2)x^2 + 3(\alpha+3)x^3 - x^4) A_4 \end{aligned} \tag{12}$$

angegeben, wobei:

$$A_3 = \frac{\Gamma(\alpha)}{6\Gamma(\alpha+3)} (g_3 - (\alpha+2)(\alpha+1)\alpha) \tag{13}$$

$$A_4 = \frac{\Gamma(\alpha)}{24\Gamma(\alpha+4)} (g_4 - 4(\alpha+3)g_3 + 3(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha) \tag{14}$$

mit $g_i = E[X^i]$, $i = 1, 2, \ldots$
Setzen wir also gemäss (5)

$$\Delta x = ((\alpha+2)(\alpha+1)x - 2(\alpha+2)x^2 + x^3)A_3 \tag{15}$$

so gilt mit (6)

$$F(x + \Delta x) \approx \Gamma_{1,\alpha}(x) \tag{16}$$

Für die ursprünglich betrachtete ZV S gilt entsprechend:

$$G(s) \approx \Gamma_{1,\alpha}(x), \tag{17}$$

wobei sich x aus der Beziehung

$$\beta s = x + \Delta x \tag{18}$$

bestimmen lässt. Wir wollen diese Approximation (17) unter Ausnutzung von (15) in (18) als Gamma Power 2 Methode bezeichnen. Ebenso finden wir eine GP 3 Approximation, wenn wir in (18) x aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\beta s = {} & ((\alpha+2)(\alpha+1)x - 2(\alpha+2)x^2 + x^3)A_3 \\ & - ((\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)x - 3(\alpha+3)(\alpha+2)x^2 + 3(\alpha+3)x^3 - x^4)A_4 + x\end{aligned} \tag{19}$$

bestimmen. Dabei arbeitet der Autor bei der Approximation mit derjenigen reellen Nullstelle von (18), die von βs den kleinsten Abstand hat.
Wenn wir ganz analog mit den Hermiteschen Polynomen arbeiten, lässt sich ohne weiteres die NP 2 Methode verifizieren. Wir wollen hier nur die Formel angeben:

$$G(s) \approx \Phi\left(-\frac{3}{\gamma} + \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + \frac{6(s-\mu)}{\sigma\gamma} + 1}\right) \tag{20}$$

wobei wie üblich μ, σ^2, γ Erwartungswert, Varianz und Schiefe von S bedeuten.
Im Rahmen der Diplomarbeit bei Professor H. Bühlmann an der ETH Zürich hatte der Autor Gelegenheit, die Zuverlässigkeit verschiedener Approxima-

tionsmethoden für die Berechnung der Verteilungsfunktion G des Gesamtschadens S zu vergleichen. Dabei wurde $S = Y_1 + \ldots + Y_N$ als zusammengesetzt Poisson verteilt angenommen, d.h.:

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i H^{*i}(s) \tag{21}$$

In dieser Formel ist $H(s) = \text{Prob}\,[Y_i \leqslant s]$ die VF der Schadenhöhe Y_i und für p_i gilt entweder:

$$p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \qquad \lambda > 0 \tag{22}$$

oder

$$p_i = \binom{\alpha + i - 1}{i} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)^{\alpha} \left(\frac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^{i} \qquad \alpha > 0,\ \lambda > 0. \tag{23}$$

In den folgenden Tabellen werden Werte der NP 2 und GP 2 Methode aufgeführt. Um einen Eindruck über die Zuverlässigkeit beider Methoden zu vermitteln, wird weiterhin ein exakter, bzw., in Fällen, die eine exakte Berechnung nicht zulassen, ein simulierter Wert angegeben. Daneben wird noch die prozentuale Abweichung vom exakten bzw. simulierten Wert (=100) betrachtet. Die Simulation wurde dazu 40000 (Tabelle 2), bzw. 10000mal (Tabelle 3) durchgeführt.

Tabelle 1

$H(s) = 1 - e^{-s}$; $\lambda = 100$ in (22)

s	Exakt $G(s)$	NP 2		GP 2	
70	0,0116	0,0117	101	0,0111	96
80	0,0728	0,0730	100	0,0729	100
90	0,2453	0,2456	100	0,2466	101
100	0,5141	0,5141	100	0,5146	100
110	0,7657	0,7655	100	0,7648	100
120	0,9168	0,9165	100	0,9160	100
130	0,9781	0,9780	100	0,9781	100
140	0,9957	0,9956	100	0,9959	100

Tabelle 2

$$H(s)=\int_0^s \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} dx \text{ und wieder } \lambda=100 \text{ in (22)}$$

s	Simulation $G(s)$	NP 2		GP 2	
135	0,1276	0,1319	103	0,1282	100
150	0,2985	0,3119	104	0,3072	103
165	0,5248	0,5315	101	0,5308	101
180	0,7333	0,7271	99	0,7303	100
195	0,8739	0,8630	99	0,8665	99
210	0,9449	0,9400	99	0,9417	100
225	0,9778	0,9767	100	0,9771	100
240	0,9911	0,9919	100	0,9917	100
255	0,9968	0,9975	100	0,9971	100

Tabelle 3

$H(s)=1-e^{-s}$ und $\lambda=100$, $\alpha=20$ in (23)

s	Simulation $G(s)$	NP 2		GP 2	
60	0,0485	0,0501	103	0,0479	99
80	0,2365	0,2362	100	0,2360	100
100	0,5351	0,5307	99	0,5322	99
120	0,7857	0,7839	100	0,7845	100
140	0,9263	0,9237	100	0,9238	100
160	0,9799	0,9787	100	0,9790	100
180	0,9960	0,9951	100	0,9954	100

Diese ersten Resultate lassen gute Eigenschaften der Gamma Power Methode erhoffen. Da viele Autoren eine Approximation der Gesamtschadenverteilung mittels der Gammaverteilung einem Näherungsverfahren mit Hilfe der Normalverteilung vorziehen, überraschen diese Ergebnisse andererseits auch nicht.

Manfred Oschwald
Linzgaustrasse 51
D-7798 Pfullendorf 3

Literaturverzeichnis

[1] Gerber, H. U.: An introduction to mathematical risk theory. Huebner Foundation for Insurance Education, Philadelphia 1979.

[2] Kauppi, L. and Ojantakanen, P.: Approximations of the generralized Poisson function. ASTIN Bull. 5 (1969).

[3] Pentikäinen, T.: On the computation of the distribution of the total amount of claims. Risikotheorie Tagung, Oberwolfach 1980.

Zusammenfassung

Die Berechnung der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens ist eines der zentralen Probleme der kollektiven Risikotheorie. Der Autor schlägt dazu eine „Gamma Power" Methode vor. Mit dieser Approximation wurden sehr gute numerische Resultate erzielt, außerdem hat sich gezeigt, dass die Genauigkeit nicht schlechter als bei der analogen „Normal Power" Methode ist.

Résumé

Le calcul de la fonction de distribution de la charge annuelle des sinistres est un des problèmes principaux de la théorie du risque collectif. Le présent article propose une méthode dite «gamma power»; la méthode décrite livre de bons résultats numériques. Il est apparu que la précision de la méthode proposée n'est pas inférieure à celle de la méthode «normal power».

Summary

The evaluation of the distribution function of the accumulated claims is one of the main problems of collective risk theory. For this purpose the author proposes a "gamma power" method. By this procedure, very good numerical results were obtained. In addition it turned out that the accuracy of the proposed method is not worse than that of the analogous "normal power" method.