

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1984)

Heft: 1

Artikel: Gamma Power-Entwicklung zur Berechnung der Verteilungsfunktion
des Gesamtschadens

Autor: Oschwald, Manfred

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-555048>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

MANFRED OSCHWALD, Pfullendorf, z. Zt. Budapest

Gamma Power-Entwicklung zur Berechnung der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens

Umfangreiche empirische Untersuchungen gaben den Anstoss für die Normal Power (NP) Methode, die heute bei der Berechnung der Verteilungsfunktion (VF) des Gesamtschadens verbreitet Anwendung findet. Die NP-Formel, die von L. Kauppi und P. Ojantakanen [2] angegeben wurde, konnte von T. Pentikäinen [3] durch eine Variablentransformation unter Ausnutzung der Edgeworth-Entwicklung auch theoretisch begründet werden.

Es liegt nun nahe, Pentikäinens „Trick“ auf Orthogonalreihen zu übertragen. Arbeitet man mit den Hermiteischen Polynomen, lässt sich die NP Methode bestätigen, wählt man die Laguerreschen Polynome, finden wir entsprechend eine Gamma Power (GP) Methode.

Es seien im folgenden $P_0(x), P_1(x), \dots$ orthogonale Polynome mit Belegungsfunktion $w(x) = W'(x)$, wobei $P_i(x)$ vom Grad i ist und $P_0(x) = 1$ gewählt wird. Wir nehmen nun an, dass sich eine differenzierbare Funktion F durch eine Reihe approximieren lässt, d.h.:

$$F(x) \approx W(x) + w(x) (A_1 \bar{P}_1(x) + \dots + A_n \bar{P}_n(x)). \quad (1)$$

Dabei sind die A_i von der Wahl der Polynome abhängige Koeffizienten und \bar{P}_i geht durch die Beziehung

$$w(x) \bar{P}_i(x) = \int_0^x w(y) P_i(y) dy \quad (2)$$

aus P_i hervor.

Wir entwickeln nun die Taylorreihe zu $F(x + \Delta x)$, also:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + F'(x) \Delta x + \dots \quad (3)$$

und setzen (1) ein. Dadurch ergibt sich:

$$F(x + \Delta x) \approx W(x) + w(x) (A_1 \bar{P}_1(x) + \dots + A_n \bar{P}_n(x)) + w(x) \Delta x + \dots \quad (4)$$

Durch eine geeignete Wahl von Δx vereinfacht sich dieser Ausdruck. Mit

$$\Delta x = -(A_1 \bar{P}_1(x) + \dots + A_n \bar{P}_n(x)) \quad (5)$$

ergibt sich:

$$F(x + \Delta x) \approx W(x). \quad (6)$$

Setzen wir noch $x + \Delta x = y$, so gilt:

$$F(y) \approx W(x). \quad (7)$$

Während also in (1) die Approximation von $F(x)$ mittels $W(x)$ noch durch additive Terme verbessert wird, geschieht die Auswertung von $W(x)$ in (7) sofort an einer „verbesserten“ Stelle.

Arbeitet man in Approximation (1) mit den Laguerreschen Polynomen

$$P_i(x) = (-1)^i x^{1-\alpha} e^x \frac{d^i}{dx^i} (x^{i+\alpha-1} e^{-x}), \quad (8)$$

so ergibt sich das bekannte Verfahren von Bowers (siehe H. U. Gerber [1], S. 56ff).

Wir betrachten hierzu eine nichtnegative Zufallsvariable (ZV) S mit VF G , wobei $G(s) = \text{Prob}[S \leq s]$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass $S \leq s$ gilt. Weiterhin definieren wir $\beta = E[S]/\text{Var}[S]$ als den Quotient Erwartungswert durch Varianz.

Für die VF $F(x) = \text{Prob}[X \leq x]$ der ZV $X = \beta S$ ergibt sich aus (1), wenn wir die Entwicklung für $n=4$ abbrechen und die Existenz der ersten vier Momente voraussetzen:

$$F(x) \approx \Gamma_{1,\alpha}(x) + A_3 \int_0^x P_3(y) w(y) dy + A_4 \int_0^x P_4(y) w(y) dy, \quad (9)$$

wobei wir $w(x) = \gamma_{1,\alpha}(x)$ wählen und

$$\gamma_{1,\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \quad (10)$$

die Dichte, sowie $\Gamma_{1,\alpha}$ die VF der Gammaverteilung mit den Parameter α und 1 darstellen. Dazu setzen wir noch

$$\alpha = E[X] = (E[S])^2 / \text{Var}[S]. \quad (11)$$

Oft wird die Approximation von Bowers (9) in der Form:

$$\begin{aligned} F(x) \approx & \Gamma_{1,\alpha}(x) - \gamma_{1,\alpha}(x) ((\alpha+2)(\alpha+1)x - 2(\alpha+2)x^2 + x^3) A_3 \\ & + \gamma_{1,\alpha}(x) ((\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)x - 3(\alpha+3)(\alpha+2)x^2 + 3(\alpha+3)x^3 - x^4) A_4 \end{aligned} \quad (12)$$

angegeben, wobei:

$$A_3 = \frac{\Gamma(\alpha)}{6\Gamma(\alpha+3)} (g_3 - (\alpha+2)(\alpha+1)\alpha) \quad (13)$$

$$A_4 = \frac{\Gamma(\alpha)}{24\Gamma(\alpha+4)} (g_4 - 4(\alpha+3)g_3 + 3(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha) \quad (14)$$

mit $g_i = E[X^i]$, $i = 1, 2, \dots$

Setzen wir also gemäss (5)

$$\Delta x = ((\alpha+2)(\alpha+1)x - 2(\alpha+2)x^2 + x^3)A_3 \quad (15)$$

so gilt mit (6)

$$F(x + \Delta x) \approx \Gamma_{1,\alpha}(x) \quad (16)$$

Für die ursprünglich betrachtete ZV S gilt entsprechend:

$$G(s) \approx \Gamma_{1,\alpha}(x), \quad (17)$$

wobei sich x aus der Beziehung

$$\beta s = x + \Delta x \quad (18)$$

bestimmen lässt. Wir wollen diese Approximation (17) unter Ausnutzung von (15) in (18) als Gamma Power 2 Methode bezeichnen. Ebenso finden wir eine GP 3 Approximation, wenn wir in (18) x aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \beta s = & ((\alpha+2)(\alpha+1)x - 2(\alpha+2)x^2 + x^3)A_3 \\ & - ((\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)x - 3(\alpha+3)(\alpha+2)x^2 + 3(\alpha+3)x^3 - x^4)A_4 + x \end{aligned} \quad (19)$$

bestimmen. Dabei arbeitet der Autor bei der Approximation mit derjenigen reellen Nullstelle von (18), die von βs den kleinsten Abstand hat.

Wenn wir ganz analog mit den Hermiteschen Polynomen arbeiten, lässt sich ohne weiteres die NP 2 Methode verifizieren. Wir wollen hier nur die Formel angeben:

$$G(s) \approx \Phi \left(-\frac{3}{\gamma} + \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + \frac{6(s-\mu)}{\sigma\gamma}} + 1 \right) \quad (20)$$

wobei wie üblich μ , σ^2 , γ Erwartungswert, Varianz und Schiefe von S bedeuten. Im Rahmen der Diplomarbeit bei Professor H. Bühlmann an der ETH Zürich hatte der Autor Gelegenheit, die Zuverlässigkeit verschiedener Approxima-

tionsmethoden für die Berechnung der Verteilungsfunktion G des Gesamtschadens S zu vergleichen. Dabei wurde $S = Y_1 + \dots + Y_N$ als zusammengesetzt Poisson verteilt angenommen, d.h.:

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i H^{*i}(s) \quad (21)$$

In dieser Formel ist $H(s) = \text{Prob}[Y_i \leq s]$ die VF der Schadenhöhe Y_i und für p_i gilt entweder:

$$p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad \lambda > 0 \quad (22)$$

oder

$$p_i = \binom{\alpha + i - 1}{i} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda} \right)^\alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \right)^i \quad \alpha > 0, \lambda > 0. \quad (23)$$

In den folgenden Tabellen werden Werte der NP2 und GP2 Methode aufgeführt. Um einen Eindruck über die Zuverlässigkeit beider Methoden zu vermitteln, wird weiterhin ein exakter, bzw., in Fällen, die eine exakte Berechnung nicht zulassen, ein simulierter Wert angegeben. Daneben wird noch die prozentuale Abweichung vom exakten bzw. simulierten Wert (=100) betrachtet. Die Simulation wurde dazu 40000 (Tabelle 2), bzw. 10000mal (Tabelle 3) durchgeführt.

Tabelle 1
 $H(s) = 1 - e^{-s}; \lambda = 100$ in (22)

| s | Exakt $G(s)$ | NP 2 | | GP 2 | |
|-----|-----------------|--------|-----|--------|-----|
| 70 | 0,0116 | 0,0117 | 101 | 0,0111 | 96 |
| 80 | 0,0728 | 0,0730 | 100 | 0,0729 | 100 |
| 90 | 0,2453 | 0,2456 | 100 | 0,2466 | 101 |
| 100 | 0,5141 | 0,5141 | 100 | 0,5146 | 100 |
| 110 | 0,7657 | 0,7655 | 100 | 0,7648 | 100 |
| 120 | 0,9168 | 0,9165 | 100 | 0,9160 | 100 |
| 130 | 0,9781 | 0,9780 | 100 | 0,9781 | 100 |
| 140 | 0,9957 | 0,9956 | 100 | 0,9959 | 100 |

Tabelle 2

$$H(s) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} dx \text{ und wieder } \lambda = 100 \text{ in (22)}$$

| s | Simulation $G(s)$ | NP 2 | | GP 2 | |
|-----|----------------------|--------|-----|--------|-----|
| 135 | 0,1276 | 0,1319 | 103 | 0,1282 | 100 |
| 150 | 0,2985 | 0,3119 | 104 | 0,3072 | 103 |
| 165 | 0,5248 | 0,5315 | 101 | 0,5308 | 101 |
| 180 | 0,7333 | 0,7271 | 99 | 0,7303 | 100 |
| 195 | 0,8739 | 0,8630 | 99 | 0,8665 | 99 |
| 210 | 0,9449 | 0,9400 | 99 | 0,9417 | 100 |
| 225 | 0,9778 | 0,9767 | 100 | 0,9771 | 100 |
| 240 | 0,9911 | 0,9919 | 100 | 0,9917 | 100 |
| 255 | 0,9968 | 0,9975 | 100 | 0,9971 | 100 |

Tabelle 3

$$H(s) = 1 - e^{-s} \text{ und } \lambda = 100, \alpha = 20 \text{ in (23)}$$

| s | Simulation $G(s)$ | NP 2 | | GP 2 | |
|-----|----------------------|--------|-----|--------|-----|
| 60 | 0,0485 | 0,0501 | 103 | 0,0479 | 99 |
| 80 | 0,2365 | 0,2362 | 100 | 0,2360 | 100 |
| 100 | 0,5351 | 0,5307 | 99 | 0,5322 | 99 |
| 120 | 0,7857 | 0,7839 | 100 | 0,7845 | 100 |
| 140 | 0,9263 | 0,9237 | 100 | 0,9238 | 100 |
| 160 | 0,9799 | 0,9787 | 100 | 0,9790 | 100 |
| 180 | 0,9960 | 0,9951 | 100 | 0,9954 | 100 |

Diese ersten Resultate lassen gute Eigenschaften der Gamma Power Methode erhoffen. Da viele Autoren eine Approximation der Gesamtschadenverteilung mittels der Gammaverteilung einem Näherungsverfahren mit Hilfe der Normalverteilung vorziehen, überraschen diese Ergebnisse andererseits auch nicht.

Manfred Oschwald
Linzgastrasse 51
D-7798 Pfullendorf 3

Literaturverzeichnis

- [1] Gerber, H. U. : An introduction to mathematical risk theory. Huebner Foundation for Insurance Education, Philadelphia 1979.
- [2] Kauppi, L. and Ojantakanen, P. : Approximations of the generralized Poisson function. ASTIN Bull. 5 (1969).
- [3] Pentikäinen, T. : On the computation of the distribution of the total amount of claims. Risikotheorie Tagung, Oberwolfach 1980.

Zusammenfassung

Die Berechnung der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens ist eines der zentralen Probleme der kollektiven Risikotheorie. Der Autor schlägt dazu eine „Gamma Power“ Methode vor. Mit dieser Approximation wurden sehr gute numerische Resultate erzielt, außerdem hat sich gezeigt, dass die Genauigkeit nicht schlechter als bei der analogen „Normal Power“ Methode ist.

Résumé

Le calcul de la fonction de distribution de la charge annuelle des sinistres est un des problèmes principaux de la théorie du risque collectif. Le présent article propose une méthode dite «gamma power»; la méthode décrite livre de bons résultats numériques. Il est apparu que la précision de la méthode proposée n'est pas inférieure à celle de la méthode «normal power».

Summary

The evaluation of the distribution function of the accumulated claims is one of the main problems of collective risk theory. For this purpose the author proposes a “gamma power” method. By this procedure, very good numerical results were obtained. In addition it turned out that the accuracy of the proposed method is not worse than that of the analogous “normal power” method.