

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** - (1984)

**Heft:** 1

**Artikel:** Koordination von Anlagepolitik und Rückversicherung bei  
Pensionskassen

**Autor:** Müller, Heinz H. / Capitelli, René / Hauser, Mark

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-555020>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

HEINZ H. MÜLLER, RENÉ CAPITELLI und MARK HAUSER, Zürich\*

## Koordination von Anlagepolitik und Rückversicherung bei Pensionskassen

### I. Einleitung

1. In den letzten Jahren hat die gesamtwirtschaftliche Bedeutung der Pensionskassen in der Schweiz stark zugenommen. Entsprechend wurden die volkswirtschaftlichen Auswirkungen einer kapitaldeckungsfinanzierten Altersvorsorge in verschiedenen Arbeiten analysiert (siehe z.B. Janssen, Müller (1981)). Von besonderem Interesse ist aber auch eine mikroökonomische Analyse des Pensionskassenverhaltens, welche Gegenstand dieser Arbeit sein soll.

Diese Studie befasst sich insbesondere mit den folgenden Charakteristiken einer kapitaldeckungsfinanzierten Pensionskasse<sup>1</sup>:

- dem *Leistungsrisiko*

Die tatsächlichen Leistungen und die für die zukünftigen Leistungen erforderlichen Reserven weichen i.a. von den entsprechenden, in der Vorperiode gebildeten Erwartungswerten, ab. Diese Abweichungen werden als Leistungsrisiko bezeichnet.

- dem *Anlagerisiko*

Dieses Risiko bezieht sich auf die Schwankungen der Erträge (inklusive Wertänderungen) auf den Reserven.

- der *Risikoaversion* der Kasse

Das Leistungsrisiko lässt sich durch den *Rückversicherungsgrad* und das Anlagerisiko durch die *Anlagepolitik* einer Pensionskasse beeinflussen. Ziel dieser Studie ist es, Rückversicherungsgrad und Anlagepolitik bei gegebener Risikoaversion optimal aufeinander abzustimmen. Zudem soll untersucht werden, wie die optimale Lösung von der Mitgliederzahl  $n$  abhängt.

Dazu wird ein Modell formuliert, welches einerseits auf der Kapitalmarkttheorie und andererseits auf einem versicherungstechnischen Prämienberech-

\* Die Autoren sind Herrn Dr. Theo Schätzle für seine Hinweise aus der Praxis sowie für seine Ratschläge bei der Wahl der Parameterwerte zu besonderem Dank verpflichtet.

<sup>1</sup> Die Altersstruktur der Mitglieder sowie das Niveau der Leistungen werden als gegeben betrachtet, wobei bei den Leistungen die Ansprüche von Ehepartnern und Kindern der Mitglieder zu berücksichtigen sind.

nungsprinzip beruht. Beim verwendeten Ansatz werden nur die ersten und zweiten Momente der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen verwendet.

2. Die Arbeit beginnt mit einer kurzen formalen Beschreibung einer Pensionskasse. Es wird ein fiktiver Beitragssatz  $\beta$  berechnet, welcher ein kurzfristiges Gleichgewicht von Einnahmen, Leistungen, Reserven und erwarteten Verpflichtungen sicherstellt. Dieser Beitragssatz  $\beta$  ist stochastisch und enthält sowohl eine Komponente, welche dem Anlagerisiko entspricht, als auch eine Komponente, welche vom Leistungsrisiko abhängt. Es wird unterstellt, dass die Kasse den Erwartungswert von  $\beta$  vorgibt<sup>2</sup> und versucht, die Varianz zu minimieren. Die Anlagerisikokomponente von  $\beta$  wird gemäss dem Ansatz von Markowitz behandelt und für die Rückversicherung des Leistungsrisikos wird eine zur Varianz proportionale Versicherungsprämie angesetzt.

Beim Ansatz von Markowitz ist die Anlagepolitik durch den Erwartungswert  $\lambda$  der Gesamtrendite  $q$  bestimmt. Die Kasse kann  $\lambda$  und den Rückversicherungsgrad  $v$  festlegen. Aufgrund der Optimalitätsbedingungen lassen sich  $\lambda$  und  $v$  in Abhängigkeit des Erwartungswertes von  $\beta$  und der Mitgliederzahl  $n$  darstellen. Für Parameterwerte, welche der schweizerischen Situation in einem gewissen Grade entsprechen, werden diese Zusammenhänge anschliessend numerisch bestimmt.

## II. Beschreibung einer Pensionskasse und Definition des finanziellen Gleichgewichts

Eine Pensionskasse wird während den zwei Perioden  $t-1$  und  $t$  betrachtet. Vereinfachend wird unterstellt, dass es sich dabei um *Zeitpunkte* handelt.

### *Periode $t-1$*

Es wird vorausgesetzt, dass sich die Kasse in dieser Periode im finanziellen Gleichgewicht befindet. Einnahmen und Ausgaben seien bereits verbucht und die erforderlichen Reserven

$$A_{t-1}$$

seien gebildet.

<sup>2</sup> Durch die Wahl des Erwartungswertes wird somit implizit der Risikoaversion einer Pensionskasse Rechnung getragen.

Periode  $t$

Ohne Rückversicherung sind folgende Grössen in die Betrachtung einzubeziehen

$i A_{t-1}$ : Den Reserven gutzuschreibende Zinsen.  $i$  ist der institutionell vorgegebene Berechnungszinssatz.

$\alpha L$ : Den Reserven gutzuschreibende Beiträge sowie Erwartungswerte für Zusatzrisiken.

$L$  ist die beitragspflichtige Lohnsumme.

$\alpha$  hängt von der vorgegebenen Altersstruktur und vom Leistungsniveau ab. Fällt das Leistungsrisiko weg, d. h. treten bei den Leistungen keine Schwankungen auf, und stimmt die Gesamtrendite  $\varrho$  auf den Reserven gerade mit dem Berechnungszinssatz  $i$  überein, so besteht kein Unterschied zwischen  $\alpha$  und dem fiktiven Beitragssatz  $\beta$ .

$A_t$ : Erwartungswert der vorgeschriebenen Reserven (gemäss Schätzung in der Periode  $t-1$ )

$R_t$ : Erwartungswert der Leistungen (gemäss Schätzung in der Periode  $t-1$ )

$S_t$ : Abweichung der tatsächlich erforderlichen Reserven und Leistungen von den jeweiligen Erwartungswerten (Zufallsgrösse mit  $E(S_t)=0$ )

$\varrho_t A_{t-1}$ : Kapitalerträge (inklusive Wertänderungen)

Die Zufallsgrösse  $\varrho_t$  stellt die Rendite auf den Reserven dar und hängt von der Anlagepolitik ab.

Die vorgeschriebenen Reserven und Leistungen sind so definiert, dass gilt

$$A_t = (1 + i) A_{t-1} + \alpha L - R_t \quad (1)$$

Um das finanzielle Gleichgewicht in der Periode  $t$  sicherzustellen, müsste ein Beitragssatz  $\beta$  erhoben werden, welcher die Gleichgewichtsbedingung

$$(1 + \varrho) A_{t-1} + \beta L = A_t + R_t + S_t \quad (2)$$

erfüllt.

Einsetzen von (1) in (2) ergibt

$$\beta L = (i - \varrho_t) A_{t-1} + S_t + \alpha L$$

oder

$$\beta = \alpha - (\varrho_t - i) \frac{A_{t-1}}{L} + \frac{S_t}{L} \quad (3)$$

Der Unterschied zwischen  $\alpha$  und der Zufallsgrösse  $\beta$  lässt sich wie folgt interpretieren:

$(q_t - i) \frac{A_{t-1}}{L}$  stellt die Reduktion dar, welche auf der Differenz von tatsächlicher Rendite und Berechnungszinssatz beruht.

$\frac{S_t}{L}$  ist der Korrekturterm, welcher auf die Schwankungen von Leistungen und erforderlichen Reserven zurückzuführen ist.

Der Ausdruck für  $\beta$  ist somit von der Form

$$\beta = -k_1 q_t + s_t + k_0 \quad (4)$$

wobei

$$s_t = \frac{S_t}{L}$$

Der Term  $-k_1 q_t$  hängt von der Anlagepolitik ab und wird im nächsten Abschnitt mit Hilfe des Ansatzes von Markowitz analysiert. Ebenfalls im nächsten Abschnitt wird erläutert, wie sich durch die Einführung von Rückversicherungsmöglichkeiten der Term  $s_t$  beeinflussen lässt.

### III. Der Optimierungsansatz

#### 3.1. Der Ansatz von Markowitz

Gegeben seien  $m$  Anlagemöglichkeiten. Die zugehörigen Renditen seien durch ihre Erwartungswerte und die Kovarianzmatrix charakterisiert. Ein Portefeuille heisst effizient, falls es nicht möglich ist, die Varianz der Gesamrendite zu verkleinern, ohne gleichzeitig den Erwartungswert zu reduzieren.

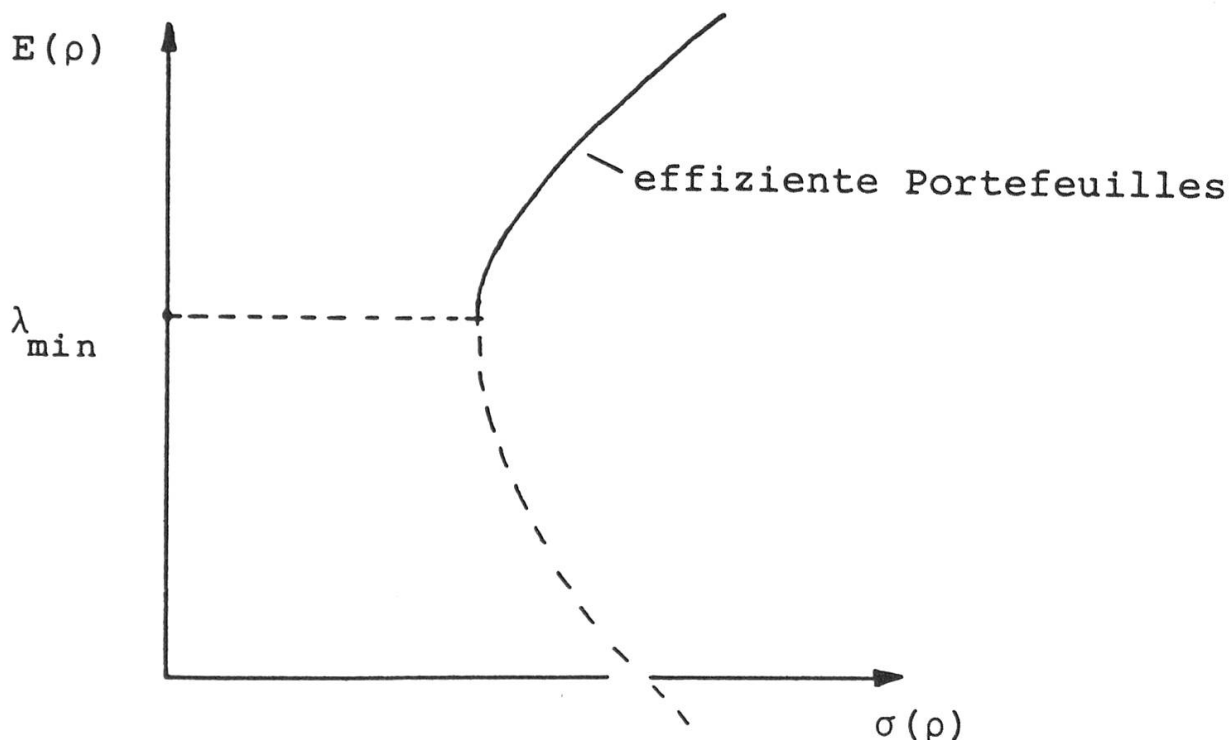
Die Zufallsgrösse  $q$  bezeichne die Gesamrendite effizienter Portefeuilles. Dann besteht zwischen dem Erwartungswert  $E(q)$  und der Standardabweichung  $\sigma(q)$  ein hyperbolischer Zusammenhang (siehe E. F. Fama (1976), S. 219).

Für die Menge der effizienten Portefeuilles gilt somit

$$\sigma^2(q) = a_2 [E(q)]^2 + a_1 E(q) + a_0, \quad a_2 > 0.$$

$$\lambda_{\min} = -\frac{a_1}{2a_2}.$$

Figur 1



Es ist deshalb möglich, die Menge der effizienten Portefeuilles durch den Erwartungswert  $\lambda$  der Rendite  $\varrho$  zu parametrisieren. D.h. jedem Wert  $\lambda \geq \lambda_{\min}$  entspricht die Rendite  $\varrho(\lambda)$  eines effizienten Portefeuilles mit

$$E[\varrho(\lambda)] = \lambda$$

$$\text{Var}[\varrho(\lambda)] = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0.$$

### 3.2. Rückversicherung des Leistungsrisikos

Das Leistungsrisiko einer Pensionskasse sei durch die Zufallsgrösse  $S$  mit  $E(S) = 0$  gegeben. Es wird angenommen, dass sich das Leistungsrisiko ganz oder teilweise rückversichern lässt, und dass die Risikoprämie nach dem Varianzprinzip festgesetzt wird<sup>3</sup>. Die Risikoprämie  $P$ , um den Anteil  $\nu S$  des Risikos

<sup>3</sup> Nachdem das Anlagerisiko mit Hilfe des Markowitz-Ansatzes behandelt wird, ist ein Prämienberechnungsprinzip sinnvoll, welches ebenfalls nur auf den ersten beiden Momenten beruht. In dieser Klasse hat das Varianzprinzip gewichtige theoretische Vorteile (siehe Bühlmann (1970), S. 87).

rückzuversichern<sup>4</sup>, ist somit proportional zu

$$v^2 \text{ var}(S) \quad (v: \text{Rückversicherungsgrad}).$$

Die Rückversicherung erlaubt es der Pensionskasse, das ursprüngliche Risiko  $S$  durch die Zufallsgrösse

$$S(v) = (1 - v)S + P(v) \quad (P(v) \text{ proportional zu } v^2 \text{ var}(S))$$

zu ersetzen. Die Pensionskasse hat also die Möglichkeit, bei Bezahlung der Risikoprämie  $P(v)$  die Varianz auf

$$(1 - v)^2 \text{ var}(S)$$

zu reduzieren.

### 3.3. Das Optimierungsverhalten einer Pensionskasse

Gemäss Abschnitt 3.1. und 3.2. kann die Kasse den Erwartungswert  $\lambda$  der Rendite  $q$  und den Rückversicherungsgrad  $v$  wählen. Aus Formel (4) ergibt sich dann

$$\beta(\lambda, v) = -k_1 q(\lambda) + s(v) + k_0, \quad k_1 > 0, \quad s(v) = \frac{S(v)}{L}. \quad (5)$$

In Abschnitt 3.1. wurde gezeigt

$$E[q(\lambda)] = \lambda \quad (6)$$

$$\text{var}[q(\lambda)] = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad (7)$$

und aufgrund von 3.2. wird vorausgesetzt<sup>5</sup>

$$E[s(v)] = bv^2 \quad (8)$$

$$\text{Var}[s(v)] = \frac{c}{n} (1 - v)^2. \quad (9)$$

<sup>4</sup> Diese Form eines Rückversicherungsvertrages stellt eine theoretische Vereinfachung dar. In der Praxis werden oft einzelne Komponenten des Gesamtrisikos (Invalidität, Todesfallrisiko für das obere Kader, etc.) vollständig rückversichert, währenddem die anderen Komponenten von der Pensionskasse allein getragen werden.

<sup>5</sup> Unter den Annahmen

1.  $S = \sum_{i=1}^n S_i$ , wobei  $S_i$  unabhängig, gleich verteilt

2.  $L = nl$  ( $l$  beitragspflichtiger einheitlicher Individuallohn)

lassen sich (8) und (9) aus 3.2. herleiten.

Zudem soll gelten

$$\text{Cov} [\varrho(\lambda), s(v)] = 0 \quad \forall \lambda, v \quad (10)$$

Hinsichtlich des Optimierungsverhaltens wird unterstellt, dass die Kasse für  $E[\beta(\lambda, v)]$  einen festen Wert  $\gamma$  vorgibt und  $(\lambda, v)$  so wählt, dass  $\text{Var} [\beta(\lambda, v)]$  minimal wird.

### Optimierungsproblem

Es gilt

$$E[\beta(\lambda, v)] = -k_1\lambda + bv^2 + k_0$$

$$\text{Var} [\beta(\lambda, v)] = k_1^2 [a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0] + \frac{c}{n} (1-v)^2.$$

Daraus ergibt sich das Optimierungsproblem:

Minimiere

$$k_1^2 [a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0] + \frac{c}{n} (1-v)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$-k_1\lambda + bv^2 + k_0 \leq \gamma.$$

Dieses Optimierungsproblem ist offensichtlich konvex.

Unter Regularitätsbedingungen liefert das Kuhn-Tucker-Theorem die folgenden notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen

$$2 a_2 k_1^2 \lambda + a_1 k_1^2 - k_1 \xi = 0 \quad (\text{I})$$

$$-2 \frac{c}{n} (1-v) + 2 b \xi v = 0 \quad (\text{II})$$

$$-k_1 \lambda + bv^2 + k_0 = \gamma \quad (\text{III})$$

Aus (I), (II) ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen  $\lambda$  und  $v$

$$2 a_2 k_1 \lambda + a_1 k_1 - \frac{c}{bn} \left( \frac{1}{v} - 1 \right) = 0$$

oder

$$\lambda = \frac{c}{2 a_2 k_1 bn} \left( \frac{1}{v} - 1 \right) - \frac{a_1}{2 a_2}. \quad (11)$$

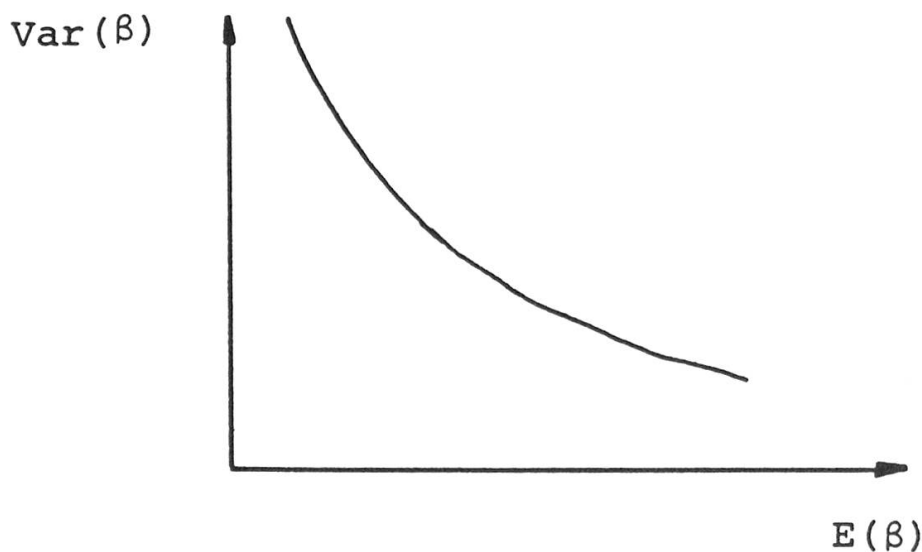


Es besteht also eine *inverse* Relation zwischen  $\lambda$  und  $v$ . Durch Einsetzen von (11) in (III) lassen sich die Werte

$$\lambda, v, \text{var}(\beta)$$

als Funktionen von  $\gamma$  darstellen. Zudem geht aus dem Optimierungsproblem hervor, dass  $\text{var}(\beta)$  eine monoton fallende Funktion von  $\gamma$  ist. Deshalb gilt der in Fig. 2 illustrierte Zusammenhang zwischen  $E(\beta)$  und  $\text{var}(\beta)$

Figur 2



#### *Interpretation*

Entsprechend ihrer Risikoaversion wählt eine Pensionskasse einen Wert  $E(\beta)$  mit zugehörigem Gesamtrisiko  $\text{var}(\beta)$ . Der inverse Zusammenhang zwischen Erwartungswert der Anlagerendite und Rückversicherungsgrad (Formel (11)) bringt zum Ausdruck, dass das gewählte Gesamtrisiko gleichmässig in Anlage- und Leistungsrisiko aufgeteilt wird.

#### 3.4. *Der Einfluss von Mitgliederzahl und Risikoaversion auf die optimale Lösung*

Der Risikoaversion wird durch die Wahl von  $\gamma (= E(\beta))$  Rechnung getragen. Es geht also darum, zu untersuchen, wie sich  $n$  und  $\gamma$  auf die optimale Lösung  $(v, \lambda)$  auswirken. Als Resultat erhält man

*Satz 1*

Vor:  $\lambda > \lambda_{\min}$ ,  $v \in (0, 1)$

Beh: 1) Für festes  $\gamma$  gilt:  $n \uparrow \Rightarrow v \downarrow$ ,  $\lambda \downarrow$ ,  $\text{var}(\beta) \downarrow$

2) für festes  $n$  gilt:  $\gamma \uparrow \Rightarrow v \uparrow$ ,  $\lambda \downarrow$ ,  $\text{var}(\beta) \downarrow$

Beweis: Siehe Appendix.

*Interpretation*

1. Bleibt der Erwartungswert  $\gamma$  des Beitragssatzes konstant, so wird bei zunehmender Mitgliederzahl  $n$  der Rückversicherungsgrad  $v$  gesenkt. Wegen der geringeren Risikoprämie ist dann bei festem  $\gamma$  eine vorsichtigere Anlagepolitik möglich. Schliesslich ist die Aussage, dass das Gesamtrisiko  $\text{var}(\beta)$  bei steigender Mitgliederzahl abnimmt nahezu eine Trivialität.
2. Bei fester Mitgliederzahl  $n$  wird durch eine Erhöhung von  $\gamma$  das Gesamtrisiko gesenkt. In dieser Situation ist es optimal, sowohl das Leistungsrisiko als auch das Anlagerisiko zu reduzieren. Mit anderen Worten der Rückversicherungsgrad  $v$  wird erhöht, währenddem der Erwartungswert  $\lambda$  der Gesamtrendite auf den Anlagen gesenkt wird.

3.5. *Vorgabe des Gesamtrisikos*

Statt die Varianz  $\text{var}(\beta)$  des Beitragssatzes bei Vorgabe des Erwartungswertes  $E(\beta)$  zu minimieren, kann man auch das Problem

$$\min E(\beta)$$

unter der Nebenbedingung

$$\text{var}(\beta) \leq \text{konst.}$$

betrachten.

Für die zugehörigen optimalen Lösungen  $(v, \lambda)$  gilt dann

*Satz 2*

Vor:  $\lambda > \lambda_{\min}$ ,  $v \in (0, 1)$

Beh: 1) Für  $\text{var}(\beta) = \text{konst.}$  gilt

$$n \uparrow \Rightarrow v \downarrow, E(\beta) \downarrow$$

2) Für  $n = \text{konst.}$  gilt

$$\text{var}(\beta) \uparrow \Rightarrow v \downarrow, \lambda \uparrow, E(\beta) \downarrow$$

Beweis: Siehe Appendix.

### *Interpretation*

1. Wird das Gesamtrisiko  $\text{Var}(\beta)$  konstant gehalten, so überrascht es nicht, dass bei wachsender Mitgliederzahl  $n$  der Erwartungswert  $E(\beta)$  des Beitragsatzes gesenkt werden kann und es entspricht der Intuition, dass auch der Rückversicherungsgrad  $v$  abnimmt. Bei konstantem Gesamtrisiko  $\text{Var}(\beta)$  ist keine Aussage über das Verhalten des Erwartungswertes  $\lambda$  der Gesamtrendite auf den Reserven möglich. Aus den nachfolgenden Simulationsrechnungen geht hervor, dass  $\lambda$  i. a. keine Monotonieeigenschaften besitzt (vgl. Figur 10).
2. Wird die Mitgliederzahl  $n$  konstant gehalten und das Gesamtrisiko erhöht, so führt dies zu einem tieferen Rückversicherungsgrad  $v$ , einer weniger vorsichtigen Anlagepolitik und somit zu einem tieferen Erwartungswert  $E(\beta)$  für den Beitragssatz (vgl. mit Satz 1).

## **IV. Ergebnisse von Simulationsrechnungen**

### *4.1. Wahl der Parameter*

Für die nachfolgenden Simulationsrechnungen werden die Parameter wie folgt festgelegt:

1. Die Werte

$$\alpha = 0,20, \quad i = 0,04, \quad \frac{A_{t-1}}{L} = 2,5.$$

dürften nicht allzu weit von der realen Situation entfernt sein. Daraus resultiert

$$k_0 = 0,30, \quad k_1 = 2,5.$$

2. Schwieriger ist es, Angaben über  $b$  und  $c$  zu treffen. Diese beiden Grössen beziehen sich auf die Leistungsschwankungen und die Höhe der Rückversicherungsprämien. Bei der Simulationsrechnung wurde

$$b = 0,04, \quad c = 4$$

gesetzt.

3. Um die Koeffizienten der Gleichung

$$\text{Var} [q(\lambda)] = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

zu schätzen, wurden Renditen von schweizerischen Bundesanleihen, Schweizeraktien und Grundstücken (Kanton Zürich) für die Periode 1960–78 verwendet. Aufgrund einer Studie von Müller, Capitelli, Granziol (1983) gilt

$$a_0 = 0,014, \quad a_1 = -0,685, \quad a_2 = 8,262.$$

## 4.2 Resultate

- a) Für  $n = 50$  und  $n = 1000$  werden die Varianz des Beitragssatzes  $\text{var}(\beta)$ , der Rückversicherungsgrad  $v$  und der Erwartungswert der Rendite  $\lambda$  in Abhängigkeit von  $E(\beta)$  dargestellt. D.h. die Zusammenhänge

$$\text{var} [\beta(\gamma)], v(\gamma), \lambda(\gamma) \quad (\text{wobei } \gamma := E(\beta))$$

werden graphisch wiedergegeben.

Die Figuren 3–5 illustrieren die theoretischen Resultate, welche bereits interpretiert wurden. Aus Figur 3 geht hervor, dass eine Erhöhung von  $\gamma$  ( $\gamma = E(\beta)$ ) eine starke Abnahme von  $\text{var}(\beta)$  bewirkt (vgl. auch mit den Kommentaren zu Figur 2). Entsprechend der zweiten Aussage von Satz 1 illustrieren die Figuren 4 und 5, wie bei steigendem  $\gamma$  der Rückversicherungsgrad  $v$  zunimmt und wie die Anlagepolitik vorsichtiger wird (Abnahme von  $\lambda$ ).

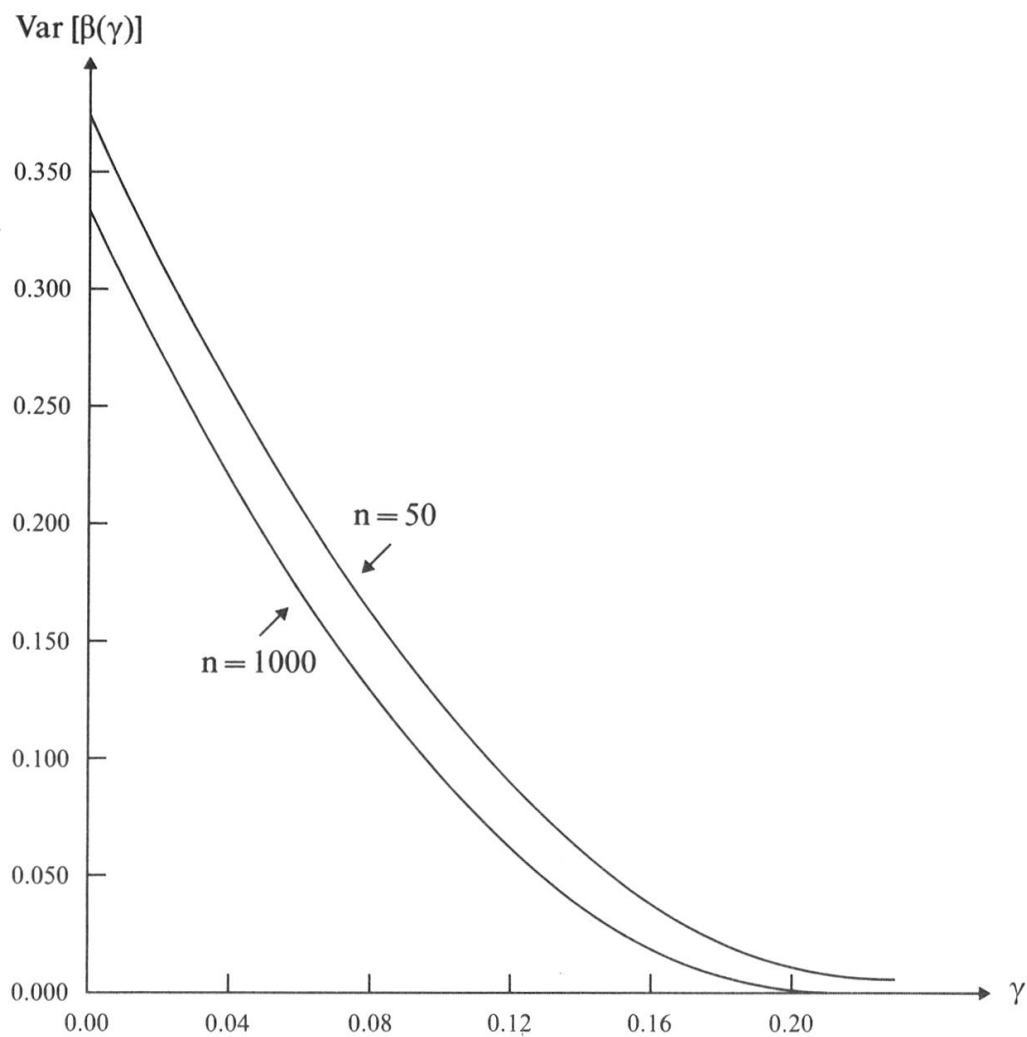
- b) Für  $\gamma = 0,15, 0,175, 0,20$  werden der Rückversicherungsgrad  $v$ , der Erwartungswert der Rendite  $\lambda$  und die Varianz des Beitragssatzes  $\text{var}(\beta)$  in Abhängigkeit von der Mitgliederzahl  $n$  dargestellt.

Die Figuren 6–8 illustrieren die erste Aussage von Satz 1. Gemäss Fig. 6 führt eine Erhöhung von  $n$  zu einer starken Abnahme des Rückversicherungsgrades  $v$ . Bei gegebenem  $\gamma$  ist es deshalb für grosse Pensionskassen möglich, eine vorsichtigeren Anlagepolitik zu wählen. Fig. 7 zeigt, dass  $n$  die Anlagepolitik relativ stark beeinflussen kann. Entsprechend gibt Fig. 8 den Einfluss von  $n$  auf  $\text{var}(\beta)$  wieder.

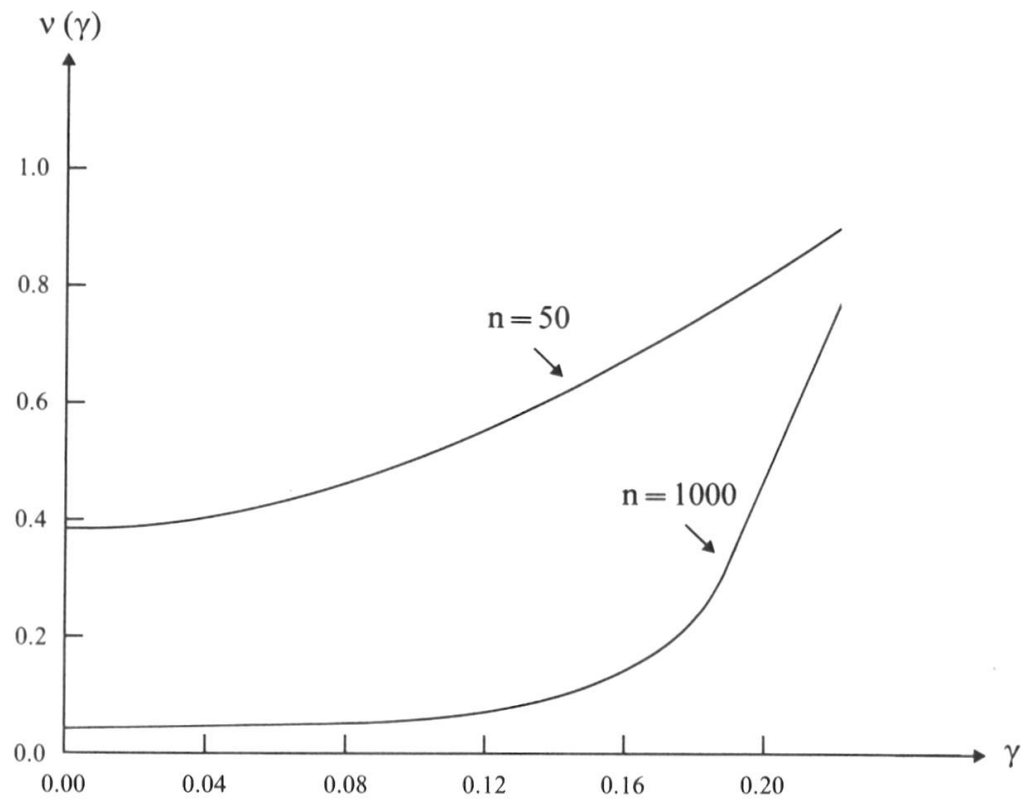
Viele Praktiker sind der Meinung, dass bei weniger als hundert Mitgliedern eine weitgehende Rückversicherung des Leistungsrisikos erforderlich sei. Für  $n = 100$  lassen sich aus den Figuren 6 und 7 folgende Werte ablesen

$\gamma$	$\nu$	$\lambda$
0,20	0,758	0,0489
0,175	0,622	0,0562
0,15	0,515	0,0642

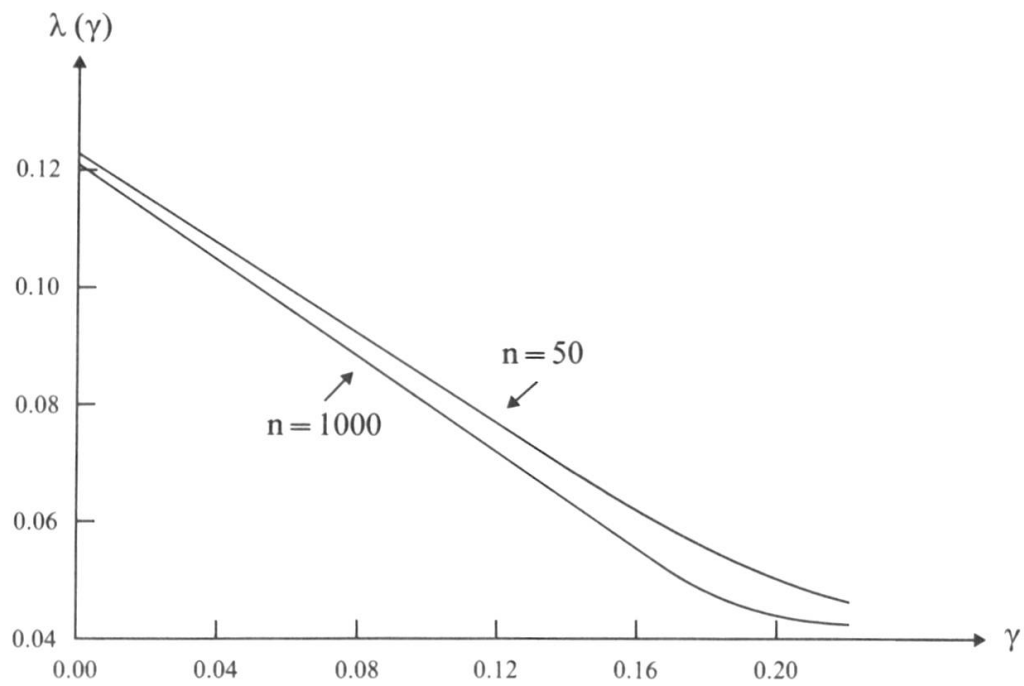
Figur 3



Figur 4

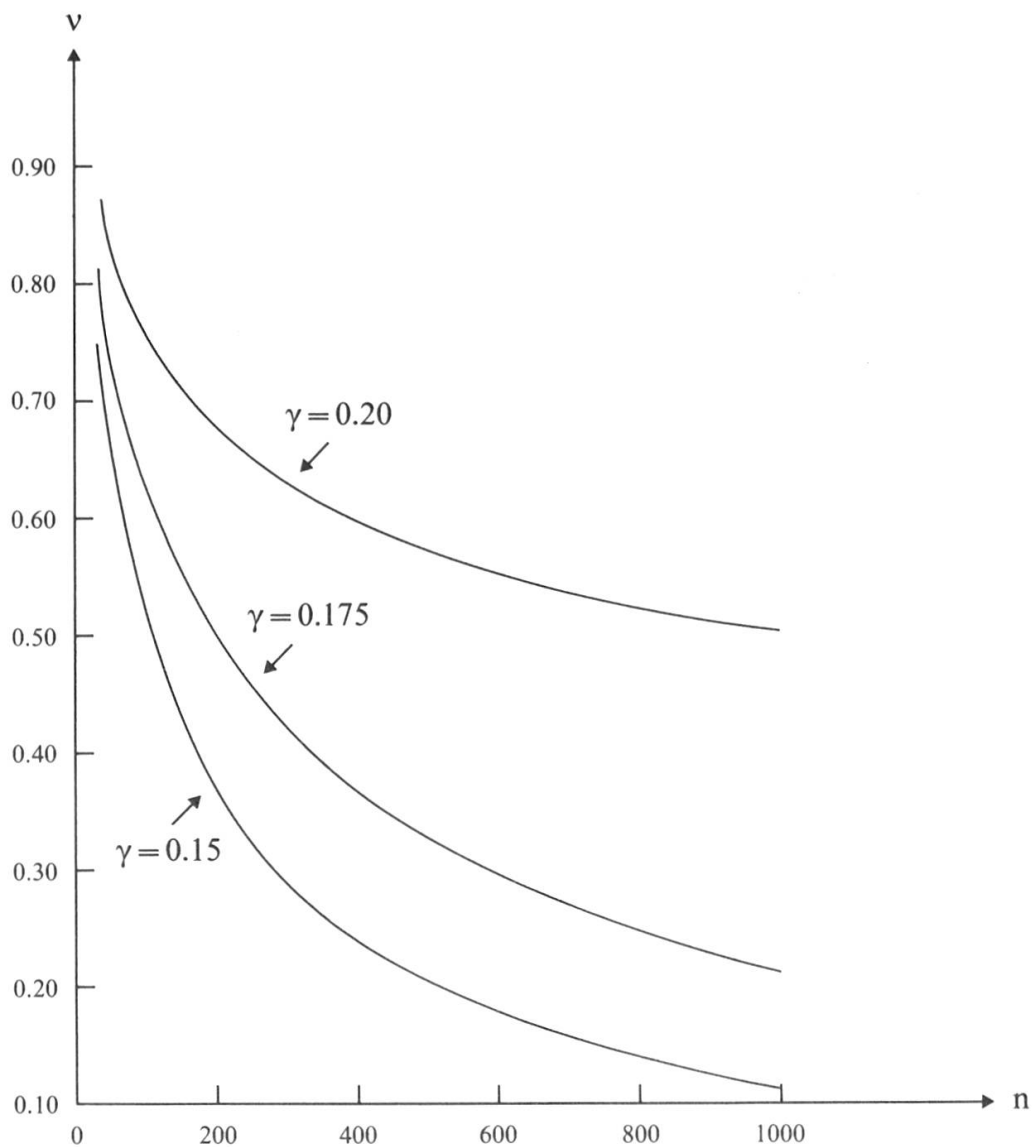


Figur 5

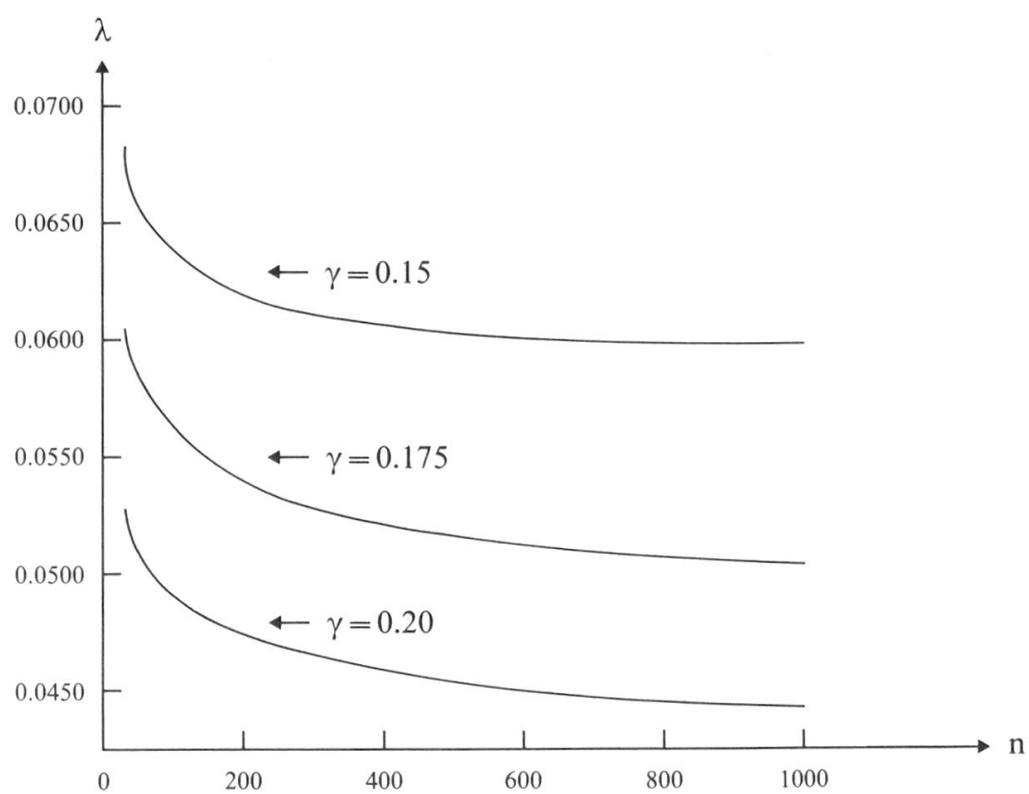


Tatsächlich ergibt sich für  $\gamma=0,20$  und  $\gamma=0,175$  ein relativ hoher Rückversicherungsgrad. Für  $\gamma=0,15$  ist der Rückversicherungsgrad im Bereich von 0,5. Die mittlere Anlagerendite von ungefähr 6 1/2 Prozenten bringt jedoch zum Ausdruck, dass  $\gamma=0,15$  nur für Pensionskassen mit geringer Risikoaversion in Frage kommt. Zwischen den Erfahrungen der Praktiker und den Simulationsrechnungen besteht somit in dieser Frage kein offensichtlicher Widerspruch.

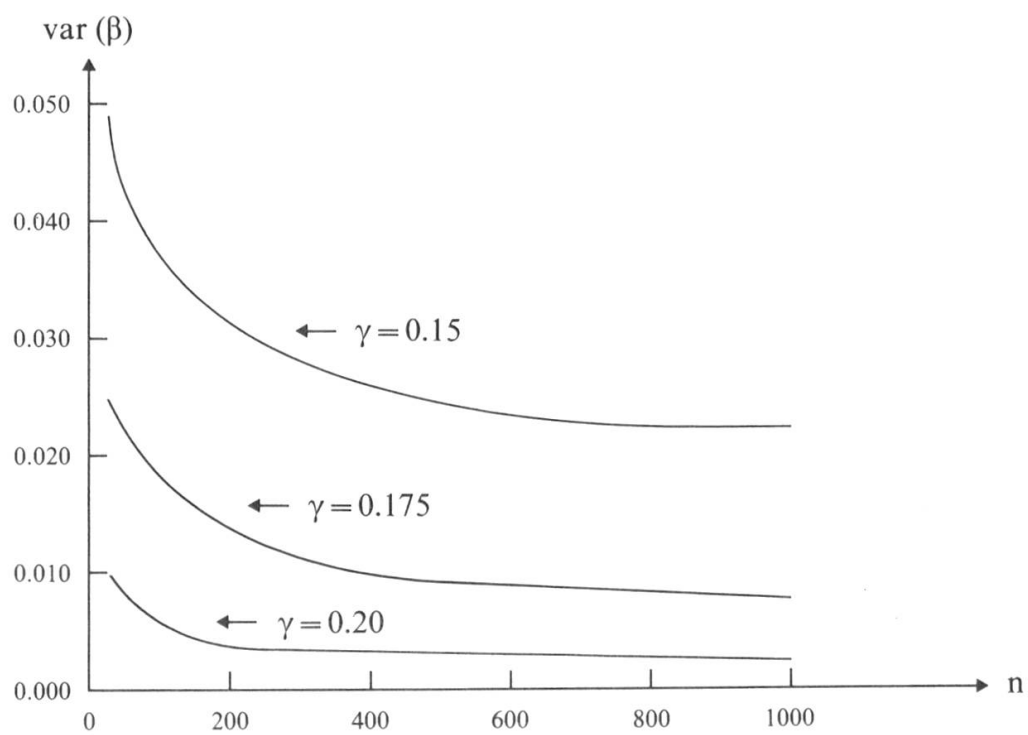
Figur 6



Figur 7



Figur 8

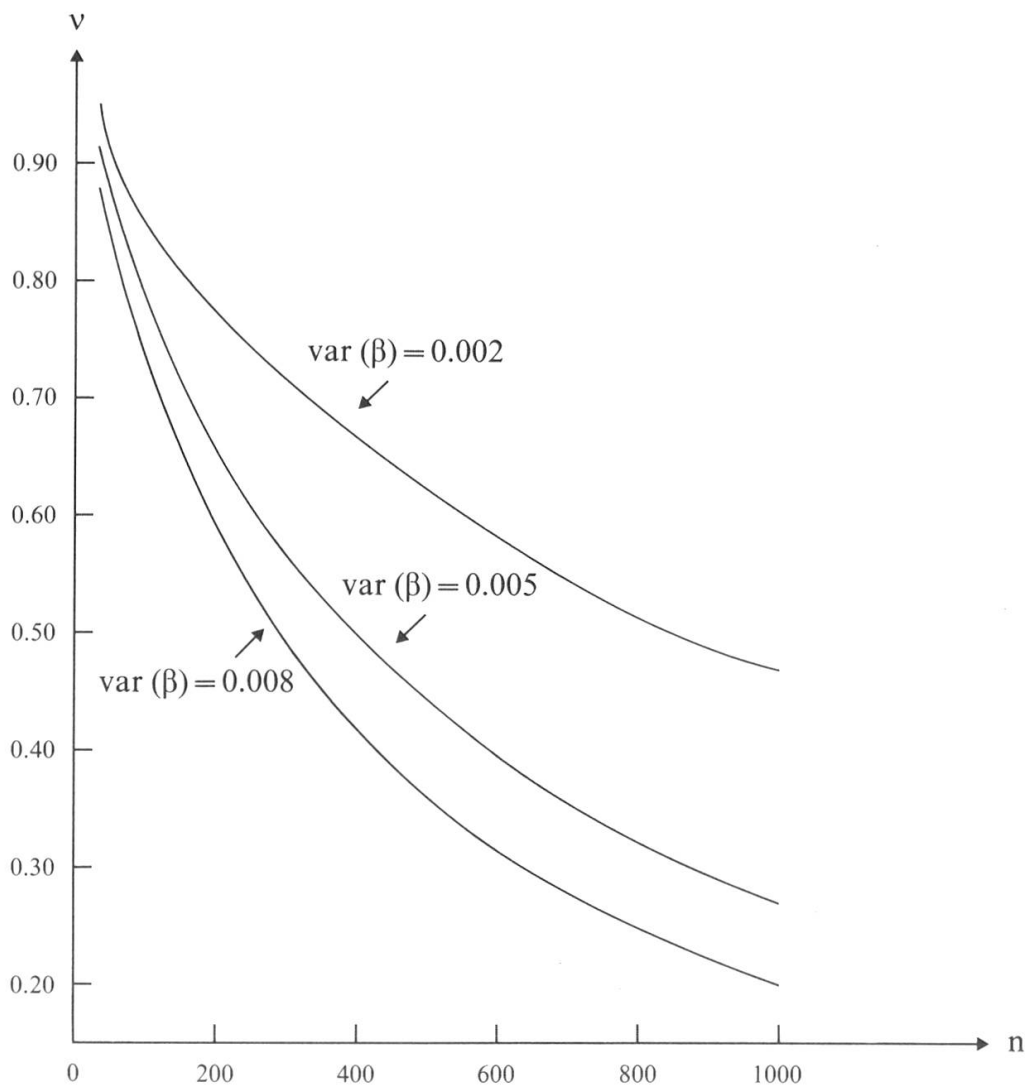




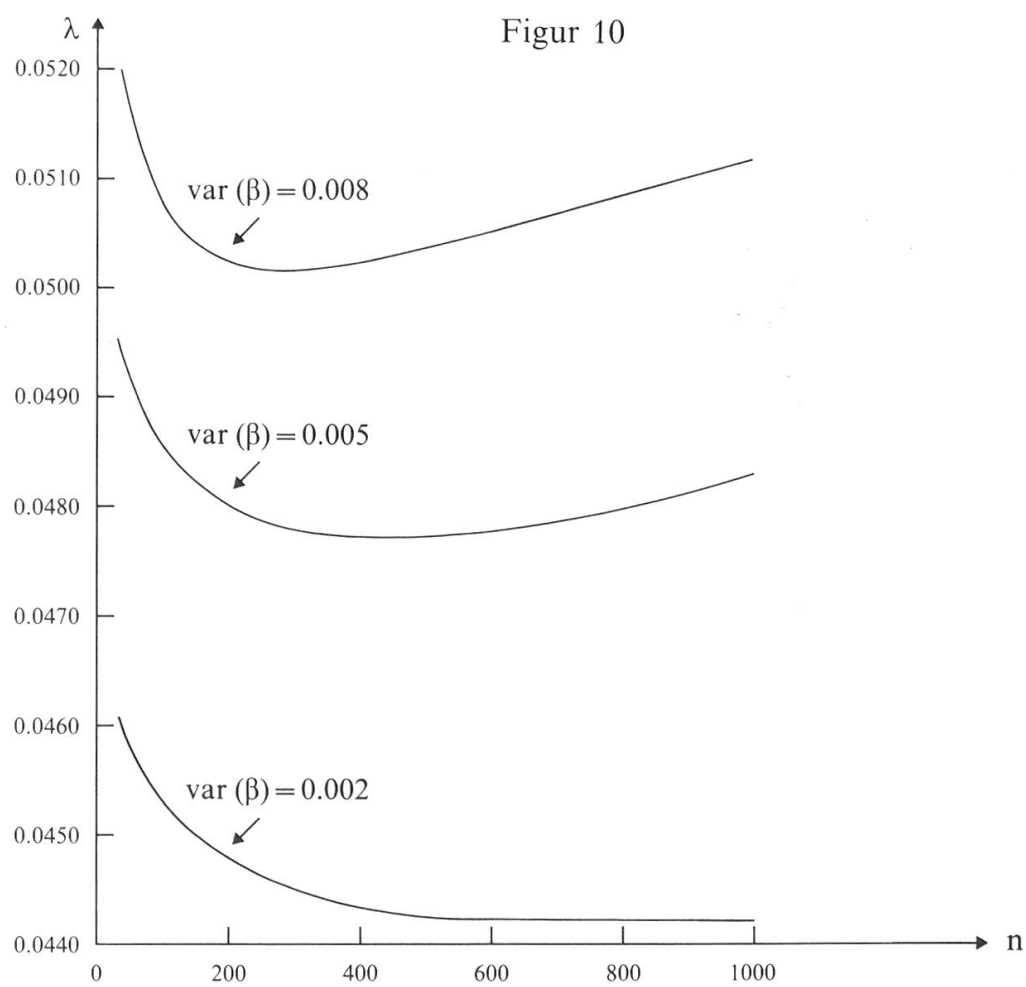
c) Schliesslich wird die Varianz des Beitragssatzes konstant gehalten:  $\text{var}(\beta) = 0,002, 0,005, 0,008$ .

In den Figuren 9 – 11 werden der Rückversicherungsgrad  $v$ , der Erwartungswert der Rendite  $\lambda$  und der Erwartungswert des Beitragssatzes  $E(\beta)$  in Abhängigkeit der Mitgliederzahl  $n$  dargestellt.

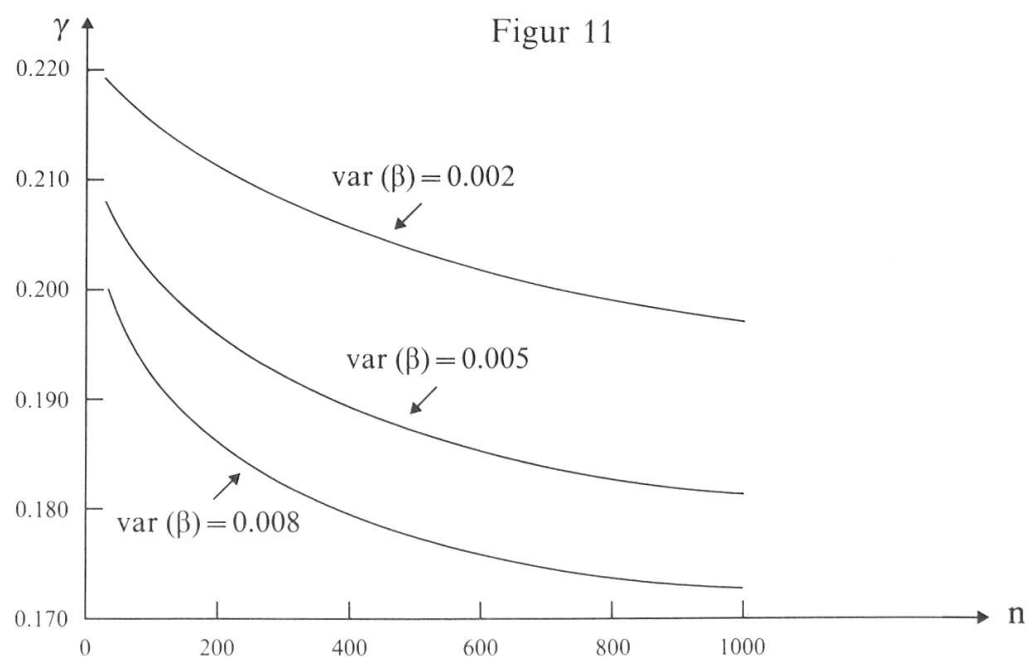
Figur 9



Figur 10



Figur 11



Die Figuren 9 und 11 illustrieren die Aussagen von Satz 2. Beachtlich ist die starke Abnahme des erwarteten Beitragssatzes  $E(\beta)$  bei zunehmendem  $n$  (Fig. 11).

Gemäss Figur 10 ist keine eindeutige Aussage über den Einfluss von  $n$  auf  $\lambda$  möglich. Dieses Phänomen lässt sich wie folgt erklären:

- Eine wachsende Mitgliederzahl  $n$  bewirkt gemäss Satz 2 eine Abnahme des Rückversicherungsgrades  $v$ .
- Über den Einfluss von  $n$  auf die Leistungsrisikokomponente  $\frac{c}{n}(1-v)^2$  ist jedoch keine Aussage möglich
- Weil das Gesamtrisiko  $\text{var}(\beta)$  konstant bleibt, ist auch über die Anlagerisikokomponente und damit über  $\lambda$  keine Aussage möglich.

## V. Schlussbemerkungen

In dieser Arbeit wurden simultan wirtschaftliche und versicherungstechnische Risiken einer Pensionskasse analysiert. Das wirtschaftliche Risiko liess sich durch den Erwartungswert der Rendite  $\lambda$  steuern, währenddem das versicherungstechnische Risiko durch den Rückversicherungsgrad  $v$  beeinflusst werden konnte. Aufgrund eines Optimalitätskriteriums wurden  $\lambda$  und  $v$  optimal aufeinander abgestimmt. Dabei zeigte sich, dass die Wahl von  $\lambda$  und  $v$  nicht nur von der Risikoaversion sondern auch von der Grösse einer Pensionskasse stark beeinflusst wird.

Nicht eingegangen wurde auf das Problem von Anlagevorschriften für Pensionskassen. Anlagevorschriften würden in unserem Modell die Wahl der Anlagepolitik  $\lambda$  einschränken und i.a. zu suboptimalen Lösungen führen. Berücksichtigt man die z. T. sehr unterschiedlichen Charakteristiken der verschiedenen Pensionskassen, so wären starke Einschränkungen der Anlagepolitik zumindest problematisch.

Heinz H. Müller  
René Capitelli  
Mark Hauser

Institut für Empirische Wirtschaftsforschung  
der Universität Zürich  
Zollikerstrasse 137  
8008 Zürich

## Literaturverzeichnis

- Bühlmann, Hans* (1970): «Mathematical Methods in Risk Theory», Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 172, Springer, 1970.
- Fama, Eugene F.* (1976): «Foundations of Finance», Basic Books, Inc., New York, 1976.
- Janssen, Martin und Heinz H. Müller* (1981): «Der Einfluss der Demographie auf die Aktivitäten des Staates: die Finanzierung der 1. und 2. Säule der Altersvorsorge, Schweiz. Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, Heft 3/1981, S. 297–314.
- Müller, Heinz H., René Capitelli und Markus J. Granziol* (1983): «Optimale Portefeuilles für institutionelle Anleger», IEW Diskussions-Beiträge Nr. 8301, Universität Zürich.

## Appendix

### A) Beweis von Satz 1

Einsetzen von (11) in (III) ergibt

$$\underbrace{-\frac{c}{2a_2bn}}_{:=R_1(n)} + \underbrace{\left(\frac{1}{v}-1\right)}_{:=R_2(v)} + \underbrace{\frac{a_1k_1}{2a_2} + bv^2 + k_0 - \gamma}_{:=R_3(v, \gamma)} = 0 \quad (12)$$

Es gilt

$$R_1(n) > 0, R_2(v) > 0 \quad n \in \mathbb{N}, v \in (0,1)$$

und somit wegen (12)

$$R_3(v, \gamma) > 0.$$

Zudem erfüllen  $R_1, R_2, R_3$  folgende Monotonieigenschaften

$$n \uparrow \Leftrightarrow R_1(n) \downarrow \quad (13)$$

$$\text{Für festes } \gamma: v \uparrow \Leftrightarrow R_2(v) \downarrow, R_3(v, \gamma) \uparrow \quad (14)$$

$$\text{Für festes } v: \gamma \uparrow \Leftrightarrow R_3(v, \gamma) \downarrow \quad (15)$$

Wegen (12) gilt

$$R_1(n) = \frac{R_3(v, \gamma)}{R_2(v)}. \quad (16)$$

Zuerst wird nun gezeigt:

$$\text{Für festes } \gamma \text{ gilt: } n \uparrow \Rightarrow v \downarrow, \lambda \downarrow, \text{var}(\beta) \downarrow \quad (17)$$

Beweis: i.1)  $n \uparrow \Rightarrow v \downarrow$  wegen (13), (14), (16)

i.2)  $v \downarrow \Rightarrow \lambda \downarrow$  wegen (III)

i.3)  $n \uparrow \Rightarrow \text{var}(\beta) \downarrow$

$(\lambda_0, v_0)$  sei die *optimale* Lösung für  $n = n_0$  und es gilt

$$\text{Var}[\beta(\lambda_0, v_0, n_0)] = k_1^2 [a_2 \lambda_0^2 + a_1 \lambda_0 + a_0] + \frac{c}{n_0} (1 - v_0)^2$$

Für  $n > n_0$  ist  $(\lambda_0, v_0)$  eine *zulässige* Lösung mit

$$\text{Var}[\beta(\lambda_0, v_0, n)] < \text{Var}[\beta(\lambda_0, v_0, n_0)].$$

Es bleibt zu zeigen:

Für festes  $n$  gilt:  $\gamma \uparrow \Rightarrow v \uparrow, \lambda \downarrow, \text{var}(\beta) \downarrow$

Beweis: ii.1)  $\gamma \uparrow \Rightarrow v \uparrow$  wegen (14), (15), (16)

ii.2)  $v \uparrow \Rightarrow \lambda \downarrow$  wegen (11)

ii.3)  $\gamma \uparrow \Rightarrow \text{var}(\beta) \downarrow$

da bei einer Zunahme von  $\gamma$  die Menge der zulässigen Lösungen des Optimierungsproblems erweitert wird.

## B) Beweis von Satz 2

Das Optimierungsproblem lautet

$$\min_{\lambda, v} [-k_1 \lambda + b v^2 + k_0]$$

unter

$$k_1^2 [a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0] + \frac{c}{n} (1 - v)^2 \leq \delta \quad (\delta \text{ vorgegebene Konstante})$$

Unter Regularitätsannahmen resultieren die Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$-k_1 + \xi k_1^2 [2 a_2 \lambda + a_1] = 0 \quad (\text{I}')$$

$$2 b v - \xi \frac{2 c}{n} (1 - v) = 0 \quad (\text{II}')$$

$$k_1^2 [a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0] + \frac{c}{n} (1 - v)^2 = \delta. \quad (\text{III}')$$

Wegen (I') und (II') lässt sich  $\lambda$  als Funktion von  $n$  und  $v$  darstellen.

$$\lambda(n, v) = \frac{c}{2 a_2 k_1 b n} \left( \frac{1}{v} - 1 \right) - \frac{a_1}{2 a_2}. \quad (18)$$

Offensichtlich ist  $\lambda(n, v)$  in beiden Argumenten strikt monoton fallend, falls  $v \in (0, 1)$ .

Nun lässt sich (III') in folgende Form bringen

$$\underbrace{k_1^2 \{a_2 [\lambda(n, v) - \lambda_{\min}]^2 + \text{konst.}\}}_{:= U_1(n, v)} + \underbrace{\frac{c}{n} (1 - v)^2 - \delta}_{:= U_2(n, v, \delta)} = 0 \quad (19)$$

Wegen  $\lambda > \lambda_{\min}$ ,  $v \in (0, 1)$  gilt:

$$U_1(n, v) \text{ ist in } n \text{ und } v \text{ strikt monoton fallend} \quad (20)$$

$$U_2(n, v, \delta) \text{ ist in } n, v \text{ und } \delta \text{ strikt monoton fallend} \quad (21)$$

Zuerst wird nun gezeigt:

$$\text{Für } \text{Var}(\beta) = \text{konst. gilt: } n \uparrow \Rightarrow v \downarrow, E(\beta) \downarrow$$

Beweis: i.1)  $n \uparrow \Rightarrow v \downarrow$  wegen (19), (20), (21)

i.2)  $n \uparrow \Rightarrow E(\beta) \downarrow$  analog wie i.3 im Beweis von Satz 1.

Es bleibt zu zeigen:

$$\text{Für } n = \text{konst gilt: } \delta \uparrow \Rightarrow v \downarrow, \lambda \uparrow, E(\beta) \downarrow$$

Beweis: ii.1)  $\delta \uparrow \Rightarrow v \downarrow$  wegen (19), (20), (21)

ii.2)  $v \downarrow \Rightarrow \lambda \uparrow$  wegen (18)

ii.3)  $v \downarrow, \lambda \uparrow \Rightarrow E(\beta) \downarrow$ , da  $E(\beta) = -k_1 \lambda + b v^2 + k_0$

## **Zusammenfassung**

In der vorliegenden Studie werden Anlagepolitik und Rückversicherung einer Pensionskasse mit Hilfe eines Optimierungsansatzes aufeinander abgestimmt. Es wird u. a. gezeigt, dass eine vorsichtige Anlagepolitik nie mit einem geringen Rückversicherungsgrad kombiniert werden sollte. Schliesslich wird die Sensitivität der optimalen Lösung hinsichtlich Mitgliederzahl und Risikoaversion der Kasse untersucht.

## **Résumé**

Dans cette étude la politique d'investissement et la réassurance d'une caisse de pensions sont coordonnées au moyen d'un modèle d'optimisation. En particulier on peut démontrer qu'il ne faudrait jamais combiner une politique d'investissement prudente avec un degré de réassurance peu considérable. Enfin l'auteur analyse la sensibilité de la solution optimale en fonction de l'aversion au risque et de la taille de la caisse.

## **Abstract**

In this study investment policy and reinsurance of a pension fund are coordinated by means of an optimization approach. It is shown in particular that a cautious investment policy should never be combined with a low degree of reinsurance. Finally, the sensitivity of the optimal solution with respect to the size and the risk aversion of the fund are analysed.