La théorie abstraite de la multimixte et son application à l'invalidité

Autor(en): **Franckx, Edouard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **- (1983)**

Heft 2

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967138

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

EDOUARD FRANCKX, Bruxelles

La théorie abstraite de la multimixte et son application à l'invalidité

Avant-propos

Toute théorie abstraite possède l'avantage de la simplification. Car elle se développe en dehors de toute interprétation concrète. Il suffit de justifier les conventions de correspondance pour qu'ipso facto on puisse énoncer les propriétés d'une théorie concrète interprétative; car les propriétés réelles sont d'une manière isomorphe établies par la théorie abstraite.
En assurance vie, les assurés disparaissent par mortalité. Dans la théorie des emprunts, les titres s'éliminent par tirage. En assurance invalidité, la disparition est la conséquence de la survenance de deux causes: la mortalité et l'invalidité. Ces exemples concrets constituent simplement des cas particuliers d'*un processus d'élimination* où les individus qui appartiennent à la collectivité initiale J disparaissent dans le temps pour une ou plusieurs causes.
Dès lors, la théorie abstraite comporte:
1. la considération *d'un* processus d'élimination dans le temps;
2. l'éxistence d'un jeu financier et stochastique, basé sur la présence ou la disparition d'un élément *donné* appartenant à la collectivité initiale J.

Cette opération abstraite sera dénommée *multimixte;* elle prévoit:
a) la considération d'un nombre fini de causes d'élimination $C_1, \ldots, C_r$;
b) le paiement par l'individu des *primes* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k, \ldots$, positives ou négatives (rentes);
c) le paiement d'*indemnités* en cas d'élimination par la cause spécifique C_i: $K_1^i, K_2^i, \ldots, K_{f-1}^i \geq 0$;
d) au terme du contrat, au temps final f, la clôture par le paiement des soldes

$$K_f^1, \ldots, K_f^r \geq 0$$

Bien sûr:
1. *Tout risque mérite une tarification justifiée.*
   Cela implique que les données ci-dessus de la multimixte sont nécessairement soumises à des contraintes.
   L'existence des contraintes détermine la construction d'une théorie générale.

2. Dans le cas d'une seule cause, elle doit donner la théorie de la mixte ordinaire.

Notre exposé a pour objet de prouver que:

1. la théorie abstraite se développe suivant le même processus;
2. les résultats acquis pour $r = 1$ se généralisent de manière isomorphe; en particulier, l'algorithme rétrospectif α, β (voir (13), (14)) est une méthode universelle du calcul des réserves d'une multimixte arbitraire.

Chapitre 1. La théorie de la multimixte

A. *Le processus d'élimination dans le temps*

1. Les hypothèses de l'avant-propos conduisent à admettre, quels que soient l'exercice et l'élément qui est isolé, l'existence d'une variable aléatoire Z, qui définit l'élimination de l'individu.
   Si q_z^i représente la probabilité de disparition pour la cause C_i, on doit avoir

$$p_z + q_z^1 + \ldots + q_z^i + \ldots + q_z^r = 1 \tag{1}$$

   p_z étant la probabilité de présence dans la collectivité à l'âge $z+1$.

2. Les q_z^i sont des *données*, pour l'entrepreneur des jeux.
   Pour sa facilité, il peut calculer une *table de mortalité* caractérisant la disparition par les formules

$$\begin{aligned} &1.\ l_0 = 100\,000, \\ &2.\ l_{z+1} = p_z\, l_z = l_0\, p_0\, p_1 \cdot \ldots \cdot p_z \end{aligned} \tag{2}$$

   l_z représentant le nombre des présents à l'âge z, si le nombre initial est 100 000.

3. Pour les besoins de calcul, il est souhaitable d'introduire des commutations

$$\begin{aligned} &\text{a) } D_z = v^z\, l_z, \\ &\text{b) } C_z^i = v^{z+\frac{1}{2}}\, l_z\, q_z^i, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned} \tag{3}$$

4. Notre but est de prouver que ces tables constituent le software indispensable pour traiter *toutes* les opérations d'une multimixte.

B. *Les contraintes du jeu*

1. Dès qu'un joueur se présente, on admet que l'entrepreneur de jeu ouvre en son nom un compte dont le *montant* V_z dite *épargne* fluctue dans le temps. L'évolution de cette épargne dans le temps sera notée

$$V_x, \ldots, V_z, \ldots, V_f. \tag{4}$$

$x =$ âge initial, $z =$ âge atteint, $f =$ âge final
Par *hypothèse*, cette épargne ne peut être négative

$$V_z \geq 0. \tag{5}$$

Le joueur ne peut être en dette vis à vis de l'entrepreneur.
L'étude de la suite évolutive (4) constitue l'objet fondamental de la théorie abstraite.

2. Pour définir le jeu, il faut fixer la relation qui conditionne la suite $\{ V_z \}$. Nous admettons que:
   a) quel que soit l'intervalle (exercice) $[z, z + 1]$, le joueur engage son avoir total $V_z + P_z$, c'est à dire son épargne et la prime payée au début de l'exercice;
   b) l'entrepreneur s'engage:
      1. à payer la somme K_z^i s'il est éliminé par la cause C_i;
      2. à garantir le nouvel avoir $V_{z+1} \geq 0$ en fin d'exercice.

3. *Axiome du jeu équitable*
Quelle que soit la partie, on admet qu'il doit exister égalité entre les engagements probables des parties opposées.
Cette contrainte se traduit immédiatement par la *relation d'évolution de l'épargne*

$$V_z + \Pi_z = \sum_{i=1}^{r} q_z^i \, v^{\frac{1}{2}} K_z^i + v \, p_z \, V_{z+1} \tag{6}$$

ou en symboles de commutation (multiplier par D_z)

$$V_{z+1} \, D_{z+1} - V_z \, D_z = \Pi_z \, D_z - \sum_{i=1}^{r} C_z^i \, K_z^i. \tag{7}$$

Ce sont les équations fondamentales de l'évolution du compte du joueur, auxquelles il convient d'ajouter les conditions aux limites:
1. $V_x = 0$
   le jeu n'ayant pas commencé, l'épargne est nulle; (8)
2. $V_f = K_f$
   on clôture en payant l'épargne finale comme solde.

C. *Les grands théorèmes*

1. *Le théorème de compatibilité*
   Quel que soit l'exercice, l'avoir total du joueur doit surpasser la prime de risque,
   car (6) et $V_{z+1} \geq 0$ entraîne

$$(V_z + \Pi_z) - \sum_{i=1}^{r} q_z^i \, v^{\frac{1}{2}} K_z^i \geq 0 . \tag{9}$$

2. *Le théorème de l'équité globale*
   Le jeu demeure équitable entre deux âges $z_1 < z_2$ quelconques,
   car (7) entraîne par sommation

$$V_{z_2} D_{z_2} - V_{z_1} D_{z_1} = \sum_{z_1}^{z_2-1} \Pi_u D_u - \sum_{z_1}^{z_2-1} C_u^1 K_u^1 - \ldots - \sum_{z_1}^{z_2-1} C_u^r K_u^r$$

$$\Leftrightarrow V_{z_1} + \sum_{z_1}^{z_2-1} \Pi_u \frac{D_u}{D_{z_1}} = \sum_{z_1}^{z_2-1} C_u^1 \frac{K_u^1}{D_{z_1}} + \ldots + \sum_{z_1}^{z_2-1} C_u^r \frac{K_u^r}{D_{z_1}} + \frac{D_{z_2}}{D_{z_1}} V_{z_2} \tag{10}$$

   ce qui exprime l'égalité des engagements des parties sur la période $[z_1, z_2]$ quelconque.

3. *Le théorème d'identification de la réserve et de l'épargne*
   a) Si on pose $z_2 = f$, on a quel que soit z_1.

$$V_{z_1} = \sum_{z_1}^{f-1} C_u^1 \frac{K_u^1}{D_{z_1}} + \ldots + \sum_{z_1}^{f-1} C_u^r \frac{K_u^r}{D_{z_1}} + \frac{D_f}{D_{z_1}} K_f - \sum_{z_1}^{f-1} \Pi_u \frac{D_u}{D_{z_1}} \tag{11}$$

   le second membre est *par définition* la réserve prospective de l'opération;

   b) Si on pose de plus $z_1 = x$, on a $V_x = 0$

$$\sum_{x}^{f-1} C_u^1 \cdot \frac{K_u^1}{D_x} + \ldots . + \sum_{x}^{f-1} C_u^r \frac{K_u^r}{D_x} + \frac{D^f}{D_x} K_f = \sum_{x}^{f-1} \Pi_u \frac{D_u}{D_x} \tag{12}$$

   c'est la *contrainte* des primes, qui exprime que le jeu est équitable dans sa totalité.
   C'est *par définition* la relation de calcul des primes en théorie classique;

   c) réciproquement (11) pour z_1 et $z_1 + 1$ donnent (7) et par suite la condition locale d'équité et par voie de conséquence l'équité globale.

Il en résulte que la théorie classique est totalement équivalente à la théorie évolutive.

La première est *statique;* la seconde a un caractère *dynamique.*

Chapitre 2. Le calcul rétrospectif de l'avoir

1. Les méthodes actuelles de calcul sur ordinateur donnent une priorité à l'utilisation des algorithmes.
   Il est par conséquent essentiel de rechercher un *algorithme universel* qui permettrait le calcul numérique de l'épargne d'*une multimixte quelconque.*
   Ce dernier doit être basé sur la relation d'évolution (6) ou son équivalente (7).
   Posons les règles suivantes, qui définissent l'*algorithme* α, β:

$$R_1 \qquad \alpha_z = \Pi_z D_z - \sum_{i=1}^{r} C_z^i K_z^i \tag{13}$$

$$R_2 \qquad \beta_z = \alpha_x + \alpha_{x+1} \ldots + \alpha_z. \tag{14}$$

2. *Théorème de la réserve*

   a) Quelle que soit la multimixte, la réserve à l'âge $(z + 1)$ est uniformément donnée par la relation

$$V_{z+1} = \frac{\beta_z}{D_{z+1}}, \qquad z = x, \ldots, f \tag{15}$$

avec $V_x = 0$

car si

$$\begin{array}{rl} V_{z+1} D_{z+1} &= \beta_z = \alpha_x + \alpha_{x+1} + \ldots + \alpha_{z-1} + \alpha_z \\ V_z D_z &= \beta_{z-1} = \alpha_x + \alpha_{x+1} + \ldots + \alpha_{z-1} \\ \hline V_{z+1} D_{z+1} - V_z D_z &= \beta_z - \beta_{z-1} = \alpha_z = \Pi_z D_z - \sum_{i=1}^{r} C_z^i K_z^i \end{array}$$

   ce qui prouve que V_{z+1} obtenu par (15) satisfait à l'équation évolutive (7).

   b) De plus, elle obéit aux conditions aux limites, car

$$V_f = \frac{\beta_{f-1}}{D_f} \quad \text{ou} \quad V_f D_f = \beta_{f-1}$$

   mais c'est l'équation de contrainte des primes, d'où $V_f = K_f$.
   Il en résulte que l'algorithme α, β, donné précédemment pour la mixte ordinaire se généralise d'une manière isomorphe à la multimixte.

3. Le calcul des α_z exige l'introduction des *données* sous la forme

$$\Pi_x, K_x^1, \ldots, K_x^r; \Pi_{x+1}, K_{x+1}^1, \ldots, K_{x+1}^r, \ldots \tag{16}$$

Si dans la mémoire de l'ordinateur on a les suites *invariantes* aux multimixtes particulières

$$D_x,\ C_x^1, \ldots, C_x^r;\ D_{x+1},\ C_{x+1}^1, \ldots, C_{x+1}^r, \ldots$$

on calculera automatiquement et les α_z et les β_z et par suite les réserves V_{z+1}.

Le calcul rétrospectif des réserves est, à notre avis, la méthode la plus simple et la plus systématique du calcul des réserves d'une multimixte arbitraire.

Les deux chapitres précédents terminent un exposé complet, le plus bref possible, de la théorie de la multimixte.

Nous n'avons pas abordé la question des chargements, du groupement des réserves, qui résultent immédiatement de la *propriété de linéarité* et la relation d'évolution de l'épargne (6).

Chapitre 3. L'assurance invalidité

A. Si on se reporte à l'introduction, le travail préliminaire consiste à établir les conventions de correspondance. De la collectivité initiale sont éliminés les éléments par deux causes: la mortalité et l'invalidité.

Cela implique que l'arrivée de l'état d'invalidité est considéré comme un fait définitif.

Il y a donc deux causes: C_1 pour la mortalité, C_2 pour l'invalidité.

Le processus d'élimination dans le temps est introduit par les données:

$$p_z + q_z + \rho_z = 1$$

où q_z est la mortalité générale, ρ_z la probabilité de passage à l'invalidité.

A partir de là, on établit:

1. la *table de mortalité des actifs* par les formules (2);
2. les tables de commutation D_z, C_z^1, C_z^2. (3)

L'épargne de l'assuré ou la réserve mathématique de la multimixte sera toujours donnée par la suite

$$V_x, \ldots, V_z, \ldots, V_f \tag{4}$$

et l'évolution définie par la relation

$$V_z + \Pi_z = q_z K_z^1 + \rho_z K_z^2 + v\, p_z V_{z+1}. \tag{6}$$

B. Dans cette relation en général K_z^1 est une donnée, mais *il n'en est pas de même de* K_z^2.
En reprenant la définition K_z^2 est le capital constitutif des avantages reconnus à l'invalide.
Cela nécessite la considération d'un autre processus d'élimination qui est celui des invalides.
On pourra à titre d'exemple:
1. ou bien introduire une table expérimentale d'invalidité;
2. ou bien admettre l'hypothèse (souvent admise pour les risques tarés) d'un vieillissement uniforme, c'est à dire l'arrivée de l'invalidité à l'âge z donne une tête $z + u$ (u étant une constante) qui subit la mortalité générale.

K_z^2 étant la réserve de l'opération d'invalidité, il convient de préciser quand elle débute.
Il est normal d'admettre que le passage à l'invalidité se réalise au milieu de l'année, ce qui correspond à l'hypothèse de la table de commutation C_z^2.
Dès lors, quel que soit z, il existe une opération actuarielle sur une seule tête, qui débute à l'âge moyen $z + \dfrac{1}{2}$ et dont la prime unique est toujours *calculable*: K_z^2.
Il en résulte que le calcul de K_z^2, variable d'âge en âge, est une simple application de la théorie générale établie pour le cas $n = 1$.
Ceci termine le travail préliminaire des conventions de correspondance.

C. A titre d'exemple, supposons:

a) 1. qu'une prime constante Π est payée aussi longtemps que *l'assuré soit actif*;

   2. que l'opération principale soit une mixte ordinaire de capital uniforme K

$$K_1^1 = K_2^1 = \ldots = K_{f-1}^1 = K_f^1 = K;$$

   3. qu'en cas d'invalidité, il est payé une rente trimestrielle rK jusqu'à un âge f' qui n'est pas nécessairement celui de la mixte principale.

   Ceci fixe les données à priori de l'opération;

b) pour établir le tableau des prestations de la multimixte, il faut:

   1. établir les valeurs numériques des K_z^2.

$$\text{Or} \quad K_z^2 = rK\, \ddot{a}^{(4)}_{z+u+\frac{1}{2}\,\overline{f'-z-\frac{1}{2}}|}$$

   et tous ces capitaux sont calculables à partir de la table de mortalité générale;

2. calculer la prime uniforme Π par la relation:

$$\Pi (D^1_x + D^1_{x+1} + \dots + D^1_{f-1}) \\ = K (D_f + C^1_x + C^1_{x+1} + \dots + C^1_{f-1}) + \sum_x^{f-1} K^2_z C^2_z;$$

c) pour le calcul des réserves par l'algorithme α, β, il suffit d'introduire en mémoire la suite:

$$\Pi K K^2_z, \Pi K K^2_{z+1}, \dots$$

qui permet le calcul systématique des α_z par:

$$\alpha_z = \Pi D^1_z - K C^1_z - K^2_z C^2_z$$

et par suite le calcul de toutes les réserves de l'opération d'invalidité.

Prof. E. Franckx
Avenue Albert Elisabeth 66, Bte 36
Résidence Algarve 50
1200 Bruxelles

Résumé

Le calcul des réserves d'une mixte arbitraire (vie entière, mixte, terme fixe, solde restant dû) peut se faire uniformément par l'algorithme α, β.
Toute la théorie est généralisable au cas où la population de base subit différentes causes d'élimination, en particulier l'invalidité.

Zusammenfassung

Die Reserveberechnung für gemischte und ähnliche Versicherungen (lebenslängliche, Terme-fixe und Restschuldversicherungen) kann einheitlich durch den Algorithmus α, β erfolgen.
Die Theorie lässt sich verallgemeinern für den Fall, dass die Bevölkerung verschiedenen Ausscheideursachen ausgesetzt ist, insbesondere der Invalidität.

Summary

The reserve calculation for endowment and similar assurances (ordinary life, fixed term and reducing term) may be performed uniquely by the algorithm α, β.
The theory may be generalised by extending it to a population subject to various modes of decrement, especially disability.