Ein Modell zur Tarifierung von Kumul-Schadenexzedenten-Verträgen in der Unfallversicherung

Autor(en): **Kremer, Erhard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **- (1983)**

Heft 1

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967131

ERHARD KREMER, Hamburg

Ein Modell zur Tarifierung von Kumul-Schadenexzedenten-Verträgen in der Unfallversicherung

1 Einleitung

Die verschiedenen Rückversicherungsvertragsformen sind zur Reduktion unterschiedlicher versicherungstechnischer Risiken entwickelt worden. Zum Schutz gegen Grossschäden erweist sich die Kombination zweier Vertragsformen als besonders geeignet, dies sind:

(a) der (einzelrisikoorientierte) Schadenexzedentenvertrag (XL) oder der Summenexzedentenvertrag

(b) der Kumul-Schadenexzedenten-Vertrag (Kumul-XL).

[s. Gerathewohl (1976)]. Speziell in der Unfallversicherung erscheint zur Rückversicherung des Einzelrisikos der Summenexzedentenvertrag als adäquat, dennoch wird oft auch der XL (pro Risiko) angewendet. Ergänzend hierzu wird häufig ein Kumul-XL zum Schutz gegen unbekannte Kumuls abgeschlossen. Sind die Prioritäten für den XL und den Kumul-XL festgelegt, so stellt sich für den Rückversicherer das Problem, die richtige Risikoprämie zu bestimmen. Zur Tarifierung von XL-Verträgen in der Unfallversicherung wurde kürzlich vom Verfasser [s. Kremer (1981)] ein allgemeines Exposure-Verfahren dargestellt, das eine Erweiterung eines von Benktander (1954) für die Feuerversicherung entwickelten Verfahrens ist.

Schwieriger als die Quotierung von XL-Verträgen erweist sich die Tarifierung von Kumul-XL-Verträgen, da die Unabhängigkeitsannahme für die Einzelrisiken hierbei nicht mehr zulässig ist. Für die Lebensversicherung wurde bereits ein praktikables Modell zur Bestimmung der Risikoprämie eines Kumul-XL, das sogenannte Strickler-Modell, entwickelt [s. Strickler (1960)], das von Feilmeier et al. (1980) noch verallgemeinert wurde. Dieses Modell lässt sich auch direkt in der Unfallversicherung zur Tarifierung eines Kumul-XL für das Todesfall-Risiko anwenden. Sollen jedoch weitere Eventualitäten, etwa das Invaliditäts-Risiko, im Kumul-XL mitgedeckt werden, so ist das Strickler-Modell in seiner Grundform nicht mehr anwendbar.

In der vorliegenden Notiz stellen wir eine einfache Verallgemeinerung des Strickler-Modells auf den Fall mehrerer Eventualitäten dar. Es wird lediglich die

Struktur des erweiterten Modells angegeben, das Testen der Realisierbarkeit möchte der Verfasser den in der Praxis tätigen (Rück-)Versicherungsmathematikern überlassen.

2 Das Kollektiv des Erstversicherers

Betrachtet wird ein Kollektiv $K=\{R_\vartheta,\ \vartheta\in\Theta\}$ von Risiken R_ϑ, die bei Unfällen gegen eine oder mehrere von p sich gegenseitig ausschliessenden *Eventualitäten* $e_k, k=1,\ldots,p$ versichert sind. Jede Eventualität e kann Intensitätsgrade $I_e\in[0,1]$ annehmen, wobei $I_e=0$ bedeutet, dass die Eventualität nicht eingetreten ist. Bekannt sei die *bedingte Verteilungsfunktion F_e des Intensitätsgrades I_e* unter der Bedingung, dass die Eventualität e eingetreten ist:

$$F_e(y):=P(I_e\leq y|I_e>0),\ \ y\in[0,1].$$

Der Erstversicherer biete m_e verschiedene *Versicherungsformen* $\mathcal{F}_{ej}, j=1,\ldots,m_e$ für die Eventualität e an, wobei die Versicherungsform $\mathcal{F}_{ej}$ gekennzeichnet ist durch eine Funktion $g_{ej}:[0,1]\rightarrow[0,\infty)$ $(g_{ej}(0)=0)$ mit den Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{l}g_{ej}\text{ ist nichtfallend, linksseitig stetig auf }(0,1]\text{ und integrierbar bezüglich}\\ \text{der Verteilungsfunktion }F_e.\end{array}\right\}\quad(1)$$

Die Funktion g_{ej} ist als *Auszahlungsfunktion* zu interpretieren, d.h.:

> Ist das Risiko R gegen die Eventualität e mit der Versicherungsform $\mathcal{F}_{ej}$ versichert und gilt $I_e=i$, so wird dem Risiko das $g_{ej}(i)$-fache seiner Versicherungssumme ausgezahlt. Dieser Betrag wird im folgenden als Schadenhöhe (bezüglich der Eventualität e) bezeichnet.

Die *Verteilung der Versicherungssummen* der Risiken des Kollektivs wird beschrieben durch die Verteilungsfunktionen V_{ej} auf $(0,\infty)$ mit:

$$V_{ej}(v)=\frac{|\{R\in M_{ej}:v_e(R)\leq v\}|}{|M_{ej}|},$$

wobei wir definieren:

- M_{ej}: Menge der Risiken aus K, die gegen die Eventualität e mit der Versicherungsform j versichert sind
- $v_e(R)$: Versicherungssumme des Risikos R bezüglich der Eventualität e. Hierbei wird angenommen, dass ein bezüglich der Eventualität e versichertes Risiko R lediglich eine der Versicherungsformen $\mathcal{F}_{ej}$ wählen kann.

3 Der Kumul-XL

Das Kollektiv soll durch einen Kumul-XL mit Priorität P und Haftung $H-P$ rückversichert werden, wobei wir zur Vereinfachung eine einjährige Vertragsdauer (wie in der Praxis üblich) annehmen.
Sei N_k die Zufallsvariable, welche die Anzahl der Risiken des Kollektivs bezeichnet, die bei einem Unfallereignis von der Eventualität e_k betroffen sind. Damit ist

$$N := \sum_{k=1}^{p} N_k$$

die Gesamtzahl der vom Unfall betroffenen Risiken. Bezeichnet S_{kl} die Schadenhöhe des l-ten von der Eventualität e_k betroffenen Risikos ($l=1, \ldots, N_k$), so ist

$$S := \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{N_k} S_{kl}$$

die *gesamte Versicherungsleistung* bei dem betrachteten Unfall. Der Kumul-XL sei nun derart erklärt, dass der Rückversicherer genau dann belastet wird, falls

$$N \geq M, \quad S \geq P$$

wobei $M > 1$ fest vorgegeben ist. Die *Exzess-Belastung* beträgt dann für den Rückversicherer pro Unfall:

$$XS := (\min(H, S) - P) \cdot 1_{\{S \geq P,\ N \geq M\}}$$

4 Auswertung des Modells

Zur Auswertung des Modells werden zusätzlich die folgenden Annahmen getroffen:

(A1) Die gemeinsame Verteilung von $(N_1, \ldots, N_k)$ ist bekannt. Wir setzen:

$$h(n_1, \ldots, n_k) := P(N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k), \quad \forall n_i \in \mathbb{N}_0.$$

(A2) Die Anzahl U der Mehrfachunfälle (d.h. Unfälle mit $N \geq M$) sei Poisson-verteilt mit Parameter $\mu = E(U)$ und stochastisch unabhängig von der Schadenhöhe S des einzelnen Unfalls.

(A3) Die Schadenhöhen S verschiedener Mehrfachunfälle seien stochastisch unabhängig.

(A4) Die Schadenhöhen S_{kl}, $l = 1, \ldots, n_k$, $k = 1, \ldots, p$, verschiedener von einem Unfall betroffener Risiken seien stochastisch unabhängig.

Im folgenden setzen wir:

$$p_e(j) := \frac{|M_{ej}|}{\sum_{j=1}^{m_e} |M_{ej}|}, \qquad j = 1, \ldots, m_e \tag{2}$$

wobei M_{ej} wieder die Menge der Risiken bezeichnet, die gegen die Eventualität e mit der Versicherungsform $\mathscr{F}_{ej}$ versichert sind. Hiermit erhalten wir für die Verteilungsfunktion G_e der Schadenhöhe eines von der Eventualität e getroffenen Risikos R, wobei die Versicherungssumme entsprechend der Verteilung V_{ej} aus dem Kollektiv und die Versicherungsform j gemäss den Wahrscheinlichkeiten $p_e(j)$, $j = 1, \ldots, m_e$, ausgewählt wird:

$$\begin{aligned} G_e(s) &= \sum_{j=1}^{m_e} p_e(j) \cdot \int_{(0,\infty)} P(v \cdot g_{ej}(I_e) \leq s | I_e > 0)\, V_{ej}(dv) \\ &= \sum_{j=1}^{m_e} p_e(j) \cdot \int_{(0,\infty)} \tilde{F}_{ej}(s/v)\, V_{ej}(dv), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei:
$$\tilde{F}_{ej} := F_e \circ g_{ej}^{-1}$$

mit:
$$g_{ej}^{-1}(t) := \begin{cases} \sup \{u \leq 1 : g_{ej}(u) \leq t\}, & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{, falls } t < 0 \end{cases}$$

wegen (1) eine Verteilungsfunktion ist. Für die Verteilungsfunktion G_{XS} der Exzess-Belastung XS folgt aus (A1), (A4):

$$\begin{aligned} G_{XS}(s) = & \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k) \\ \sum_i n_i \leq M-1}} h(n_1, \ldots, n_k) \\ & + \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k) \\ \sum_i n_i \geq M}} h(n_1, \ldots, n_k) \cdot \left[\mathop{*}_{k=1}^{p} (G_{e_k}^{*n_k}) \right] (s+P) \end{aligned} \tag{4}$$

falls $s \in [0, H-P]$, wobei „$*$" den Faltungsoperator bezeichnet [vergl. Feilmeier et al. (1980)], und $G_{XS}(s) = 1$, falls $s > H-P$. Wegen (A2), (A3) gilt für den Erwartungswert und die Varianz des gesamten jährlichen Exzess-Schadens XS_{tot}:

$$\mu_{\text{tot}} := E(XS_{\text{tot}}) = \mu \cdot E(XS)$$

$$\sigma_{\text{tot}}^2 := \operatorname{Var}(XS_{\text{tot}}) = \mu \cdot E(XS)^2$$

womit man bei Verwendung des Standardabweichungsprinzips [s. Bühlmann (1970)] die *Risiko-Prämie für den Kumul-XL* gemäss

$$RP = \mu_{\text{tot}} + \alpha \cdot \sigma_{\text{tot}}$$

berechnet. Hierbei nehmen wir $\alpha \in (0, \infty)$ als fest vorgegeben an, auf die Bestimmung von α über ein Stabilitätskriterium soll hier nicht näher eingegangen werden [s. hierzu Feilmeier et al. (1980)].

Bezeichnet μ_Q bzw. γ_Q den Mittelwert bzw. das zweite Moment des Exzess-Schadens eines Kumul-XL mit Priorität Q und Haftung $H = \infty$, so lassen sich $E(XS)$ und $E(XS)^2$ für unseren Kumul-XL mit Priorität P und Haftung $H-P$ darstellen gemäss:

$$E(XS) = \mu_H - \mu_P$$

$$E(XS)^2 = \gamma_P - \gamma_H - 2(H-P) \cdot \mu_H$$

Setzt man zusätzlich voraus:

(A5) G_e besitzt eine Dichte $\tilde{g}_e$ bezüglich dem Lebesgue-Mass, so gilt nach (4):

$$\left.\begin{aligned} \mu_Q &= \sum_{\substack{(n_1, \ldots, n_k) \\ \sum_i n_i \geq M}} h(n_1, \ldots, n_k) \cdot \int_{[Q, \infty)} (s-Q) \cdot \left[\mathop{*}_{k=1}^{p} (\tilde{g}_{e_k}^{*n_k}) \right](s)\, ds \\ \gamma_Q &= \sum_{\substack{(n_1, \ldots, n_k) \\ \sum_i n_i \geq M}} h(n_1, \ldots, n_k) \cdot \int_{[Q, \infty)} (s-Q)^2 \cdot \left[\mathop{*}_{k=1}^{p} (\tilde{g}_{e_k}^{*n_k}) \right](s)\, ds \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

5 Anwendung des Modells

In der Praxis beschränkt man sich bei der Tarifierung von Unfall-XL-Verträgen auf die Betrachtung der Eventualitäten Tod und Invalidität, d.h. im obigen Modell ist $p = 2$ zu setzen.

(a) Für die *Eventualität „Tod"* gilt:

$$F_{e_1} = 1_{\{1\}}, \quad m_{e_1} = 1, \quad g_{e_1,1} = \text{id}, \quad p_{e_1}(1) = 1$$

womit folgt:

$$G_{e_1}(s) = V_{e_1,1}(s) \qquad (6)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung kann man $V_{e_1,1}$ durch eine absolut stetige Verteilungsfunktion $\tilde{V}$ approximieren, wodurch Bedingung (A5) erfüllt wird. Hierzu bietet sich die Exponentialverteilungsfunktion

$$\tilde{V}(v) = (1 - \exp(-a \cdot v)) \cdot 1_{(0, \infty)}(v)$$

an [s. Ammeter (1949), Feilmeier (1980)], deren Parameter a mittels Regressionsanalyse bestimmt werden kann. Die Faltungen von $\tilde{g}_{e_1}$ in (5) sind damit direkt berechenbar [vergl. Feilmeier (1980) Formel (2.2.8)] und zwar gilt:

$$\tilde{g}_{e_1}^{*n_1}(v) = \frac{a^{n_1}}{(n_1-1)!} \cdot v^{n_1-1} \cdot \exp(-av) \cdot 1_{(0,\infty)}(v).$$

(b) Für die *Eventualität „Invalidität“* werden in der Praxis i.a. mehrere Versicherungsformen angeboten, z.B.:

$\mathscr{F}_{e_2,1}$: proportionale Entschädigung, d.h.:

$$g_{e_2,1}(i) = i, \quad \forall i \in [0,1]$$

$\mathscr{F}_{e_2,2}$: progressive Entschädigung mit Höchstleistung von 225 %, d.h.:

$$g_{e_2,2}(i) = i \cdot 1_{[0,1]}(i) + (i-0.25) \cdot 1_{(0.25,1]}(i) + (i-0.50) \cdot 1_{(0.50,1]}(i), \quad \forall i \in [0,1],$$

$\mathscr{F}_{e_2,3}$: Mehrleistung ab 90 % Invalidität, d.h.:

$$g_{e_2,3}(i) = i \cdot (1_{[0,1]}(i) + 1_{(0.90,1]}(i)), \quad \forall i \in [0,1].$$

Begrenzt man die Mehrleistung, so hängt die Funktion g von der Versicherungssumme V ab [s. Kremer (1981)]. Zur Vereinfachung sei dieser Fall hier nicht betrachtet.

Offensichtlich gilt für diese Versicherungsformen:

$$(1) \qquad g_{e_2,j}^{-1}(0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, 3,$$

und:

$$(2) \qquad g_{e_2,j}^{-1}(x) = \sum_{t=1}^{T_j} (a_{jt} + b_{jt} \cdot x) \cdot 1_{J_{jt}}(x), \qquad j = 1,2,3$$

wobei J_{jt}, $t = 1, \ldots, T_j$ disjunkte Intervalle und $a_{jt}, b_{jt} \in \mathbb{R}$ sind. Besitzt F_{e_2} eine Lebesque-Dichte f_{e_2}, so besitzen auch die Verteilungsfunktionen $\tilde{F}_{e_2,j}$ Lebesque-Dichten $\tilde{f}_{e_2,j}$ und zwar:

$$\tilde{f}_{e_2,j}(x) = \sum_{t=1}^{T_j} b_{jt} \cdot f_{e_2}(a_{jt} + b_{jt} \cdot x) \cdot 1_{J_{jt}}(x)$$

Hiermit erhält man als Lebesque-Dichte $\tilde{g}_{e_2}$ von G_{e_2}:

$$\tilde{g}_{e_2}(s) = \sum_{j=1}^{3} p_{e_2}(j) \cdot \int_{(0,\infty)} \frac{1}{v} \cdot \tilde{f}_{e_2,j}(s/v)\, V_{e_2,j}(dv)$$

d.h. (A5) ist erfüllt.

Approximiert man die Verteilungsfunktionen $V_{e_2,j}$ durch Exponentialverteilungsfunktionen und F_{e_2} durch ein Polynom (f_{e_2} ist damit ebenfalls ein Polynom), so kann $\tilde{g}_{e_2}(s)$ für festes s näherungsweise berechnet werden. Denn wegen der bekannten Rekursionformel:

$$\int \frac{\exp(-av)}{v^q}\, dv = \frac{1}{q-1} \cdot \left(-\frac{\exp(-av)}{v^{q-1}} - a \cdot \int \frac{\exp(-av)}{v^{q-1}}\, dv \right), \quad q > 1.$$

reduziert sich die Berechnung von $\tilde{g}_{e_2}(s)$ auf die Berechnung von Termen der Form:

$$\int_{y(s)}^{z(s)} \frac{\exp(-av)}{v}\, dv = Ei(-a \cdot z(s)) - Ei(-a \cdot y(s))$$

mit von s abhängenden Endpunkten z, y und dem Exponentialintegral

$$Ei(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{\exp(t)}{t}\, dt, \qquad x \leq 0$$

[vergl. Abramowitz (1964)]. Offensichtlich sind nun die Faltungen von $\tilde{g}_{e_2}$ in (5) nicht mehr wie in (a) explizit angebbar, sondern man muss zur Berechnung auf iterative Näherungsverfahren [s. z. B. Strauss (1976)] zurückgreifen.

Abschliessend noch eine Aufstellung über die für die praktische Realisation des obigen zwei-dimensionalen Modells benötigten Daten:

(1.) *Unfallstatistik*, welche die Häufigkeiten der Unfälle mit n_1 Toten und n_2 Invaliden für alle möglichen (n_1, n_2)-Tupel angibt. Diese Marktstatistik kann (analog zu Strickler 1960) direkt zur Berechnung von $h(n_1, n_2)$ verwendet werden. Geeigneter erscheint uns ein zu Feilmeier (1980, S. 620–621) analoges Vorgehen, d.h. eine gesonderte Verteilung für jedes spezielle Versicherungsunternehmen durch Modifikation der Marktstatistik unter Berücksichtigung der regionalen Aufteilung des speziellen Portfeuilles herzuleiten.

(2.) *Schätzer für μ*, der mit zu Feilmeier (1980, S. 622–623) analogen Methoden gewonnen werden kann.

(3.) *Häufigkeitsverteilung der Invaliditätsgrade* basierend auf Marktdaten, womit man eine empirische Verteilungsfunktion als Näherung für F_{e_2} erhält.

(4.) *Portefeuille-Aufteilung des Erstversicherers*, d.h. Angabe der Versicherungssummen zum Todes- und Invaliditäts-Risiko, unterteilt nach den verschiedenen Versicherungsformen. Hiermit können dann die Verteilungsfunktionen V_{ej} angegeben werden.

Wir beschränken uns hier auf diese kurzen Bemerkungen, da die ausführlicheren Untersuchungen in Feilmeier (1980), wie oben bereits mehrfach betont, sich analog auf unser Modell übertragen lassen.

6 Diskussion des Modells

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, stellt das Modell eine Verallgemeinerung des Strickler-Modells (mit den Erweiterungen in Feilmeier [1980]) dar. Letzteres erhält man als Spezialfall unseres Modells, falls man $p=1$ und die Eventualität e_1 als Todesfall wählt. Die Verallgemeinerung liegt darin, dass obiges Modell zusätzlich die Behandlung des Invaliditätsfalles ermöglicht, bei dem im Gegensatz zum Todesfall auch Teilschäden möglich sind. Ferner erlaubt das erweiterte Modell die Berücksichtigung mehrerer Versicherungsformen für jede Eventualität. Kern des Modells ist Formel (3), die eine Verallgemeinerung von (6) des Strickler-Modells darstellt.
Offensichtlich sind bei der Anwendung des Modells relativ aufwendige Berechnungen durchzuführen. Da in der Praxis häufig schnelle Tarifierungen benötigt werden, sollte man das Modell nicht in der detailliertesten Form implementieren, z.B. könnte man beim Invaliditätsfall Mehrleistungen ab 90 % vernachlässigen.

Dr. Erhard Kremer
Institut für
Mathematische Stochastik
Bundesstrasse 55
2 Hamburg 13
Deutschland

Literatur

Abramowitz, M. (1964), Handbook of Mathematical Functions Washington D.C.

Ammeter, H. (1949), Die Elemente der kollektiven Risikotheorie von festen und zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten. MSV 49, S. 35–95.

Benktander, G. (1954), A method of fixing the premium of excess of loss reinsurance in fire. TICA 1954, S. 823ff.

Bühlmann, H. (1970), Mathematical Methods in Risk Theory. Springer Verlag.

Feilmeier, M. und Segerer, G. (1980), Einige Anmerkungen zur Rückversicherung von Kumulrisiken nach dem „Verfahren Strickler". BDGVM, S. 611–630.

Gerathewohl, K. (1976), Rückversicherung – Grundlagen und Praxis. Band 1, Karlsruhe 1976.

Kremer, E. (1981), Das allgemeine Exposure-Verfahren zur Tarifierung von Unfall-Schadenexzedenten-Verträgen. BDGVM.

Strauss, J. (1976), Computerverfahren zur Bestimmung von Gesamtschadenverteilungen und ihre Anwendung zur Abschätzung der Grossschadenentwicklung. TICA 1976, S. 763–772.

Strickler, P. (1960), Rückversicherung des Kumulrisikos in der Lebensversicherung. TICA 1960, S. 666–675.

Zusammenfassung

Zusätzlich zum Summenexzedenten bzw. (einzelrisikoorientierten) Schadenexzedentenvertrag wird üblicherweise in der Unfall-Rückversicherung ein Kumul-Schadenexzedentenvertrag zum Schutz gegen den unbekannten Kumul abgeschlossen. Zur Tarifierung solcher Verträge wird ein Modell angegeben, das eine Verallgemeinerung des Strickler-Modells auf mehrere Eventualitäten darstellt.

Résumé

En réassurance-accidents on rencontre ordinairement, en plus des couvertures d'excédents de sommes et d'excédents de sinistres, des contrats d'excédents par suite de cumuls à titre de protection contre les cumuls inconnus. L'article propose un modèle permettant une tarification du risque de cumul généralisant le modèle de Strickler dans le cas de plusieurs éventualités.

Summary

In addition to the surplus and (working) excess-of-loss-treaty one usually applies in accident-reinsurance a cumule-excess-of-loss-treaty for protection against the unknown cumule. For the premium calculation of such treaties a model is developed as generalisation of the Strickler-model.