

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** - (1982)

**Heft:** 2

**Artikel:** Détermination de la valeur de la probabilité de ruine avec une réserve  
initiale nulle pour le modèle de risque semi-markovien

**Autor:** Janssen, Jacques

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-966991>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

JACQUES JANSSEN, Bruxelles

## Détermination de la valeur de la probabilité de ruine avec une réserve initiale nulle pour le modèle de risque semi-markovien

### 1 Introduction

Si l'on regarde l'évolution des modèles de base en théorie du risque depuis la présentation du modèle de Lundberg en 1903, c'est seulement celui de *E.S. Andersen* (1957) qui a présenté une amélioration sensible en vue d'une plus grande généralité en se débarrassant de l'hypothèse poissonnienne pour le processus des arrivées de sinistres. Cependant la triple hypothèse d'indépendance stochastique relative aux interarrivées entre 2 sinistres consécutifs, aux montants des sinistres successifs et à ces deux suites de variables subsiste dans le modèle d'Andersen. Ceci n'est plus le cas dans le modèle semi-markovien présenté ci-dessous. En fait, ce dernier a déjà été présenté, sans le formalisme des processus semi-markoviens, par *H.D. Miller* (1962) il y a vingt ans déjà. L'idée de base est de briser la triple hypothèse d'indépendance, en vue d'une approche plus réaliste du problème, tout en gardant la possibilité d'un traitement analytique et numérique. Ceci est faisable en modélisant la dépendance par l'intermédiaire d'une chaîne de Markov incluse à un nombre fini d'états dont nous donnons ci-dessous une interprétation possible.

En 1969 puis en 1975, *Janssen* et *Thorin* ont présenté une généralisation du modèle de *E.S. Andersen* en remplacement de l'hypothèse d'avoir un processus de renouvellement pour les interarrivées des sinistres par celle consistant d'avoir un processus de renouvellement général, selon la terminologie de *W.L. Smith* (1954). Cela revient à dire que l'origine des temps est placée au hasard et donc se situe entre deux arrivées consécutives de sinistres. Dans ce cas, on obtient une relation fort simple pour l'expression de la probabilité de ruine avec une réserve initiale nulle donnée par le rapport de la moyenne d'un sinistre à celle des interarrivées, rapport supposé bien entendu inférieur à 1. On retrouve ainsi l'expression bien connue pour le modèle de Lundberg-Cramer mais non valable pour le modèle d'Andersen initial.

Le présent article a pour but de montrer que cette démarche reste valable pour le modèle de risque semi-markovien: en passant à la version stationnaire, on obtient une expression simple pour la probabilité de ruine avec une réserve

initiale nulle exprimée par le rapport du montant moyen d'un sinistre à celle des interarrivées, moyennes calculées cette fois sous la distribution stationnaire de la chaîne de Markov incluse.

Nous considérons le modèle de risque semi-markovien tel qu'il est présenté par exemple dans Janssen (1981): il existe  $m$  types de sinistres possibles (par exemple pour  $m = 3$  dans le cas des assurances autos: les sinistres créés par les bons, les moyens et les mauvais conducteurs) compris dans l'ensemble  $I = \{1, \dots, m\}$ , appelé *ensemble des types*. Nous désignons par  $(T_n, n \geq 1)$  les instants d'apparition des sinistres successifs et par  $(Y_n, n \geq 1)$  leurs montants. Les types des sinistres successifs forment le processus  $(J_n, n \geq 1)$ . Le taux de prime est de 1 par unité de temps. L'hypothèse d'un processus de risque semi-markovien est que le processus  $((J_n, X_n, Y_n), n \geq 1)$  évolue selon la condition suivante,

$$\mathbb{P}[J_n = j, X_n \leq x, Y_n \leq y | (J_k, X_k, Y_k), k \leq n-1] = Q_{J_{n-1}j}(x, y), \quad (1.1)$$

presque sûrement, pour tout  $n \geq 2$

$$\text{où } X_n = T_n - T_{n-1}, n \geq 2, X_1 = T_1. \quad (1.2)$$

Nous supposons de plus qu'il y a indépendance conditionnelle de processus  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  étant donné  $(J_n)$  c'est-à-dire que, pour tout  $i, j \in I$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $y \in \mathbb{R}^+$ :

$$Q_{ij}(x, y) = p_{ij} {}^A F_{ij}(x) {}^B F_{ij}(y) \quad (1.3)$$

où la matrice  $P = (p_{ij})$  représente la matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov  $(J_n)$  et où

$${}^A F_{ij}(x) = \mathbb{P}[X_n \leq x | J_{n-1} = i, J_n = j] \quad (1.4)$$

$${}^B F_{ij}(y) = \mathbb{P}[Y_n \leq y | J_{n-1} = i, J_n = j]. \quad (1.5)$$

Ainsi  ${}^B F_{ij}$  est la fonction de distribution (f.d.) conditionnelle de  $Y_n$ , le montant du  $n^{\text{ème}}$  sinistre, étant donné le type  $j$  de ce sinistre et le type  $i$  du sinistre précédent. La f.d.  ${}^A F_{ij}$  a la même interprétation concernant cette fois l'interarrivée  $X_n$  entre les sinistres  $n-1$  et  $n$  ( $n \geq 2$ ).

Nous supposons ces f.d. nulles en 0.

Dans la théorie du risque, il semble légitime de supposer que

$${}^A F_{ij}(x) = A_j(x) \quad (1.6)$$

$${}^B F_{ij}(y) = B_j(y), \quad (1.7)$$

c'est-à-dire que le sinistre survenu influence les f.d.  ${}^A F_{ij}$  et  ${}^B F_{ij}$ . Dans ce qui suit, nous ne retenons que l'hypothèse (1.7). Suivant la motivation de *O. Thorin* (1975) et de *J. Janssen* (1969), nous considérons ici un modèle stationnaire en ce sens que la distribution du couple  $(X_1, J_1)$  est choisie de façon à rendre le processus semi-markovien  $((X_n, J_n), n \geq 1)$  stationnaire selon la terminologie de *Pyke* (1961). Ceci revient à considérer qu'il y a eu un sinistre du type  $J_0$ , avant l'origine des temps et que:

$$\mathbb{P}[J_0 = i] = \frac{{}^A \eta_i \pi_i}{\sum_k \pi_k {}^A \eta_k} \quad (1.8)$$

$$\mathbb{P}[J_1 = j, X_1 \leq t | J_0 = i] = \frac{p_{ij}}{{}^A \eta_i} \int_0^t (1 - {}^A F_{ij}(x)) dx. \quad (1.9)$$

où  $(\pi_1, \dots, \pi_m)$  est l'unique distribution stationnaire relative à la matrice  $P$  évidemment supposée ergodique et

$${}^A \eta_j = \sum_k p_{jk} {}^A \alpha_{jk}, \quad j \in I \quad (1.10)$$

avec

$${}^A \alpha_{jk} = \int_0^\infty x d {}^A F_{jk}(x), \quad j, k \in I \quad (1.11)$$

les moyennes conditionnelles  ${}^A \alpha_{jk}$  des interarrivées étant supposées finies. Pour  $m = 1$ , (1.9) redonne le concept de processus de renouvellement stationnaire développé notamment par *Feller* (1966) et utilisée par *Janssen* (1969) et *Thorin* (1975) en théorie du risque.

Les relations (1.8) et (1.9) peuvent être concentrées en une seule relation:

$$\mathbb{P}[J_1 = j, X_1 \leq t] = \frac{1}{\sum_k \pi_k {}^A \eta_k} \sum_i \pi_i p_{ij} \int_0^t (1 - {}^A F_{ij}(x)) dx. \quad (1.12)$$

En conclusion, nous considérons un modèle de risque semi-markovien stationnaire, c'est-à-dire défini par les relations (1.1), (1.3), (1.7) et (1.12). Remarquons que dans le cas où l'hypothèse (1.6) est retenue, (1.12) devient:

$$\mathbb{P}[J_1 = j, X_1 \leq t] = \frac{\pi_j}{\sum_k \pi_k {}^A \eta_k} \int_0^t (1 - A_j(x)) dx. \quad (1.13)$$

## 2 Probabilités de ruine et de non-ruine

Supposons que l'on parte en  $X_1$ , avec après règlement du premier sinistre, une réserve de montant  $u$  ( $u \geq 0$ ). Désignons par  $R_i(u)$  la probabilité de non-ruine sur un horizon infini étant donné que le type du 1<sup>er</sup> sinistre est  $i$ . Par un raisonnement probabiliste élémentaire, il vient:

$$R_i(u) = \sum_{j=1}^m p_{ij} \int_0^\infty d^A F_{ij}(\tau) \int_0^{u+\tau} R_j(u+\tau-x) dB_j(x), \quad i \in I. \quad (2.1)$$

Si  $R(u)$  désigne la probabilité de non-ruine pour le modèle stationnaire partant en  $t=0$  avec une réserve de montant  $u$  ( $u \geq 0$ ), il vient:

$$R(u) = \sum_i \sum_j \frac{1}{\sum_k \pi_k {}^A \eta_k} \pi_i p_{ij} \int_0^\infty (1 - {}^A F_{ij}(\tau)) d\tau \int_0^{u+\tau} R_j(u+\tau-x) dB_j(x). \quad (2.2)$$

Les probabilités de ruine sont évidemment données par:

$$\psi_i(u) = 1 - R_i(u) \quad (2.3)$$

$$\psi(u) = 1 - R(u). \quad (2.4)$$

Notre but n'est pas de résoudre ces équations intégrales; ce problème est abordé notamment dans Janssen (1982). Nous voulons montrer qu'il existe un moyen simple de calculer  $R(0)$  alors qu'en général, cela ne semble pas être le cas pour les valeurs  $R_i(0)$ ,  $i \in I$ .

## 3 Calcul de $R(0)$

Pour simplifier l'écriture, posons:

$$\frac{\pi_i}{\sum_k \pi_k {}^A \eta_k} = \frac{1}{\mu_{ii}}. \quad (3.1)$$

La théorie semi-markovienne montre d'ailleurs que  $\mu_{ii}$  est le temps moyen de retour en le type  $i$ , c'est-à-dire la moyenne du temps séparant deux retours successifs en  $i$ . Posons aussi:

$$X_j(\xi) = \int_0^\xi R_j(\xi-x) dB_j(x), \quad (3.2)$$

c'est-à-dire

$$X_j(\xi) = R_j * B_j(\xi), \quad (3.3)$$

le symbole  $*$  représentant le produit de convolution usuel. Les relations (2.1) et (2.2) se mettent sous la forme:

$$R_i(u) = \sum_{j=1}^m p_{ij} \int d^4 F_{ij}(\tau) X_j(u+\tau) \quad (3.4)$$

$$R(u) = \sum_i \frac{\pi_i}{\mu_{ii}} \sum_j p_{ij} \int_0^\infty (1 - {}^A F_{ij}(\tau)) X_j(u+\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Pour des raisons techniques supposons que les f.d.  $B_j$  soient dérivables dans  $\mathbb{IR}$  de dérivée  $b_j$ . Il en résulte que les fonctions  $X$  sont dérivables et une intégration par parties de (3.4) donne:

$$R_i(u) = \sum_{j=1}^m p_{ij} \left[ X_j(u) + \int_0^\infty (1 - {}^A F_{ij}(\tau)) X'_j(u+\tau) d\tau \right]. \quad (3.6)$$

D'autre part, en dérivant la relation (3.5) membre à membre, il vient:

$$R'(u) = \sum_i \sum_j \frac{p_{ij}}{\mu_{ii}} \int_0^\infty (1 - {}^A F_{ij}(\tau)) X'_j(u+\tau) d\tau, \quad (3.7)$$

d'où par (3.6):

$$R'(u) = \sum_i \frac{1}{\mu_{ii}} \left[ R_i(u) - \sum_{j=1}^m p_{ij} X_j(u) \right]. \quad (3.8)$$

Par intégration, membre à membre, nous obtenons

$$R(u) = R(0) + \sum_i \frac{1}{\mu_{ii}} \left[ \int_0^u R_i(\tau) d\tau - \sum_j p_{ij} \int_0^u R_j * B_j(\tau) d\tau \right], \quad (3.9)$$

expression qui exprime d'une autre façon que (2.2),  $R(u)$  en fonction des  $R_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, m$  pourvu que  $R(0)$  soit connu.

Pour ce faire, remplaçons  $\mu_{ii}$  dans (3.9) par sa valeur donnée par (3.1); il vient:

$$R(u) = R(0) + \sum_k \frac{1}{\pi_k {}^A \eta_k} \sum_i \pi_i \left[ \int_0^u R_i(\tau) d\tau - \sum_j p_{ij} \int_0^u R_j * B_j(\tau) d\tau \right] \quad (3.10)$$

$$= R(0) + \sum_k \frac{1}{\pi_k {}^A \eta_k} \sum_i \pi_i \left[ \int_0^u R_i(\tau) d\tau - \int_0^u R_i * B_i(\tau) d\tau \right], \quad (3.11)$$

la dernière relation étant obtenue en se servant des égalités:

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j. \quad (3.12)$$

En désignant par  $\tilde{f}$  la transformée de Laplace d'une fonction  $f$ , l'expression (3.11) conduit à la relation:

$$\tilde{R}(s) = \frac{1}{s} R(0) + \frac{1}{\sum_k \pi_k {}^A\eta_k} \sum_i \pi_i \frac{\tilde{R}_i(s) - \tilde{R}_i(s) \tilde{b}_i(s)}{s} \quad (3.13)$$

d'où

$$s \tilde{R}(s) = R(0) + \frac{1}{\sum_k \pi_k {}^A\eta_k} \sum_i \pi_i s \tilde{R}_i(s) \frac{1 - \tilde{b}_i(s)}{s} \quad (3.14)$$

En passant à la limite pour  $s \rightarrow 0$  dans cette dernière relation, nous obtenons:

$$R(\infty) = R(0) + \frac{\sum_i \pi_i R_i(\infty) {}^B\alpha_i}{\sum_k \pi_k {}^A\eta_k} \quad (3.15)$$

$$\text{où } {}^B\alpha_i = \int_0^\infty x dB_i(x) \quad (3.16)$$

Posons, par analogie avec (1.10)

$${}^B\eta_j = \sum_k p_{jk} {}^B\alpha_k, \quad (3.17)$$

c'est-à-dire que  ${}^B\alpha_i$  représente le coût moyen d'un sinistre du type  $i$  et  ${}^B\eta_j$  le coût moyen du sinistre succédant à un sinistre du type  $j$ .

Ainsi la quantité  $\sum_j \pi_j {}^B\eta_j$  représente le coût moyen d'un sinistre futur en partant avec la distribution stationnaire pour le sinistre présent. La théorie des promenades aléatoires semi-markoviennes (Janssen (1970)) montrent que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} R_i(u) = 1, \text{ pour tout } i \in I \quad (3.18)$$

si et seulement si la quantité

$$\phi = \frac{\sum_i \pi_i {}^B\eta_i}{\sum_i \pi_i {}^A\eta_i} \quad (3.19)$$

satisfait la condition:

$$\phi < 1. \quad (3.20)$$

Par (2.2), il est évident que (3.18) implique que

$$R(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} R(u) = 1. \quad (3.21)$$

Il en résulte alors en revenant à (3.15):

$$R(0) = 1 - \frac{\sum_i \pi_i {}^B \alpha_i}{\sum_k \pi_k {}^A \eta_k}. \quad (3.22)$$

$$\text{Or } \sum_i \pi_i {}^B \eta_i = \sum_i \pi_i \sum_k p_{ik} {}^B \alpha_k \quad (3.23)$$

$$= \sum_k \pi_k {}^B \alpha_k \quad (3.24)$$

par (3.12).

En conclusion, il vient de (3.22)

$$R(0) = 1 - \phi \quad (3.25)$$

ou encore: la valeur de la probabilité de ruine avec une réserve initiale nulle vaut:

$$\psi(0) = \frac{\sum_i \pi_i {}^B \eta_i}{\sum_i \pi_i {}^A \eta_i} (= \phi). \quad (3.26)$$

L'interprétation de ce résultat est fort simple: le coefficient  $\phi$  est l'analogie du coefficient de trafic dans le modèle correspondant des files d'attente. Il mesure d'une certaine façon le risque de la compagnie d'assurance par le quotient du coût moyen d'un sinistre au temps moyen d'interarrivée des sinistres, les moyennes étant calculées sur les types des sinistres à la distribution stationnaire.

### Remarque:

Si  $m = 1$ , on retrouve la version stationnaire du modèle de E.S. Andersen pour lequel on a, par (3.26)

$$\psi(0) = \frac{{}^B \eta}{{}^A \eta}. \quad (3.27)$$

En posant

$${}^B \eta = \beta, {}^A \eta = \alpha, \quad (3.28)$$

il vient:

$$\psi(0) = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (3.29)$$

c'est-à-dire le quotient du coût moyen d'un sinistre par rapport à la moyenne des interarrivées, résultat démontré auparavant par *Janssen* (1969) et *Thorin* (1975).

J.Janssen

Université Libre de Bruxelles  
Institut de Statistique, C.P. 210  
Boulevard du Triomphe  
B-1050 Bruxelles  
Belgique

## Références

- Andersen, E.S.* (1957): On the collective theory of risk in case of contagion between the claims. Transactions XVth International Congress of Actuaries, New York, *II*, 219–229.
- Feller, W.* (1966): An introduction to probability theory and its applications, Vol. 2, J. Wiley, New York.
- Janssen, J.* (1969): Dualité en théorie collective du risque, Cahiers du C.E.R.O., *11*, 151–161.
- Janssen, J.* (1970): Sur une généralisation du concept de promenade aléatoire sur la droite réelle, Annales de l'Inst. H. Poincaré, *6*, 1970, 249–269.
- Janssen, J.* (1981): Generalized risk models, Cahiers du C.E.R.O., *23*, 225–244.
- Janssen, J.* (1982): On the interaction between risk and queueing theories (to appear).
- Miller, H.D.* (1962): Absorption probabilities for sums of random variables defined on a finite Markov Chain, Proc. Camb. Phil. Soc., *58*, 286–298.
- Pyke, R.* (1961): Markov renewal processes: Definitions and preliminary properties, A.M. Stat., *32*, 1231–1242.
- Pyke, R.* (1961): Markov renewal processes with finitely many states, *ibid.*, 1243–1259.
- Smith, W.L.* (1954): Renewal-Theory and its Ramifications, J. Roy. Stat. Soc., s. B, *20*, 243–302.
- Thorin, O.* (1975): Stationarity aspects of the S. Andersen risk process and the corresponding ruin probabilities, Scand. Actuarial Journal, 87–98.

## Résumé

Pour le modèle de risque semi-markovien avec  $m$  types de sinistres possibles influençant à la fois la distribution des montants des sinistres et celle de leurs interarrivées, nous montrons qu'il est possible de trouver la valeur de la probabilité de ruine avec une réserve initiale nulle dans le cas stationnaire. Ce résultat généralise celui bien connu pour la version stationnaire du modèle de E.S. Andersen.

## Zusammenfassung

In einem Semi-Markoffschen Risikomodell mit  $m$  verschiedenen Schadentypen, welche sowohl die Verteilung des Schadenbetrags als auch jene der Zwischenschadenzzeit beeinflussen, gelingt es, im stationären Fall mit Anfangsreserve Null die Ruinwahrscheinlichkeit zu berechnen. Das Resultat ist eine Verallgemeinerung der bekannten Formel für die stationäre Version im Modell von E.S. Andersen.

## Summary

For the semi-Markov risk model with  $m$  types of claims influencing both the claim amount distributions and the interarrival distributions, we show how it is possible to find the value of the ruin probability with a zero initial reserve for the stationary case. This result generalizes the well-known expression for the stationary version of the E.S. Andersen model.

