

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** - (1980)

**Heft:** 3

**Rubrik:** Kurzmitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## D. Kurzmitteilungen

### Näherungsformeln bei unterjähriger Zahlung

Unter diesem Titel publizierten wir in Band 79/2 (1979) der Mitteilungen der VSVM eine Arbeit von H. U. Gerber und D. A. Jones, welche zu einem Briefwechsel Anlass gegeben hat, den wir unseren Lesern nicht vorenthalten möchten.

#### 1 Replication

Dear Editors,

The following formula is derived in the above mentioned paper by probability method:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}} \frac{i}{i^{(m)}} \ddot{a}_x - \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} d^{(m)}} \quad (*)$$

Here is a simpler proof:

$$\begin{aligned} A_x &= 1 - d\ddot{a}_x, \\ A_x^{(m)} &= 1 - d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)}. \end{aligned}$$

Assuming a uniform distribution of deaths throughout each year of age, we have

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x; \quad \text{hence (*) follows.}$$

We would also like to mention that a slight variant of (\*) for the case  $m = \infty$  appeared as question 5 in the 1936 Actuarial Society of America and America Institute of Actuaries Joint Associateship Part 6 Examination.

Yours sincerely,

Elias S. W. Shiu  
Department of Actuarial  
Mathematics  
University of Manitoba  
Winnipeg (Canada)

## 2 Rejoindre

Dear Editors,

Donald Jones' and my comments to Mr. Shiu's communication are as follows:

- (1) The proof suggested by Shiu appeared in our recent note in ARCH "The Uniform Distribution of Deaths Assumption and Probability Theory".
- (2) In many texts for example in Jordan, annuities are treated before insurances. Therefore, a derivation that does not use insurances has a merit of its own.

Sincerely,

Hans U. Gerber  
Department of Mathematics  
University of Michigan  
Ann Arbor (USA)

FRANZ G. LIEBMANN, Wien

## Erfahrungs-Tarifierung in der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung in Österreich

Betrachtet wird ein Versicherungsbestand mit der jährlichen Schadenhäufigkeit  $q$ . Von diesem Gesamtbestand werden jene Teilbestände untersucht, deren Versicherungen  $t$  Jahre in Kraft waren und in diesen  $t$  Jahren genau  $n$  Schäden hatten. Gesucht ist dabei die zukünftige Schadenhäufigkeit  $q(n, t)$  dieses Teilbestandes. Unter gewissen Voraussetzungen, die in der Arbeit von Bichsel [1] angegeben sind, ist die gesuchte Schadenhäufigkeit gegeben durch die Beziehung

$$q(n, t) = q \frac{1 + \frac{b}{q} n}{1 + bt}.$$

Der Parameter  $b$  hängt mit der Heterogenität des Bestandes zusammen: für heterogene Bestände ist  $b$  gross, für fast homogene Bestände ist  $b$  klein und für vollständig homogene Bestände ist  $b$  Null.

Die Parameter  $b$  und  $q$  wurden aufgrund einer Stichprobe bestimmt, welche rund 1% (= 14.122) aller, in Österreich im Jahre 1975 bestehenden Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherungsverträge umfasst. (Die Stichprobe war Grundlage für ein «Gutachten über die Einführung eines neuen Prämien-systems» in der Kfz-Haftpflichtversicherung in Österreich, welches 1977 am Institut für Versicherungsmathematik der Technischen Universität Wien erstellt wurde.) Die Berechnung der beiden Parameter ergibt:

$$\begin{aligned} b &= 0.175 \\ q &= 0.2236 \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Parameter errechnet sich folgendes «theoretische» Prämien-system:

Prämie in Prozent der Grundprämie nach  $t$  Jahren und  $n$  Schäden

$$\text{gemäss der Beziehung } \Pi(n, t) = \frac{1 + \frac{b}{q} n}{1 + bt} 100$$

$t$	$n$					
		0	1	2	3	4
1	85%	151%	218%	285%	351%	
2	74%	132%	190%	248%	305%	
3	66%	117%	168%	219%	270%	
4	59%	105%	151%	197%	243%	
5	53%	95%	137%	178%	220%	
6	49%	87%	125%	163%	201%	

Zum Vergleich soll noch das Prämiensystem angegeben werden, welches anlässlich der Einführung der Bonus-Malus-Tarifierung der Kfz-Haftpflichtversicherung in Österreich im Jahre 1977 angewendet wurde:

Prämie in Prozent der Grundprämie nach  $t$  Jahren und  $n$  Schäden  
gemäss dem Bonus/Malus-System, eingeführt 1977 in Österreich

$t$	$n$					
		0	1	2	3	4
1	100%	140%	170%	200%	200%	
2	80%	120%	170%	200%	200%	
3	80%	120% oder 170%	140% oder 170%	170% oder 200%	170% oder 200%	170% oder 200%
4	70%	100%	140%	170% oder 200%	170% oder 200%	170% oder 200%
5	70%	100%	120% oder 140%	140% oder 170%	140% oder 200%	140% oder 200%
6	60%	80%	120%	140% oder 170%	140% oder 170%	140% oder 200%

Zum Teil ergeben sich mehrere Prozentsätze, je nachdem wie sich die  $n$  Schäden auf die  $t$  Jahre verteilen, und zwar aufgrund des nachfolgenden Schemas, bei dem wie in der Schweiz jedes schadenfreie Jahr eine Reduktion um eine und jeder Schaden eine Erhöhung um drei Stufen bewirkt.

Prämienstufe	Prozent der Tarifprämie
0	50
1	50
2	60
3	60
4	70
5	70
6	80
7	80
8	100
9	100
Grundstufe	
10	120
11	120
12	140
13	140
14	170
15	170
16	200
17	200

Eine weitere Untersuchung der Stichprobe, insbesondere in Hinblick auf die Zusammenhänge der in dieser Arbeit angewendeten Formel mit der Credibility Theory, wäre eine sicherlich sehr lohnende Aufgabe. Hier sei nur noch auf die Arbeit von H. Bühlmann [2] hingewiesen.

Franz G. Liebmann  
 Bundesministerium für Finanzen  
 (Versicherungsaufsicht)  
 Himmelpfortgasse 4–8  
 1015 Wien

## Literatur

- [1] F. Bichsel: Erfahrungstarifierung in der Motorfahrzeug-Haftpflichtversicherung. Mitteilungen der VSVM, Bd. 64/1 (1964).
- [2] H. Bühlmann: Optimale Prämienstufensysteme. Mitteilungen der VSVM, Bd. 64/2 (1964).

W. ETTL, Wien

## Einfache Formeln für die Pensionsversicherung nach dem Umlagesystem

Steigende Lebenserwartung, insbesondere der Pensionisten, bereiten den Pensionsversicherungen nach dem Umlageverfahren Schwierigkeiten. Erfahrungsgemäss stossen Beitragserhöhungen durch höhere Umlageprämien ab einer gewissen Höhe auf massiven Widerstand der Mitglieder der Pensionskasse. Leistungssenkungen lassen die Attraktivität der Kasse jedoch sehr stark sinken.

Ein möglicher Weg wäre die Hinaufsetzung des Pensionsalters. Den engeren Zusammenhang zwischen Umlageprämie und Lebenserwartung hat W. Letsch in [1] gezeigt. Die Erhöhung der vollständigen mittleren Lebenserwartung der Neugeborenen  $e_0$  zeigt sich beim  $x$ -jährigen in guter Näherung als Indexverschiebung. Es wird den  $x$ -jährigen die Lebenserwartung der  $(x - \Delta)$ -jährigen zugeordnet.

Legt man die Grundlagen (Schweizerische Sterbetafel) SM/SF 1968/73 [3] zugrunde, wobei für Männer  $x_0 = 25$ ,  $s = 65$  und Frauen  $s = 62$  gelte, so ergibt sich für die Umlageprämie  $\beta$  (siehe [1])

$$\begin{aligned}\beta &= 0,2804 \text{ für Männer} \\ \beta &= 0,4811 \text{ für Frauen}\end{aligned}$$

Legt man die von M. Frischknecht konstruierte «Theoretische Sterbetafel 2101» (siehe [2]) zugrunde, so ergeben sich

$$\begin{aligned}\beta &= 0,6176 \text{ für Männer} \\ \beta &= 0,9176 \text{ für Frauen}\end{aligned}$$

Im folgenden sei die Verminderung der Prämie, die sich durch das Hinaufsetzen auf das Pensionsalter  $s + \Delta$  ergibt, erläutert. Für praktische Zwecke genügt es, den Fall  $\Delta = 1$  zu berechnen, da ja weitere Rekursion möglich ist.

Man erhält nach einfachen Umformungen:

$$\beta_{\Delta=1} = \frac{(e_s - 1)\beta}{e_s + \beta}.$$

Zur Illustration werde das Pensionsalter im vorigen Beispiel um jeweils ein Jahr für Männer auf  $s = 66$  und für Frauen  $s = 63$  erhöht:

Beitragssätze	Männer	Frauen	
$s=65$	0,2804	$s=62$	0,4811
$s=66$	0,2540	$s=63$	0,4439

Für die «Theoretische Sterbetafel 2101» (siehe [2]) muss man das Pensionsalter ca. um 6 Jahre für Männer und um 6 Jahre für Frauen hinaufsetzen, um die Beitragssätze annähernd konstant auf dem Niveau SM/SF 1968/73 zu halten.

Andererseits können ebenfalls Erwägungen einer Herabsetzung des Pensionsalters in Betracht gezogen werden. Dadurch entsteht eine Erhöhung der benötigten Umlageprämie. Wir setzen  $\Delta = -1$  für die Berechnung der Herabsetzung um 1 Jahr, wobei weitere Fälle mittels Rekursion berechnet werden können.

Es ergibt sich leicht:

$$\beta_{\Delta = -1} = \frac{\beta e_{s-1}}{e_{s-1} - 1 - \beta}.$$

Als Beispiel sei wieder SM/SF 1968/73 betrachtet. Vorerst mit  $s=64$  für Männer statt  $s=65$  und  $s=61$  für Frauen statt  $s=62$  ergibt sich

	Männer	Frauen	
$s=65$	0,2804	$s=62$	0,4811
$s=64$	0,3087	$s=61$	0,5205

Weiter sei nun neben einer Reduktion des Pensionsalters eine Erhöhung der Lebenserwartung um 1 Jahr angenommen, so ergibt sich

	Männer	Frauen	
$s=65$	$1,068 \times 0,2804 = 0,2995$	$s=62$	$1,050 \times 0,4811 = 0,5125$
$s=64$	$1,1775 \times 0,2804 = 0,3302$	$s=61$	$1,1375 \times 0,4811 = 0,5473$

Für die Theoretische Sterbetafel 2101 ergibt sich gar

	Männer	Frauen	
$s=65$	0,6176	$s=62$	0,9176
$s=64$	0,6583	$s=61$	0,9714

Es zeigt sich, dass Erhöhungen des Pensionsalters demographische Veränderungen sehr gut ausgleichen können. Es können aber auch sehr grosse finanzielle Probleme für eine Pensionskasse im Umlageverfahren auftreten, wenn eine Reduktion des Pensionsalters bei gleichzeitig steigender mittleren Lebenserwartung vorgenommen wird.

Als Vergleich geben wir die entsprechenden Daten der österr. Verhältnisse mittels ÖVM 70/72 [4]:

	Männer		Frauen
$s=65$	0,2385	$s=62$	0,4414
$s=64$	0,2636	$s=60$	0,5173
$s=60$	0,3831	$s=55$	0,7547
Erhöhung der Lebenserwartung um 1 Jahr			
$s=65$	0,2581	$s=62$	0,4647
$s=64$	0,2823	$s=60$	0,5422
$s=60$	0,4055	$s=55$	0,7846
Erhöhung des Pensionsalters um 1 Jahr bei unveränderter Lebenserwartung			
$s=66$	0,2152	$s=63$	0,4068
$s=65$	0,2385	$s=61$	0,4778
$s=61$	0,3501	$s=56$	0,7011
Erhöhung der Lebenserwartung um 1 Jahr und Erhöhung des Pensionsalters um 1 Jahr als Ausgleich			
$s=66$	0,2337	$s=63$	0,4292
$s=65$	0,2564	$s=61$	0,5021
$s=61$	0,3716	$s=56$	0,7295

Dr. Wolfgang Ettl  
 Univ. Ass. am Institut  
 für Versicherungsmathematik  
 der TU Wien,  
 Gusshausstrasse 27–29  
 1040 Wien

## Literatur

- [1] Letsch, W.: Umlageprämie und Lebenserwartung. Mitteilungen der VSVM, Bd. 79/2 (1979)
- [2] Frischknecht, M.: Mittlere Lebenserwartung der Schweizer und Schweizerinnen nach Generationen-Sterbetafeln. Mitteilungen der VSVM, Bd. 72/2 (1972).
- [3] Eidgenössisches Statistisches Amt: Schweizerische Sterbetafel 1968/73. Statistische Quellenwerke der Schweiz/Heft 559, 1975.
- [4] Statistisches Handbuch für die Republik Österreich, Hrsg.: Österr. Stat. Zentralamt, XXV Jg., Neue Folge, 1974.