Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1980)

Heft: 3

Artikel: Dynamische Darlehenstilgung durch geometrisch steigende Annuitäten

Autor: Laux, Hans / Wohlrabe, Hans-Jürgen

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-571117

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

HANS LAUX und HANS-JÜRGEN WOHLRABE, Ludwigsburg

Dynamische Darlehenstilgung durch geometrisch steigende Annuitäten

I Einleitung

Der Begriff «Dynamik», der ursprünglich aus dem Bereich der Mechanik stammt, hat inzwischen in zahlreichen theoretischen und praktischen Gebieten der Wirtschaft Bedeutung und Anwendung gefunden. So versteht man z. B. in der Lebensversicherung unter «Dynamik» diejenige Form des Lebensversicherungsvertrags, bei der jährlich der Beitrag um einen bestimmten Prozentsatz (in der Bundesrepublik Deutschland z. B. den der Steigerung des Höchstbeitrags zur gesetzlichen Rentenversicherung der Arbeiter und Angestellten) erhöht wird; Sinn dieser Dynamik ist, die Versicherungssumme in ihrem realen Wert – unter Berücksichtigung der Geldentwertung und des wirtschaftlichen Wachstums – zu erhalten.

Ein weiteres Beispiel ist das Sparstadium des Bausparvertrags [1][1]: Hier bedeutet «Dynamik», dass der Bausparbeitrag oder die Bausparsumme in regelmässigen Abständen mit einem bestimmten Prozentsatz angehoben wird, um die Bausparsumme in etwa mit der Entwicklung der Bau- und Bodenpreise mitwachsen zu lassen [2].

In jüngerer Zeit sind auch für den Bereich der Darlehenstilgung dynamische Modelle entwickelt worden. Das bereits praktizierte Modell einer Grossbank im Bereich der Baufinanzierung geht z. B. von einer Anfangsrate aus, die nur die Zinsleistung und keine Tilgungsleistung enthält. Jahr für Jahr wird dann diese Anfangsrate um einen festen Prozentsatz (z. B. 2%) erhöht; der Zinssatz ist für 10 Jahre festgeschrieben.

Den dynamischen Modellen liegt folgender Gedanke zugrunde: Die übliche Form der Darlehenstilgung, die jährlich (nominal) gleichbleibende Zins- und Tilgungsraten (Annuitäten) vorsieht, weist real (bezogen auf ein steigendes Einkommen) zu Beginn die höchste Belastung auf. Das bedeutet gerade für die ersten ohnehin schwierigen Jahre der Finanzierung des Hausbaus oder -kaufs ein oftmals schwer einzuschätzendes Risiko. Mit Hilfe der Dynamik soll dagegen die Rückzahlungsbelastung anfänglich gesenkt und später ange-

[1] Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis und Anmerkungen am Ende der Arbeit.

hoben werden und damit in einem ausgewogeneren Verhältnis zur Einkommensentwicklung stehen.
Ziel der vorliegenden Untersuchung ist, die Formen und Möglichkeiten einer dynamischen Darlehenstilgung darzustellen. Dabei werden die Voraussetzungen zunächst möglichst allgemein gehalten, um einen systematischen Überblick zu gewinnen. In Abschnitt II wird der Ausgangspunkt hergeleitet; die erforderlichen Fallunterscheidungen folgen in Abschnitt III und Fragen der Anwendbarkeit für die Praxis in Abschnitt IV. Einige numerische Beispiele [3] schliessen die Arbeit ab (Abschnitt V).

II Ausgangspunkt

Für ein Darlehen D_0 wird ein Zinssatz i festgelegt. Die jährlich nachschüssig zu zahlenden Rückzahlungsraten beginnen mit einer Anfangsrate R, die Jahr für Jahr mit einem Progressionssatz p (auf die Vorjahresrate) fortgeschrieben wird. Der Darlehensstand D_1 nach 1 Jahr beträgt dann

$$D_1 = D_0(1+i) - R, \tag{1}$$

der Darlehensstand D_2 nach 2 Jahren

$$D_2 = D_1(1+i) - R \cdot (1+p) \tag{2}$$

und allgemein der Darlehensstand D_t nach t Jahren

$$D_t = D_{t-1}(1+i) - R \cdot (1+p)^{t-1}. \tag{3}$$

Die Rekursion führt zu der expliziten Formel

$$D_t = D_0(1+i)^t - R \cdot \sum_{k=1}^{t} (1+i)^{k-1} \cdot (1+p)^{t-k}. \tag{4}$$

Allgemein gilt

$$(x-y) \cdot \sum_{k=1}^{t} x^{k-1} \cdot y^{t-k} = x^t - y^t \quad (t \in \mathbb{N}), \tag{5}$$

so dass (4) wie folgt umgeformt werden kann:
Für $p \neq i$:

$$D_t = D_0(1+i)^t - \frac{R}{i-p}((1+i)^t - (1+p)^t) \tag{6}$$

oder

$$D_t = \left(D_0 - \frac{R}{i-p}\right)(1+i)^t + \frac{R}{i-p}(1+p)^t, \tag{7}$$

für $p=i$:

$$D_t = D_0(1+i)^t - R \cdot t \cdot (1+i)^{t-1} = (1+i)^{t-1}\,(D_0(1+i) - R \cdot t). \tag{8}$$

Es soll nun untersucht werden, welche Kombinationen von R und p zu einer Tilgung führen und wie sich der jeweilige Darlehensstand entwickelt.

III Formen der dynamischen Darlehenstilgung

1 Definition der allgemeinen Funktion

Geht man davon aus, dass das Darlehen $D_0 > 0$ und der Zinssatz $i \geq 0$ festgelegt sind, so ist laut (4) der Darlehensstand nach t Jahren abhängig von t, R und p. Es soll $R > 0$ vorausgesetzt werden und (um auch Extremfälle zu erfassen) $p \geq -1$. Für die mathematische Untersuchung ist es zweckmässig, sich nicht auf die für die Praxis relevanten ganzzahligen und positiven Werte für t zu beschränken, sondern Funktionen D und $\hat{D}$ zu definieren (aus (7) bzw. (8)):

$$D: \mathbb{R}_+ \times \{[-1, \infty) \setminus \{i\}\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$D(R, p, t) := \left(D_0 - \frac{R}{i-p}\right)(1+i)^t + \frac{R}{i-p}(1+p)^t \tag{9}$$

und

$$\hat{D}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\hat{D}(R, t) := D_0(1+i)^t - R \cdot t \cdot (1+i)^{t-1} \tag{10}$$

D ist für $p=i$ nicht definiert; die Untersuchung des Falls $p=i$ wird jedoch erleichtert durch

$$\lim_{p \to i} D(R, p, t) = \hat{D}(R, t) \tag{11}$$

für alle $R > 0$ und $t \in \mathbb{R}$.

Beweis von (11): Nach den Regeln von de l'Hospital gilt

$$\lim_{p \to i} \frac{(1+p)^t - (1+i)^t}{i-p} = -t \cdot (1+i)^{t-1}.$$

Daraus folgt (11).

Sollen einzelne Variable von D bzw. $\hat{D}$ mit einem festen Wert belegt werden, so werden die entsprechenden Funktionen mit $D_{(R,p)}(t)$, $\hat{D}_{(R)}(t)$ usw. bezeichnet.

2 *Verlauf des Darlehensstands für $p \neq i$*

Es seien $R>0$ und $p \geq -1$, aber $p \neq i$ vorgegeben. Welchen Verlauf nimmt die den jeweiligen Darlehensstand kennzeichnende Funktion $D_{(R,p)}(t)$?
Für $p \neq i$ lässt sich mit den Bezeichnungen

$$a := D_0 - \frac{R}{i-p},\ b := \frac{R}{i-p},\ u := 1+i,\ v := 1+p \tag{12}$$

$D_{(R,p)}(t)$ schreiben in der Form

$$D_{(R,p)}(t) = a \cdot u^t + b \cdot v^t \tag{13}$$

mit

$$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ u \geq 1,\ v \geq 0. \tag{14}$$

Fall 1: $v=0$

Dies ist gleichbedeutend mit $p=-1$; eine Tilgung ist nur möglich, wenn $a \leq 0$, also $R \geq D_0(1+i)$ ist. Betrachtet man nur ganzzahlige Werte für t, so ist $R = D_0(1+i)$ und die Laufzeit 1 Jahr.

Fall 2: $v>0$

In diesem Fall ist $D_{(R,p)}(t)$ beliebig oft differenzierbar. Für die k-te Ableitung ($k \geq 0$) gilt:

$$D^{(k)}_{(R,p)}(t) = a \cdot u^t \cdot (\ln u)^k + b \cdot v^t \cdot (\ln v)^k. \tag{15}$$

Fall 2.1:

a) Sei $a \cdot b < 0$, d.h., a und b haben unterschiedliche Vorzeichen.
Dann ist

$$\lim_{t \to \infty} D_{(R,p)}(t) = \left\{ \begin{matrix} a \text{ für } u=1 \text{ und } v<1 \\ -\infty \text{ sonst} \end{matrix} \right\} \tag{16}$$

Beweis: Sei zunächst $a>0$, $b<0$.
Aus (12) folgt: $p>i$, also $v>u \geq 1$.
Wie man leicht sieht, wächst dann $b \cdot v^t$ «schneller» gegen $-\infty$ als $a \cdot u^t$ gegen $+\infty$ für $u>1$ (für $u=1$ ist $\lim\limits_{t \to \infty} a \cdot u^t = a$)

$$\text{Also gilt:}\quad \lim_{t \to \infty} D_{(R,p)}(t) = -\infty.$$

Wenn andererseits $a<0$ und $b>0$ ist, so folgt aus (12): $p<i$, also $u>v$. Für $u>1$ wächst $a \cdot u^t$ «schneller» gegen $-\infty$ als $b \cdot v^t$ gegen $+\infty$ für $v>1$ (für $v=1$ bzw. $v<1$ ist $\lim\limits_{t\to\infty} b \cdot v^t=1$ bzw. 0).

$$\text{Also gilt:} \quad \lim_{t\to\infty} D_{(R,p)}(t)=-\infty.$$

Für $u=1$ ist $v<1$ und $\lim\limits_{t\to\infty} D_{(R,p)}(t)=a<0$.

Fall 2.1 bedeutet also:

Wenn $a>0$ und $b<0$, also $p>i$
oder wenn $a<0$ und $b>0$, also $p<i$ und $R>D_0(i-p)$
ist, führt die Ratenzahlung zur Tilgung.

b) Zur näheren Untersuchung von $D_{(R,p)}(t)$ werden die Nullstellen der k-ten Ableitungen ($k\geq 0$) bestimmt:
Nach (15) ist

$$D^{(k)}_{(R,p)}(t_{(k)})=0 \Leftrightarrow \left(\frac{v}{u}\right)^{t(k)}=-\frac{a\cdot(\ln u)^k}{b\cdot(\ln v)^k}$$

$$\text{(sofern } k=0 \text{ ist für } v=1) \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow t_{(k)}\cdot\ln\left(\frac{v}{u}\right)=\ln\left(-\frac{a\cdot(\ln u)^k}{b\cdot(\ln v)^k}\right)$$

$$\text{(sofern } k=0 \text{ oder gerade ist für } v<1 \text{ bzw. } k=0 \text{ ist für } u=1) \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow t_{(k)}=\frac{\ln\left(-\frac{a\cdot(\ln u)^k}{b\cdot(\ln v)^k}\right)}{\ln\left(\frac{v}{u}\right)} \tag{19}$$

Insbesondere gilt also, falls $v>1$ (also $p>0$) ist:

$$t_{(k+1)}=t_{(k)}-\frac{\ln\ln(1+i)-\ln\ln(1+p)}{\ln(1+i)-\ln(1+p)} \tag{20}$$

(17) bis (20) bringen innerhalb von Fall 2.1 folgendes Ergebnis:
Für $0<v<1$ (also $p<0$) *und* $u\neq 1$ existieren genau eine Nullstelle und genau ein Wendepunkt für $D_{(R,p)}(t)$, jedoch keine Extremwerte.
Für $v=1$ (also $p=0$) *oder* $u=1$ (also $i=0$) existiert genau eine Nullstelle für $D_{(R,p)}(t)$, jedoch kein Extremwert und kein Wendepunkt.

Für $v > 1$ (also $p > 0$) *und* $u \neq 1$ existieren genau eine Nullstelle, genau ein Maximum und genau ein Wendepunkt für $D_{(R,p)}(t)$. Diese Punkte liegen äquidistant; der Abstand ist symmetrisch in p und i und hängt nicht von R ab.

c) Die Nullstelle von $D_{(R,p)}(t)$ bestimmt die *Laufzeit des Darlehens:*

$$t_{(0)} = \frac{\ln\left(\frac{D_0(p-i)}{R}+1\right)}{\ln\left(\frac{1+p}{1+i}\right)} \tag{21}$$

Es gilt stets: $t_{(0)} > 0$.
Für die Praxis muss natürlich genauer gesagt werden:

$$\text{Laufzeit} = [t_{(0)}] + 1,$$

wobei $[t_{(0)}]$ die grösste ganze Zahl $< t_{(0)}$ bezeichnet und die letzte Rate in der Regel eine Restrate ist.
$t_{(0)}$ nimmt mit wachsendem Progressionssatz bzw. mit wachsender Anfangsrate ab und mit wachsendem Zinssatz zu.
Aus (21) folgt noch:

$$t_{(0)} \to \infty \quad \begin{cases} \text{für } R \to 0 & \text{falls } p > i \\ \text{für } R \to D_0(i-p) & \text{falls } p < i. \end{cases}$$

Entsprechendes gilt wegen (20) auch für $t_{(1)}$ und $t_{(2)}$ (dies ist natürlich nur von theoretischem Interesse).

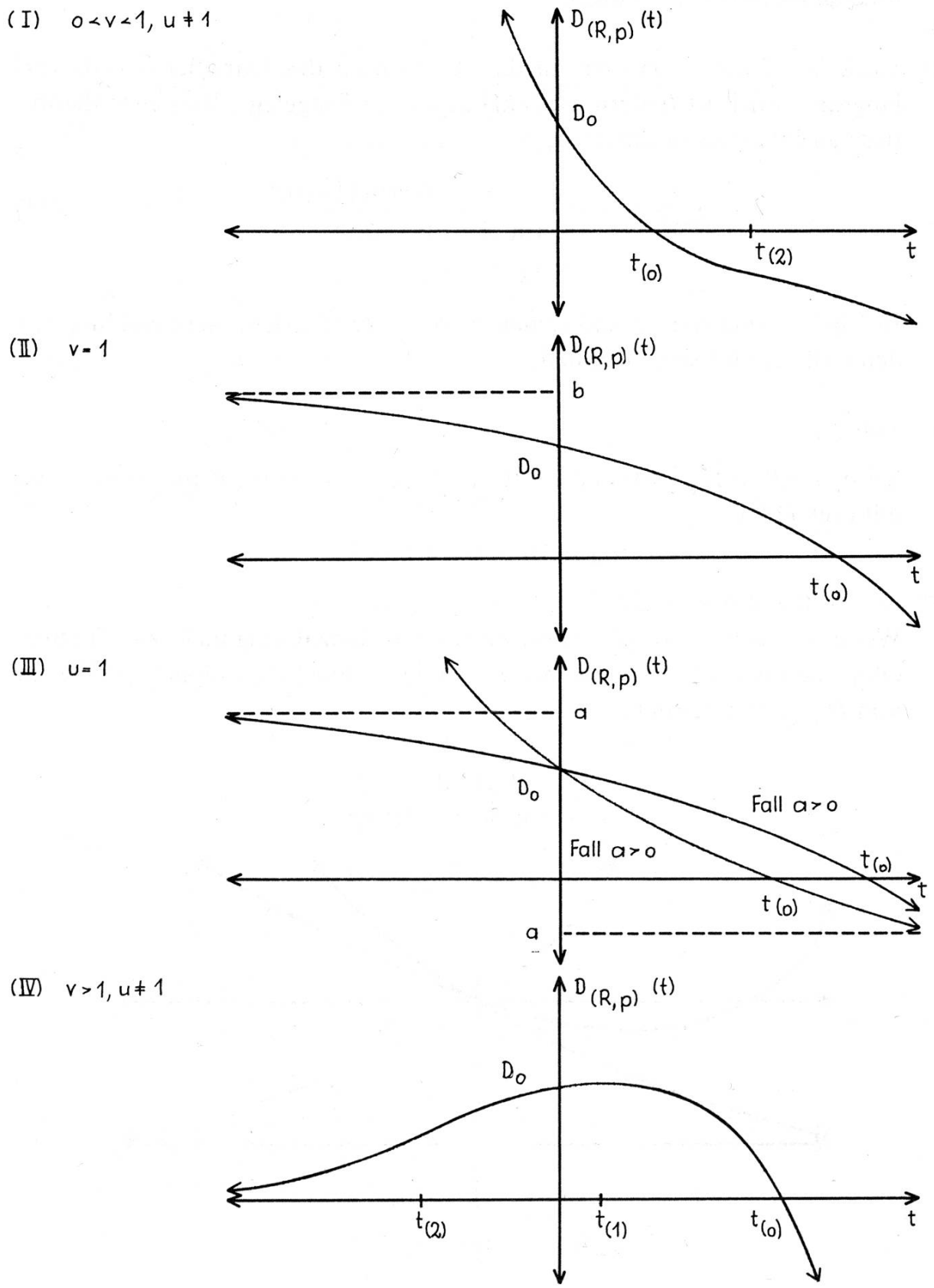
d) Der *höchste Darlehensstand* wird erreicht bei

$$t_{\max} = \max\,(0;\, t_{(1)}), \tag{22}$$

$$\text{wobei } t_{(1)} = \frac{\ln\left(\left(\frac{D_0(p-i)}{R}+1\right)\cdot\frac{\ln(1+i)}{\ln(1+p)}\right)}{\ln\left(\frac{1+p}{1+i}\right)} \tag{23}$$

ist (sofern $t_{(1)}$ existiert).
Für die Praxis lässt sich zunächst nur sagen, dass der höchste Darlehensstand – falls $t_{\max}$ nicht selber ganzzahlig ist – bei $[t_{\max}]$ oder $[t_{\max}]+1$ angenommen wird; zur genauen Entscheidung müssen $D_{(R,p)}([t_{\max}])$ und $D_{(R,p)}([t_{\max}]+1)$ berechnet werden. Im allgemeinen ist der ganzzahlige Wert zutreffend, dem $t_{\max}$ am nächsten liegt.

Figur 1
Formen des Tilgungsablaufs



t_{max} und der höchste Darlehensstand nehmen mit wachsender Anfangsrate bzw. (für $t_{max} \geq 1$) mit wachsendem Progressionssatz ab und (für $t_{max} \geq 1$) mit wachsendem Zinssatz zu.

e) Derjenige Punkt, von dem an das Anwachsen des Darlehensstands verlangsamt wird, ist (sofern existent) durch $t_{(2)}$ festgelegt. Von eher theoretischem Interesse ist die Aussage

$$t_{(k)} > 0 \Leftrightarrow R < \frac{D_0(p-i) \cdot (\ln(1+i))^k}{(\ln(1+p))^k - (\ln(1+i))^k}. \quad \text{für } k = 1,2 \tag{24}$$

In Figur 1 sind die verschiedenen Formen der Darlehensentwicklung für den Fall 2.1 grafisch dargestellt.

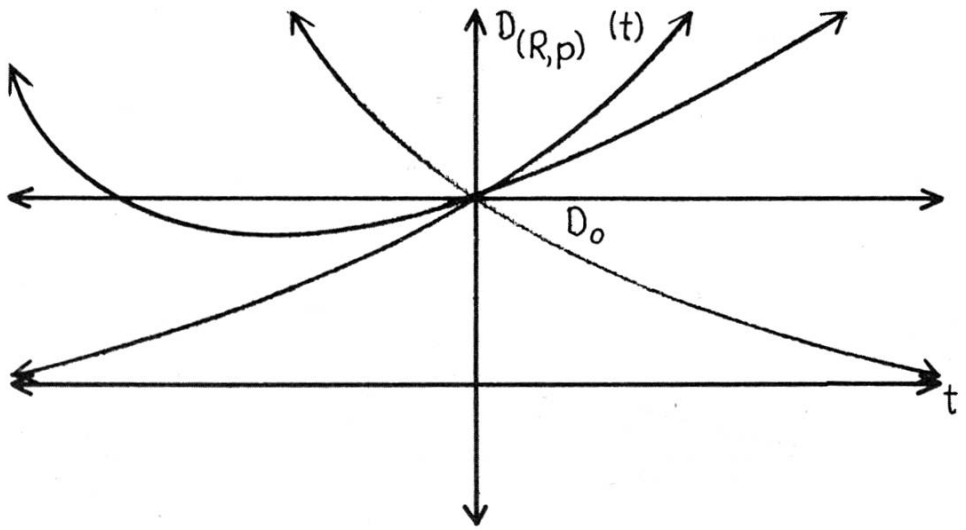
Fall 2.2:

Sei $a \cdot b \geq 0$, d.h., $b > 0$ und $a \geq 0$ ($b < 0$ *und* $a \leq 0$ ist nicht möglich); dann gilt (vgl. (13)):

$$D_{(R,p)}(t) > 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet nach (12):
Wenn $p < i$ *und* $R \leq D_0(i-p)$ ist, führt die Ratenzahlung nicht zur Tilgung. Ohne die Einzelfälle zu untersuchen, sind in Figur 2 die möglichen Formen von $D_{(R,p)}(t)$ dargestellt.

Figur 2
Formen ohne Tilgung



3 *Verlauf des Darlehensstands für $p=i$*

Nunmehr wird die Voraussetzung $p \neq i$ aufgegeben. Für den *Fall* $p=i$ folgt aus (11) und den Ergebnissen von Fall 2.1:
Für $p=i$ führt jedes $R>0$ zur Tilgung.
Mit (20) und (21) gilt im Fall 2.1 für die Nullstellen der k-ten Ableitung von $D_{(R,p)}(t)$:

$$t_{(k)}^{(R,p)} = \frac{\ln\left(\frac{D_0(p-i)}{R}+1\right)}{\ln\left(\frac{1+p}{1+i}\right)} - k \cdot \frac{\ln\ln(1+i) - \ln\ln(1+p)}{\ln(1+i) - \ln(1+p)} \tag{25}$$

($t_{(k)}$ in Abhängigkeit von R und p).

Nun gilt für jedes $R>0$ und $k \geq 0$:

$$\lim_{p \to i} t_{(k)}^{(R,p)} = \frac{D_0(1+i)}{R} - \frac{k}{\ln(1+i)} =: t_{(k)}^{(R)} \tag{26}$$

Beweis: Nach den Regeln von de l'Hospital ist

$$\lim_{p \to i} t_{(k)}^{(R,p)} = \frac{\lim\limits_{p \to i}\left(\frac{R}{D_0(p-i)+R} \cdot \frac{D_0}{R}\right)}{\lim\limits_{p \to i}\left(\frac{1+i}{1+p} \cdot \frac{1}{1+i}\right)} - k \cdot \frac{\lim\limits_{p \to i}\left(\frac{1}{\ln(1+p)} \cdot \frac{1}{1+p}\right)}{\lim\limits_{p \to i} \frac{1}{1+p}}$$

$$= \frac{D_0(1+i)}{R} - \frac{k}{\ln(1+i)} \Rightarrow (26).$$

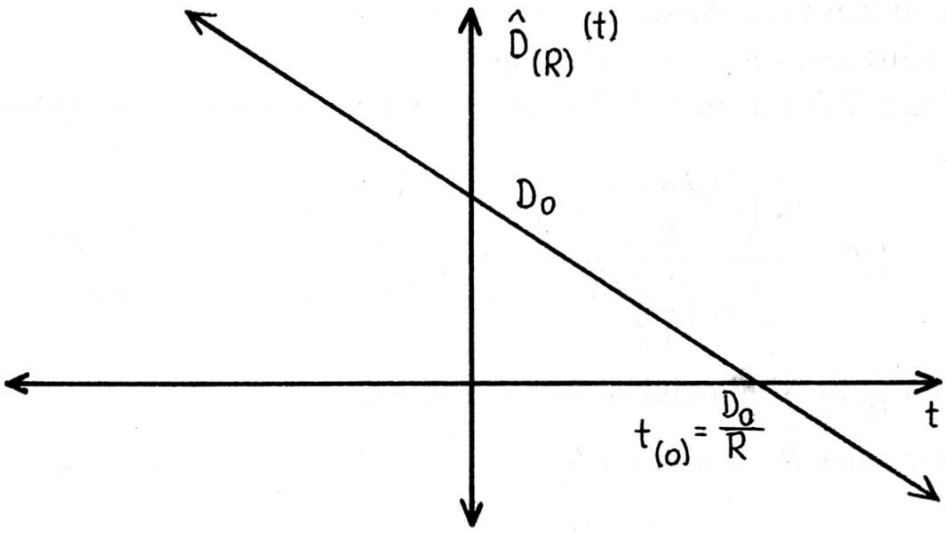
Aus (11) und (15) folgt:

$$\lim_{p \to i} D_{(R,p)}^{(k)}(t) = \hat{D}_{(R)}^{(k)}(t) \quad \text{für alle} \quad R>0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

wobei (k) die k-te Ableitung kennzeichnet ($k \geq 0$). Hierbei wird die Tatsache eingesetzt, dass für jede Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \to i$ die Funktionenfolge $(D_{(R,p_n)}^{(k)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ auf kompakten Intervallen gleichmässig konvergiert.
Aus (26) und (27) erhält man leicht:

$$\hat{D}_{(R)}^{(k)}(t_{(k)}^{(R)}) = 0 \text{ für } k \geq 0,\ R>0. \tag{28}$$

Figur 3
Fall $i=p=0$.



Für $i>0$ ist damit IV von Figur 1 zutreffend, wobei $t_{(0)}$, $t_{(1)}$ und $t_{(2)}$ durch (26) festgelegt sind und der Abstand dieser Punkte vom jeweils folgenden $\frac{1}{\ln(1+i)}$ beträgt. Für $i=0$ gilt Figur 3.
Insgesamt ordnet sich damit der Fall $p=i$ ganz in den Fall 2.1 ein.

4 *Zwischenergebnis*

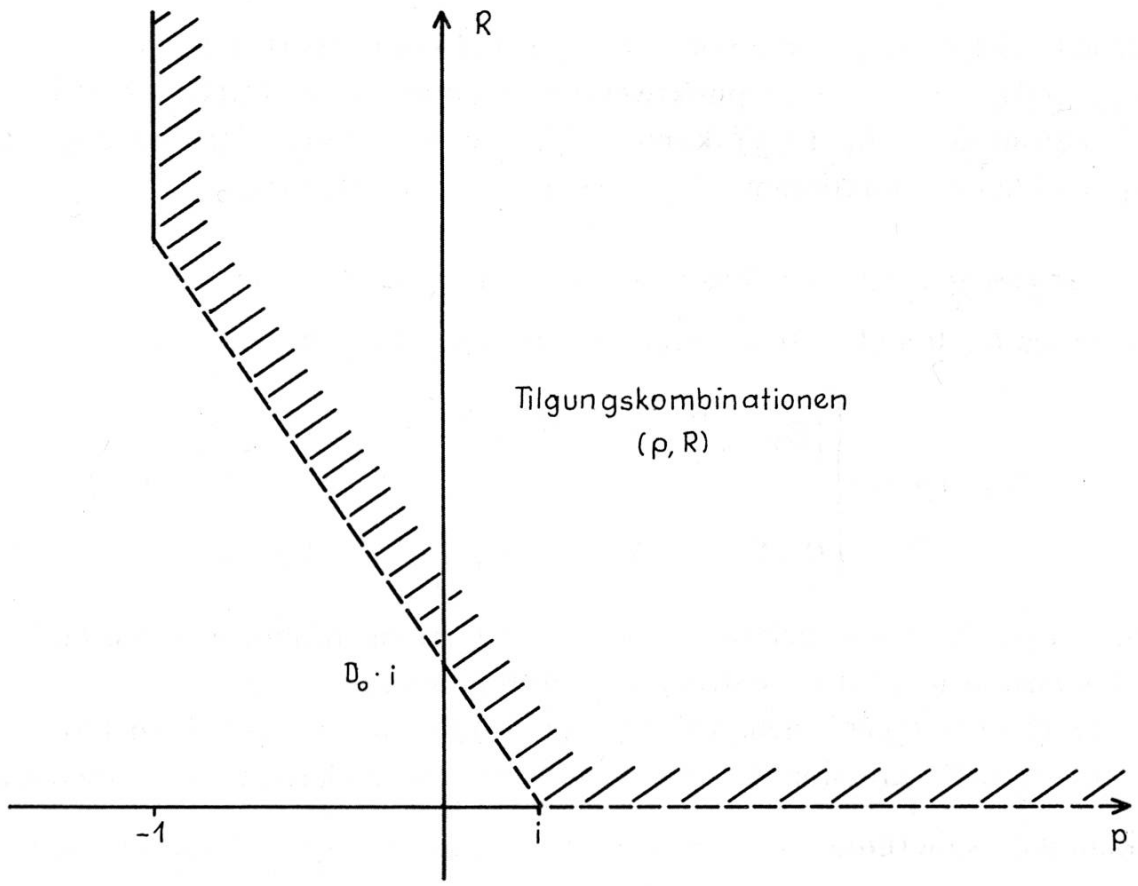
Fasst man nun alle Fälle zusammen, erhält man folgende *Übersicht:*
Wenn $R>\max(0;\ D_0(i-p))$ (bzw. für $p=-1: R\geq D_0(i-p)$) ist, führt die Ratenzahlung zur Tilgung. Der Verlauf des Darlehensstands wird für $p>-1$ durch die Figuren 1 und 3 gekennzeichnet.
In den sonstigen Fällen führt die Ratenzahlung nicht zur Tilgung (Figur 2 für $p>-1$).
Der Tilgungsfall ist also durch die in Figur 4 dargestellten Kombinationen von R und p gekennzeichnet (die gestrichelten Linien zählen nicht mit).

5 *Abhängigkeit des Darlehensstands von der Anfangsrate*

Für festes $p>-1$ und $t>0$ gilt nach (9) und (10) folgende Aussage:

$$D_{(p,t)}(R)=\left(D_0-\frac{R}{i-p}\right)(1+i)^t+\frac{R}{i-p}(1+p)^t \quad (\text{falls } p\neq i)$$

Figur 4
Kombinationen von Anfangsrate R und Progressionssatz p, die zur Tilgung führen.



bzw.

$$\hat{D}_{(t)}(R) = D_0(1+i)^t - R \cdot t \cdot (1+i)^{t-1} \qquad \text{(falls } p=i\text{)}$$

sind lineare, streng monoton fallende Funktionen von R.
Will man zu vorgegebenem $p > -1$ und einer gewünschten Laufzeit t die passende Anfangsrate R bestimmen, so gilt:

$$p \neq i\colon D_{(p,t)}(R) = 0 \Leftrightarrow R = \frac{D_0(1+i)^t \cdot (i-p)}{(1+i)^t - (1+p)^t} \tag{29}$$

$$p = i\colon \hat{D}_{(t)}(R) = 0 \Leftrightarrow R = \frac{D_0(1+i)}{t}. \tag{30}$$

Betrachtet man den Verlauf des Darlehensstands in Abhängigkeit von R, so ist nach den Ergebnissen von Kapitel III 2 und obigem für festes $p < i$ die Rate $\hat{R} = D_0(i-p)$ die grösste Rate, die nicht zur Tilgung führt. Die den Verlauf

des Darlehensstands kennzeichnende Funktion $D_{(\hat{R},p)}(t)$ hat wegen $\frac{\hat{R}}{i-p}=D_0$ folgendes Aussehen:

$$D_{(\hat{R},p)}(t)=D_0(1+p)^t. \tag{31}$$

Für jede Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die von oben gegen $\hat{R}$ konvergiert, gilt: $(D_{(R_n,p)}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise von unten gegen $D_0(1+p)^t$, d.h., die «Grenzfunktion» $D_0(1+p)^t$ kann auf kompakten Intervallen beliebig nahe durch «Tilgungsfunktionen» $D_{(R,p)}(t)$ approximiert werden.

6 *Abhängigkeit des Darlehensstands vom Progressionssatz*

Für festes $R>0$ und $t>0$ ist durch (9), (10) und (11) mit

$$D_{(R,t)}(p):=\begin{cases}\left(D_0-\frac{R}{i-p}\right)(1+i)^t+\frac{R}{i-p}(1+p)^t & \text{für } -1<p\neq i\\ D_0(1+i)^t-R\cdot t\cdot(1+i)^{t-1} & \text{für } p=i\end{cases}$$

eine stetige Funktion definiert, die für $t<1$ streng monoton wachsend, für $t=1$ konstant und für $t>1$ streng monoton fallend ist.
Soll zu einer vorgegebenen Anfangsrate R und einer gewünschten Laufzeit t der passende Progressionssatz p bestimmt werden, so kann dies mit einem der bekannten Näherungsverfahren geschehen (mit $x:=\frac{1+p}{1+i}$ stellt sich das gesuchte p dar als eindeutig bestimmte positive reellle Nullstelle des Polynoms

$$\begin{aligned}P(x):&=\frac{x^t-1}{x-1}-\frac{D_0(1+i)}{R}\\ &=x^{t-1}+x^{t-2}+\ldots+x+1-\frac{D_0(1+i)}{R}\quad (t\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Zusammen mit den Ergebnissen von Kapitel III 2 ist für festes $R\leq D_0(1+i)$ der Progressionssatz $\hat{p}=i-\frac{R}{D_0}$ der grösste, der nicht zur Tilgung führt. $D_{(R,\hat{p})}(t)$ hat dann folgende Form:

$$D_{(R,\hat{p})}(t)=D_0\left(1+i-\frac{R}{D_0}\right)^t. \tag{32}$$

Mit jeder Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die von oben gegen $\hat{p}$ konvergiert, konvergiert dann die Funktionenfolge $(D_{(R,p_n)}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise (für $t<1$ von oben, für $t>1$

von unten) gegen $D_0\left(1+i-\frac{R}{D_0}\right)^t$; diese «Grenzfunktion» kann also auf kompakten Intervallen beliebig nahe durch «Tilgungsfunktionen» $D_{(R,p)}(t)$ angenähert werden, wie auch schon in Kapitel 5 festgestellt wurde.

7 *Abhängigkeit des Darlehensstands vom Zinssatz*

Betrachtet man den Darlehensstand nur in Abhängigkeit von i (also mit festem $R>0$, $p>-1$ und $t>0$), so gilt:

$$\text{Die Funktion } D_{(R,p,t)}(i)=\begin{cases}\left(D_0-\frac{R}{i-p}\right)(1+i)^t+\frac{R}{i-p}(1+p)^t & \text{für } i\neq p\\ D_0(1+p)^t-R\cdot t\cdot(1+p)^{t-1} & \text{für } i=p\end{cases}$$

ist eine stetige und streng monoton wachsende Funktion.

Der Zinssatz $\hat{\imath}=p+\frac{R}{D_0}$ ist der kleinste, der nicht zur Tilgung führt. Die entsprechende «Grenzfunktion» hat folgendes Aussehen:

$$D_{(R,p,\hat{\imath})}(t)=D_0\left(1+\hat{\imath}-\frac{R}{D_0}\right)^t. \tag{33}$$

Mit jeder Folge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die von unten gegen $\hat{\imath}$ konvergiert, konvergiert dann die Funktionenfolge $(D_{(R,p,i_n)}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise von unten gegen die Grenzfunktion.

8 *Verlauf des Darlehensstands bei fester Anfangstilgung*

Bezeichnet

$$K:=R-D_0\cdot i \tag{34}$$

die Anfangstilgung, so lässt sich die den Darlehensstand kennzeichnende Funktion D in folgender Form schreiben:

$$D(K,p,t)=\begin{cases}\frac{K+D_0\cdot i}{i-p}(1+p)^t-\frac{K+D_0\cdot p}{i-p}(1+i)^t & \text{für } i\neq p\\ (1+i)^{t-1}\left(D_0(1+(1-t)i)-K\cdot t\right) & \text{für } i=p\end{cases} \tag{35}$$

Bei festem K ist $D(K,p,t)$ symmetrisch in i und p. $K=-D_0\cdot p$ ist die niedrigste Anfangstilgung, die nicht zur Tilgung insgesamt führt.

Für die Laufzeit bzw. den maximalen Darlehensstand gilt nach (21) bzw. (23) sowie (26):

$$t_{(k)}=\frac{\ln\left(\left(\frac{D_0\cdot p+K}{D_0\cdot i+K}\right)\cdot\frac{(\ln(1+i))^k}{(\ln(1+p))^k}\right)}{\ln\left(\frac{1+p}{1+i}\right)}\qquad k\in\{0,1\},\ i\neq p$$

bzw.

$$t_{(k)}=\frac{D_0\cdot i+D_0}{D_0\cdot i+K}-\frac{k}{\ln(1+i)}\qquad k\in\{0,1\},\ i=p$$

Bei festem K

fällt $t_{(k)}$ mit wachsendem i

fällt $t_{(k)}$ mit wachsendem p.

Bei festem i und p fällt $t_{(k)}$ mit wachsendem K.

IV Anwendungsmöglichkeiten der dynamischen Darlehenstilgung

In Abschnitt III wurden sämtliche Möglichkeiten der dynamischen Darlehenstilgung ausgelotet. Für die Praxis ist indes nur ein Teil dieser Formen interessant.

1 *Abschreibung*

Natürlich fällt die Abschreibung nicht unter den Begriff der dynamischen Darlehenstilgung im engeren Sinne. Interpretiert man jedoch das Darlehen D_0 als Anschaffungswert (gegebenenfalls vermindert um den Restwert) und setzt den Zinssatz $i=0$, so ergeben sich folgende Methoden der Abschreibung:

a) $p=0$
Dies ist die Form der *linearen Abschreibung*; zutreffend ist Figur 3.

b) $p>0$
Für diese Form der *progressiven Abschreibung* trifft wegen
$a=D_0-\frac{R}{i-p}=D_0+\frac{R}{p}>0$ III von Figur 1 (Fall $a>0$) zu.

c) $-1<p<0$
Hier liegt die *geometrisch-degressive Abschreibung* vor, wobei
$R=-p\cdot D_0$, also $a=D_0-\frac{R}{i-p}=0$ gilt. Es trifft Figur 2 zu mit der positiven Abszisse als Asymptote.

2 *Kreditbereich*

Hier liegt wohl das Hauptanwendungsgebiet der dynamischen Tilgung, wobei nur ein positiver Progressionssatz p eine Rolle spielt. Von den Kombinationsmöglichkeiten der Anfangsrate R und des Progressionssatzes p, die zur Tilgung führen, sind sicherlich zunächst diejenigen unbedenklich, bei denen $R \geq D_0 \cdot i$ und der Progressionssatz so bemessen ist, dass die Laufzeit eine geschäftspolitisch gewünschte Dauer nicht überschreitet.
Sobald $R < D_0 \cdot i$ ist, wird ein zusätzliches Darlehen gegeben; es muss dann geprüft werden, ob dies zu den gleichen Konditionen möglich ist wie beim ursprünglichen Darlehen D_0. Insbesondere muss beachtet werden, dass der Zinssatz im allgemeinen nur für einen begrenzten Zeitraum festgelegt werden kann und auch bei Erhöhung des Zinssatzes die Laufzeit überschaubar bleiben muss. Das in Abschnitt III entwickelte mathematische Instrumentarium erlaubt es, auch die voraussichtliche oder geschätzte Entwicklung des Zinssatzes einzubeziehen.
Aus der Sicht des Kunden bietet die dynamische Tilgung vorwiegend Vorteile; wichtig ist für ihn jedoch, dass Entwicklung und Dauer der Belastungen deutlich zu ersehen sind. Freizügigkeit kann insoweit gegeben sein, wie der durch die Anfangsrate und den Progressionssatz festgelegte Tilgungsplan als Mindestforderung eingehalten wird.

3 *Bausparen*

Für das Bausparen gilt zwar generell auch das im vorstehenden Kapitel 2 Gesagte, jedoch muss einer Bausparkasse wegen der Funktionstüchtigkeit des kollektiven Systems weitaus mehr daran gelegen sein, dass die Zins- und Tilgungsleistungen zügig und in möglichst gleichbleibender Höhe der Zuteilungsmasse zufliessen. Wenn man auf Dauer eine Verlängerung der Wartezeit bis zur Zuteilung der Bausparsummen vermeiden will, ist es unmöglich, über die tarifliche Tilgungszeit hinauszugehen. Mehr noch, da im (statischen) Beharrungszustand [4] die Darlehenssumme bei dynamischer Tilgung die Darlehenssumme bei tariflicher Tilgung nicht überschreiten darf, muss die dynamische Darlehenstilgung sogar mit einer kürzeren Tilgungszeit einhergehen. Innerhalb des durch die Forderung gleichhoher Darlehenssummen gegebenen Rahmens könnte jedoch durchaus eine dynamische Tilgung ermöglicht werden, sofern sich dadurch – abgesehen von einem Anlaufeffekt bei Einführung einer solchen Tilgungsform mit geringfügiger Wartezeitverlängerung – global die Entwicklung der Zuteilungsmasse nicht verändert. Dabei werden den Kombi-

nationsmöglichkeiten von Anfangsrate und Progressionssatz ziemlich enge Grenzen gesetzt sein; insbesondere dürfte ein Anwachsen des Darlehens über den Anfangsstand hinaus angesichts der hohen Anfangstilgungssätze für Bauspardarlehen und der geschilderten Wartezeitproblematik ausgeschlossen sein. Die Verwirklichung einer begrenzten Auswahl von Kombinationsmöglichkeiten für die dynamische Tilgung von Bauspardarlehen erscheint aber, wie an anderer Stelle schon beschrieben wurde [5], als durchaus realisierbar.

V Numerische Beispiele

In der Tabelle 1 ist die Entwicklung des Darlehensstands bei einem Zinssatz von 8%, Anfangsraten R von 6; 7; 8 und 9% (des Anfangsdarlehens) sowie verschiedenen Progressionssätzen dargestellt.
Die Figuren 5 und 6 geben für einen Zinssatz von 8% zum einen den Kurvenverlauf bei festem p (=4%) und variablem R (=4; 5; 6; 7; 8 und 9%), zum anderen bei festem R (=7%) und variablem p (=1; 2; 4; 6 und 8%) wieder. Tabelle 2 weist für verschiedene Kombinationen von Anfangsrate, Progressionssatz und Zinssatz die nach Formel (21) bzw. (26) berechneten Laufzeiten aus. In Tabelle 3 sind die nach Formel (23) bzw. (26) berechneten maximalen Darlehensstände nach Zeitpunkt und Höhe aufgeführt.

Dr. Hans Laux und Dr. Hans-Jürgen Wohlrabe
Wüstenrot Lebensversicherungs-AG.
Im Tambour 2
D 7140 Ludwigsburg

Literatur

[1] Laux, H.: Die Bausparfinanzierung. Die finanziellen Aspekte des Bausparvertrages als Spar- und Kreditinstrument, 4. Auflage 1976, 279 Seiten, Verlagsgesellschaft Recht und Wirtschaft mbH, Heidelberg.

[2] Laux, H.: Chancen und Grenzen eines dynamischen Bausparvertrages, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, April 1978, Band XIII, S. 231–248, und Der dynamische Bausparvertrag, Sonderbeilage des Betriebs-Beraters Nr. 6/79 vom 20.5.1979.

[3] Weitere Beispielsfälle finden sich in dem Aufsatz von Laux, H.: Dynamische Darlehenstilgung in Der Langfristige Kredit vom 15.4.1979 S. 234.

[4] Laux, H.: Das kollektive Bausparen. Neuere Untersuchungen und zusammenfassende Darstellung zur Technik und Mathematik des deutschen Bausparens, 1973, 352 Seiten, Verlagsgesellschaft Recht und Wirtschaft mbH, Heidelberg.

[5] vgl. Laux, H.: Die Bedeutung des Tilgungsaufkommens im Bausparen: Dynamischer Tilgungsbeitrag für Bauspardarlehen? in Der Langfristige Kredit vom 15.10.1979 S. 634.

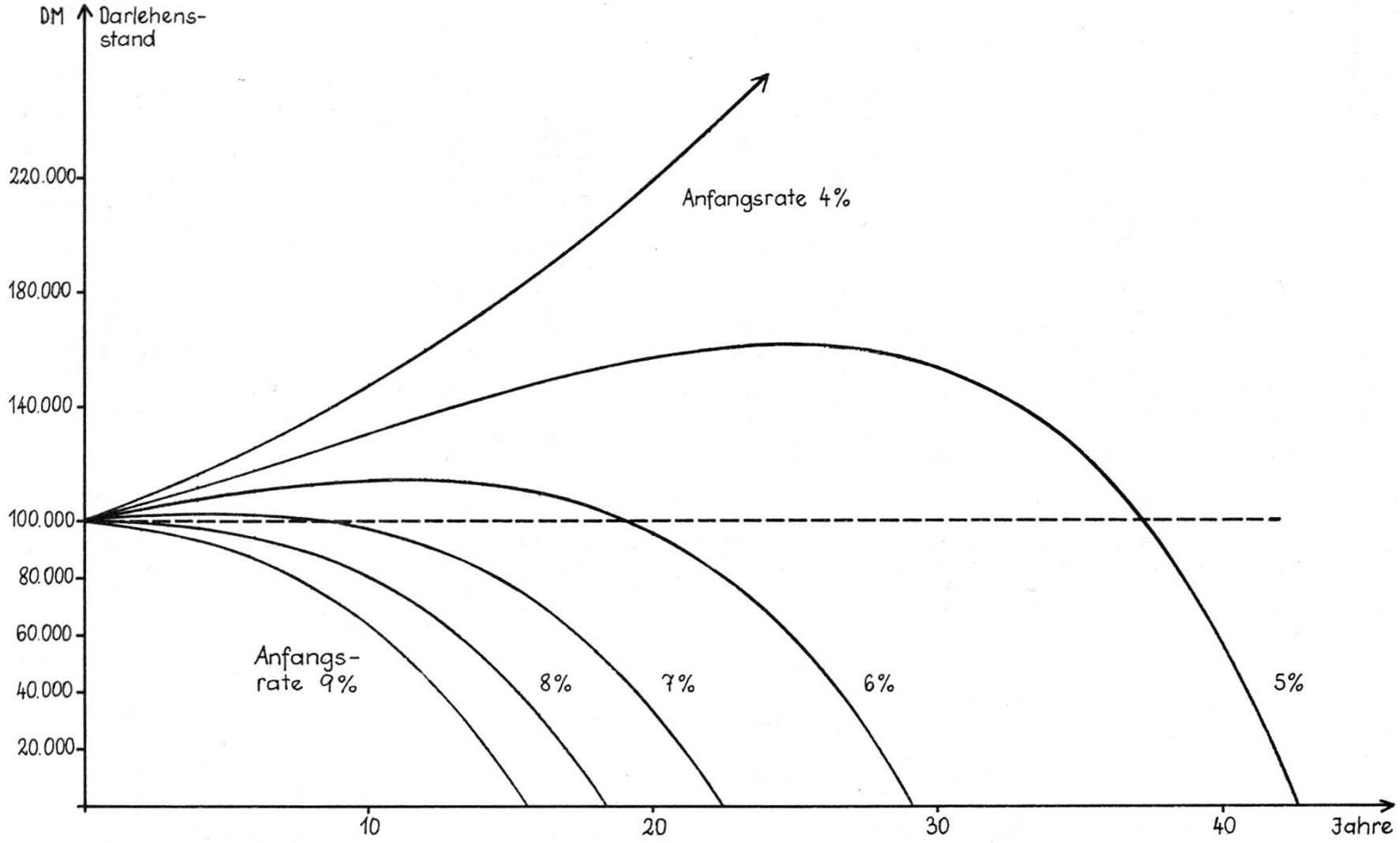
Tabelle 1

Tilgungsablauf bei der dynamischen Tilgung eines Darlehens von 100000 DM mit einem Zinssatz von 8% sowie jährlicher Ratenzahlung und Tilgungsabsetzung

Jahres-ende	Restdarlehen am Jahresende														Jahres-ende
	Anfangsrate von 6% Progressionssatz				Anfangsrate von 7% Progressionssatz				Anfangsrate von 8% Progressionssatz			Anfangsrate von 9% Progressionssatz			
	4%	6%	8%	10%	2%	4%	6%	8%	2%	4%	6%	0%	2%	4%	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	DM	
1	102000.00	102000.00	102000.00	102000.00	101000.00	101000.00	101000.00	101000.00	100000.00	100000.00	100000.00	99000.00	99000.00	99000.00	1
2	103920.00	103800.00	103680.00	103560.00	101940.00	101800.00	101660.00	101520.00	99840.00	99680.00	99520.00	97920.00	97740.00	97560.00	2
3	105744.00	105362.40	104976.00	104584.80	102812.40	102372.80	101927.60	101476.80	99504.00	99001.60	98492.80	96753.60	96195.60	95630.40	3
4	107454.34	106645.30	105815.81	104965.58	103608.94	102688.58	101744.70	100776.96	98974.66	97922.82	96844.10	95493.89	94340.38	93157.06	4
5	109031.53	107602.06	106118.14	104578.23	104320.63	102714.65	101046.93	99315.69	98233.17	96397.77	94491.81	94133.40	92145.72	90080.89	5
6	110454.14	108180.87	105791.62	103281.43	104937.71	102415.25	99763.11	96975.65	97259.18	94376.37	91345.35	92664.07	89580.65	86337.49	6
7	111698.55	108324.22	104733.71	100914.58	105449.59	101751.24	97814.52	93625.59	96030.61	91803.93	87304.82	91077.20	86611.64	81856.62	7
8	112738.85	107968.38	102829.46	97295.44	105844.76	100679.82	95114.27	89118.86	94523.58	88620.79	82260.17	89363.37	83202.40	76561.76	8
9	113546.54	107042.76	99950.23	92217.54	106110.72	99154.22	91566.48	83291.86	92712.19	84761.90	76090.20	87512.44	79313.65	70369.58	9
10	114090.39	105469.31	95952.22	85447.26	106233.93	97123.38	87065.44	75962.18	90568.42	80156.36	68661.58	85513.44	74902.91	63189.34	10
11	114336.16	103161.77	90674.85	76720.59	106199.69	94531.54	81494.75	66926.67	88061.94	74726.91	59827.72	83354.51	69924.20	54922.29	11
12	114246.33	100024.92	83939.00	65739.53	105992.04	91317.88	74726.24	55959.34	85159.90	68389.43	49427.55	81022.87	64327.76	45460.98	12
13	113779.84	95953.73	75545.10	52168.13	105593.71	87416.08	66618.96	42808.89	81826.76	61052.33	37284.19	78504.70	58059.81	34688.57	13
14	112891.79	90832.46	65270.97	35627.95	104985.96	82753.86	57017.98	27196.24	78024.05	52615.93	23203.50	75785.08	51062.13	22478.00	14
15	111533.07	84533.64	52869.49	15693.19	104148.49	77252.43	45753.09	8811.58	73710.14	42971.79	6972.54	72847.89	43271.80	8691.15	15
16	109650.05	76916.98	38066.03		103059.29	70826.02	32637.43		68840.01	32001.98		69675.72	34620.72		16
17	107184.17	67828.22	20555.66		101694.53	63381.23	17465.96		63364.92	19578.29		66249.77	25035.31		17
18	104071.50	57097.85	0.00		100028.40	54816.43	13.83		57232.18	5561.35		62549.76	14435.96		18
19	100242.32	44539.64			98032.95	45021.03			50384.79			58553.74	2736.62		19
20	95620.61	29949.21			95677.91	33874.76			42761.08			54238.04			20
21	90123.52	13102.34			92930.51	21246.88			34294.39			49577.08			21
22	83660.80				89755.29	6995.26			24912.61			44543.24			22
23	76134.15				86113.85				14537.78			39106.70			23
24	67436.59				81964.67				3085.61			33235.24			24
25	57451.69				77262.78							26894.06			25
26	46052.81				71959.56							20045.58			26
27	33102.21				66002.40							12649.23			27
28	18450.18				59334.38							4661.17			28
29	1933.97				51893.97										29
30					43614.57										30
31					34424.20										31
32					24245.02										32
33					12992.84										33
34					576.64										34

Figur 5

Entwicklung des Darlehensstands bei der dynamischen Tilgung eines Darlehens von 100000 DM mit einem Zinssatz von 8% und einem Progressionssatz von 4% sowie jährlicher Ratenzahlung und Tilgungsabsetzung



Figur 6

Entwicklung des Darlehensstands bei der dynamischen Tilgung eines Darlehens von 100000 DM mit einem Zinssatz von 8% und einer Anfangsrate von 7% sowie jährlicher Ratenzahlung und Tilgungsabsetzung

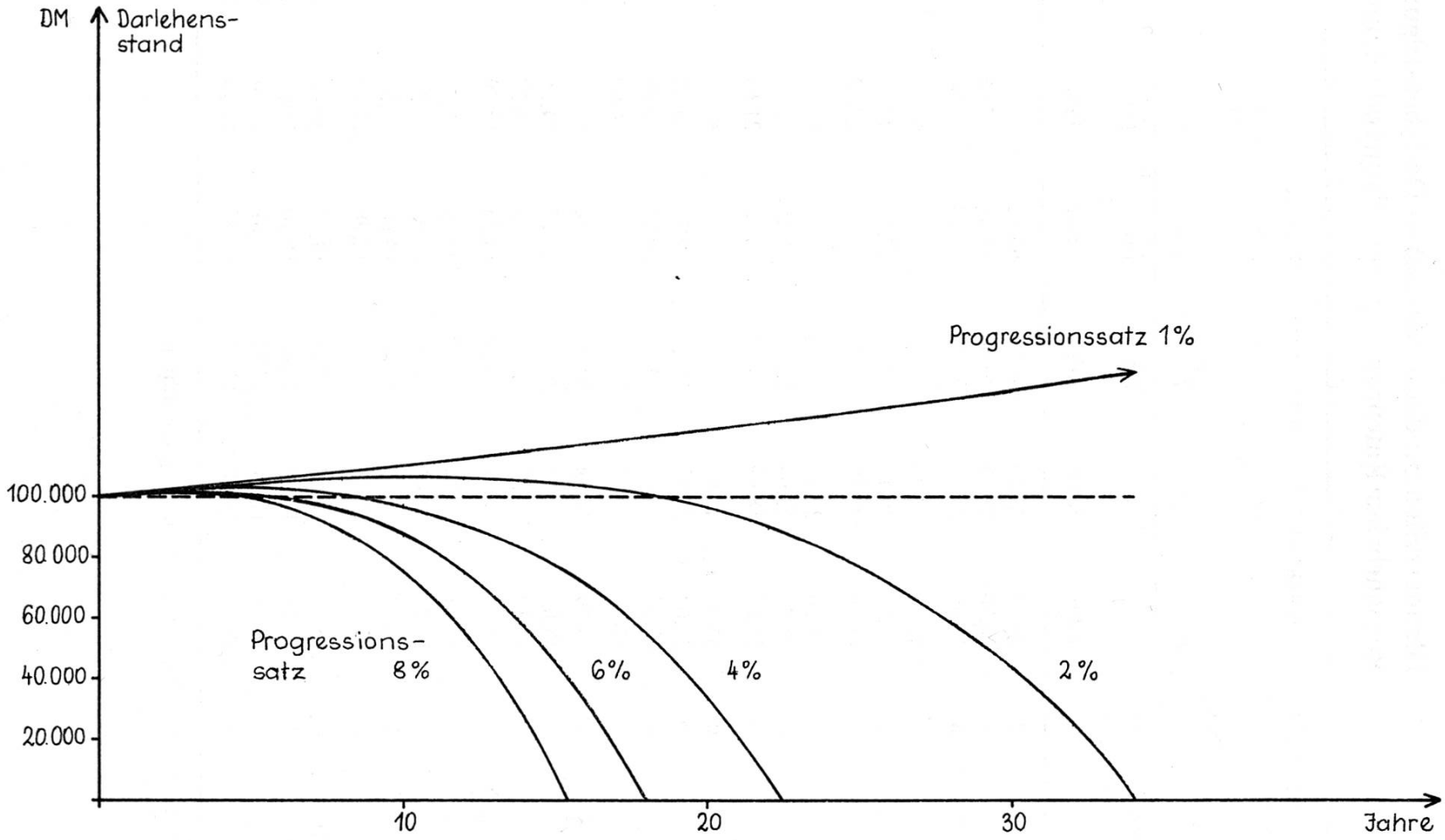


Tabelle 2

Tilgungszeiten bei der dynamischen Darlehenstilgung mit jährlicher Ratenzahlung und Tilgungsabsetzung

Anfangs-rate	Pro-gres-sions-satz	Tilgungszeiten bei einem Zinssatz von ...%						
		6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
%	%	Jahre	Jahre	Jahre	Jahre	Jahre	Jahre	Jahre
4	4	36,39	41,29	48,75	62,82	*	*	*
	6	26,50	28,38	30,64	33,45	37,08	42,08	49,67
	8	21,69	22,77	23,99	25,38	27,00	28,91	31,21
5	2	41,84	53,33	*	*	*	*	*
	4	26,82	29,18	32,22	36,37	42,65	54,36	*
	6	21,20	22,39	23,76	25,38	27,33	29,73	32,83
6	2	28,56	32,11	37,44	47,32	*	*	*
	4	21,29	22,69	24,37	26,45	29,11	32,73	38,16
	6	17,67	18,49	19,42	20,47	21,69	23,12	24,84
7	0	33,40	41,91	*	*	*	*	*
	2	22,03	23,85	26,18	29,33	34,04	42,72	*
	4	17,66	18,60	19,68	20,94	22,45	24,31	26,68
	6	15,14	15,75	16,42	17,16	18,00	18,95	20,05
8	0	23,79	26,58	30,73	38,34	*	*	*
	2	18,02	19,15	20,50	22,15	24,25	27,10	31,33
	4	15,10	15,77	16,53	17,38	18,37	19,52	20,89
	6	13,25	13,71	14,22	14,78	15,39	16,07	16,84
9	0	18,85	20,34	22,23	24,78	28,55	35,43	*
	2	15,28	16,06	16,95	17,98	19,22	20,73	22,66
	4	13,19	13,70	14,26	14,88	15,57	16,36	17,27
	6	11,78	12,15	12,54	12,98	13,44	13,96	14,53
10	0	15,73	16,67	17,79	19,17	20,91	23,25	26,72
	2	13,28	13,85	14,48	15,20	16,03	16,99	18,14
	4	11,71	12,11	12,54	13,01	13,54	14,11	14,76
	6	10,60	10,90	11,22	11,57	11,94	12,34	12,78

* Kombinationen, die nicht zur Tilgung führen

Tabelle 3

Zeitpunkt und Höhe der maximalen Darlehensstände bei der dynamischen Darlehenstilgung mit jährlicher Ratenzahlung und Tilgungsabsetzung

Zinssatz	Anfangsrate	Maximale Darlehensstände bei einem Progressionssatz von ...%					
		2		4		6	
		Zeitpunkt	Höhe	Zeitpunkt	Höhe	Zeitpunkt	Höhe
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
%	%	Jahre	%	Jahre	%	Jahre	%
6	3	*	*	36,89	208,41	18,17	140,03
	4	*	*	15,61	120,58	9,34	111,59
	5	13,78	108,42	6,04	103,55	4,04	102,43
6,5	3	*	*	55,49	399,04	22,24	163,84
	4	*	*	21,36	139,46	11,87	119,39
	5	26,54	128,83	9,25	108,41	5,89	105,29
	6	5,31	101,55	2,76	100,86	1,99	100,67
7	3	*	*	*	*	27,27	203,96
	4	*	*	29,57	178,75	14,73	130,93
	5	*	*	13,05	116,86	7,85	109,65
	6	11,77	107,15	5,20	103,08	3,51	102,14
7,5	3	*	*	*	*	33,95	281,01
	4	*	*	44,34	297,68	18,07	148,52
	5	*	*	17,89	131,87	10,01	116,04
	6	22,65	124,06	7,96	107,22	5,10	104,60
	7	4,67	101,37	2,45	100,79	1,79	100,63
8	4	*	*	*	*	22,20	177,07
	5	*	*	24,78	162,03	12,44	125,38
	6	*	*	11,25	114,35	6,81	108,33
	7	10,29	106,24	4,59	102,74	3,12	101,93
8,5	4	*	*	*	*	27,64	228,85
	5	*	*	37,07	246,90	15,30	139,37
	6	*	*	15,44	126,84	8,69	113,76
	7	19,80	120,71	7,02	106,36	4,52	104,10
	8	4,18	101,24	2,23	100,73	1,64	100,59
9	4	*	*	*	*	35,65	344,70
	5	*	*	*	*	18,81	161,50
	6	*	*	21,39	151,31	10,81	121,63
	7	*	*	9,91	112,54	6,03	107,37
	8	9,17	105,56	4,12	102,49	2,82	101,77

Zusammenfassung

Während bei der bisher üblichen statischen Darlehenstilgung die Rückzahlung des Darlehens mit (nominal) gleichbleibenden Raten erfolgt, sieht die dynamische Darlehenstilgung jährlich um einen festen Prozentsatz steigende Raten vor, die damit in einem in etwa gleichbleibenden Verhältnis zum steigenden Einkommen gehalten werden können.
Untersucht wird, welche Kombinationen von Zinssatz, Anfangsrate und Progressionssatz zu einer Tilgung führen, wie sich der jeweilige Darlehensstand entwickelt und wie die Laufzeit und der maximale Darlehensstand berechnet werden.

Résumé

L'amortissement usuel statique d'une dette prévoit un remboursement par des versements (nominaux) constants; l'amortissement dynamique, lui, prévoit une progression annuelle constante des versements, qui ainsi evoluent parallèlement à un revenu croissant.
L'auteur étudie quelles combinaisons de taux d'intérêt, de versement initial et de taux de croissance conduisent à l'amortissement complet de la dette, comment se développe l'état de la dette, et comment se calcule la durée d'amortissement et le montant maximal de l'état de la dette.

Summary

Whereas under the usual static loan repayment method the loan is paid off by means of (nominally) identical amounts, the dynamic repayment method provides for payments that increase at a fixed rate, so as to remain approximately in the same proportion to an increasing income.
The purpose of the investigation is to discover what combinations of interest rate, initial level of periodic repayment and rate of increase in the latter lead to a given amortization, how the unpaid balance develops over time and how the period of repayment and the maximum balance can be calculated.