Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1980)

Heft: 1

Artikel: Finanzierungsverfahren der Sozialversicherung in einem offenen und einem geschlossenen System

Autor: Müller, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-571102

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

HEINZ MÜLLER, Zürich

Finanzierungsverfahren der Sozialversicherung in einem offenen und einem geschlossenen System[1]

I Einleitung

Zur Finanzierung einer Sozialversicherung stehen das Kapitaldeckungs- und das Umlageverfahren zur Verfügung. In dieser Arbeit wird versucht, die langfristigen Auswirkungen dieser beiden Verfahren miteinander zu vergleichen. Im Zusammenhang mit der Finanzierung der «2. Säule» der Alters-, Hinterlassenen- und Invalidenvorsorge ist dieses Problem von aktueller Bedeutung. Da es sich dabei um eine langfristige Entscheidung handelt, ist die Betrachtung der langfristigen Auswirkungen sinnvoll.

Den schweizerischen Verhältnissen scheint ein neoklassisches Modell (Vollbeschäftigung, keine Preisstarrheiten, vollständige Konkurrenz, etc.) am besten zu entsprechen. Im besonderen wird vorausgesetzt, dass sich langfristig Arbeit durch Kapital substituieren lässt.

Um Komplikationen zu vermeiden, werden nur 3 Güter zugelassen:

1) Wertschriften (im folgenden Geld genannt)
2) Arbeit
3) Output (dient entweder als Kapital- oder als Konsumgut).

Der Konsumplan (über die gesamte Lebensdauer) eines Konsumenten, ist die Lösung eines Optimierungsproblems. Dieses Optimierungsproblem wird im Detail beschrieben. Das erlaubt es einerseits, Mischformen der beiden Finanzierungsverfahren genau zu erfassen. Anderseits wird es möglich, neben den makroökonomischen Auswirkungen der beiden Verfahren, auch die mikroökonomischen Aspekte zu untersuchen.

Für eine genaue Analyse ist es auch wichtig, dass das Bevölkerungswachstum und der technische Fortschritt explizit erfasst werden. Die ganze Betrachtung beschränkt sich auf dynamische Gleichgewichte («steady states») und es wird vorausgesetzt, dass der technische Fortschritt Harrod-neutral ist.

Bei der Modellbildung ist weiter zu berücksichtigen, dass sich ein allfälliger Kapitaltransfer ins Ausland nicht beliebig steuern lässt. Um das Modell dennoch einfach zu halten, beschränken wir uns auf die folgenden beiden Grenzfälle:

[1] Ein Stipendium des Schweizerischen Nationalfonds hat es mir ermöglicht, diese Arbeit zu schreiben. – Sehr hilfreich waren die zahlreichen Diskussionen mit Prof. H. Bühlmann und Dr. M. Janssen. Die Professoren J. H. Drèze, H. Schelbert und H. Schneider gaben mir wichtige Hinweise zur Formulierung und Untersuchung des Modells.

a) Offenes System: Der Kapitaltransfer ist nicht beschränkt und der Realzins wird als exogene Grösse betrachtet.
b) Geschlossenes System: Ein Kapitaltransfer ins Ausland ist nicht möglich und der Realzins ist eine endogene Gleichgewichtsgrösse.

In dieser Arbeit soll vor allem versucht werden, einen Zusammenhang zwischen ökonomischen und versicherungstechnischen Aspekten herzustellen. Andererseits werden makroökonomische und mikroökonomische Überlegungen einander gegenübergestellt. Die nun folgende Argumentation führen wir im geschlossenen System durch:

Typischerweise führt das Kapitaldeckungsverfahren zu einer stärkeren gesamtwirtschaftlichen Spartätigkeit und auch zu einem tieferen Realzins. Eine Senkung des Realzinses führt unter neoklassischen Annahmen zu einem höheren Kapitalstock pro Arbeitsplatz. Damit nimmt die Grenzproduktivität der Arbeit und deshalb auch der Reallohn zu. Unter realistischen Annahmen nimmt auch das Gesamteinkommen (Lohneinkommen plus Erträge aus den Anlagen) zu. Aufgrund dieser makroökonomischen Überlegungen ist man versucht, dem Kapitaldeckungsverfahren eindeutig den Vorzug zu geben.

Eine Analyse der mikroökonomischen Aspekte zeigt, dass die Betrachtung des Gesamteinkommens irreführend sein kann. Das Umlageverfahren stellt einen Einkommenstransfer von den erwerbstätigen zu den pensionierten Individuen dar. Ein solcher Transfer hat keinen direkten Einfluss[2] auf das Gesamteinkommen. H. Aaron (1966) und E. Kaiser haben darauf hingewiesen, dass sich für ein einzelnes Individuum die Beiträge an das Umlageverfahren mit der Wachstumsrate der gesamten Lohnsumme verzinsen[3]. Diese Erträge aus dem Umlageverfahren werden durch das Gesamteinkommen nicht berücksichtigt. Für das «Wohlergehen» der Individuen sind die Konsumpläne von entscheidender Bedeutung. Deshalb drängt sich eine mikroökonomische Analyse auf. Es lassen sich leicht Beispiele konstruieren, wo das Kapitaldeckungsverfahren zwar zu einem höheren Gesamteinkommen führt, wo aber der Nutzen aus den Konsumplänen kleiner ist als beim Umlageverfahren.

Die mikroökonomische Betrachtung der individuellen Konsumpläne zeigt, dass das Finanzierungsverfahren sowohl versicherungstechnische als auch ökonomische Effekte hat:

Auf der versicherungstechnischen Seite tritt ein «Finanzierungseffekt» auf. Dieser Effekt beruht darauf, dass sich die Beiträge beim Kapitaldeckungsver-

[2] Ein indirekter Einfluss ist allerdings möglich, weil ein Einkommenstransfer die Sparneigung und damit den Realzins beeinflussen kann.

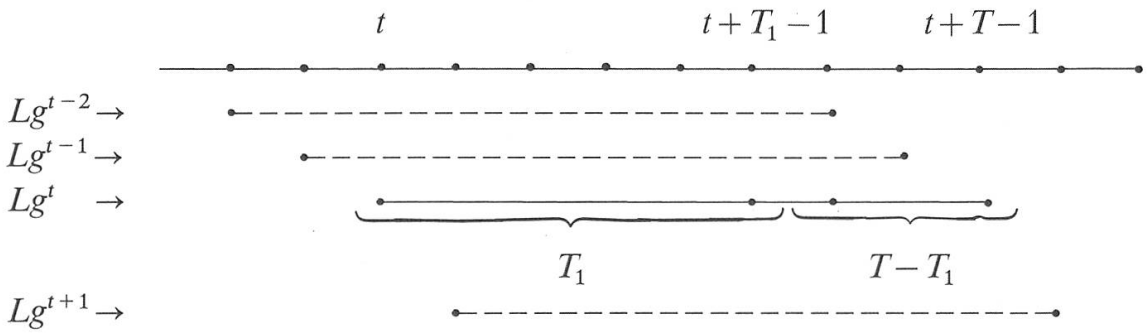
[3] In unserem Modell stimmen die Wachstumsrate der Lohnsumme und die Wachstumsrate der Wirtschaft überein. Die Wachstumsrate der Wirtschaft setzt sich aus Bevölkerungswachstum und technischem Fortschritt zusammen.

fahren mit dem Realzins und beim Umlageverfahren mit der Wachstumsrate der Wirtschaft verzinsen.
Auf der ökonomischen Seite gibt es einen «Zins-» und einen «Lohneffekt». Wie wir bereits gesehen haben, hat das Finanzierungsverfahren einen Einfluss auf den Realzins. Der Realzins beeinflusst das Lohnniveau. Das führt zum «Lohneffekt». Der «Zinseffekt» beruht auf den direkten Einkommensänderungen, die eine Zinsänderung bewirkt. Es ist allerdings schwierig die Bedeutung von «Lohn-» und «Zinseffekt» abzuschätzen.
Schliesslich ist im geschlossenen System die sogenannte «Goldene Regel» erfüllt. Eine Mischung von Kapitaldeckungs- und Umlageverfahren führt genau dann zum maximalen technisch realisierbaren Nutzenniveau, wenn der zugehörige Realzins mit der Wachstumsrate übereinstimmt.
Im offenen System ist die Situation wesentlich einfacher. Mit dem Realzins ist auch die Kapitalintensität der Wirtschaft (Kapitalstock pro effektive Arbeitskraft), die Grenzproduktivität der Arbeit und somit der Reallohn bestimmt. D.h. «Lohn-» und «Zinseffekte» treten nicht auf und das Kapitaldeckungsverfahren ist dem Umlageverfahren genau dann vorzuziehen, wenn der Realzins die Wachstumsrate der Wirtschaft übertrifft. Diese Aussagen sind natürlich fast trivial. Dennoch ist das offene System als Grenzfall von gewisser Bedeutung.
Am Schluss der Arbeit wird noch auf die Problematik der vereinfachenden Annahmen hingewiesen.

II Elemente des Modells

2.1 *Das Modell hat folgende allgemeine Eigenschaften:*

2.1.1 In jeder Periode t werden Lg^t Individuen geboren, die während T Perioden leben und während der ersten T_1 Perioden ($T_1 < T$) erwerbstätig sind.



$g-1$ is die Wachstumsrate der Bevölkerung. In der Periode t sind somit

$$\bar{L}_t = g^t \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} L \tag{1}$$

Individuen erwerbstätig,

$$\bar{\bar{L}}_t = g^{t-T_1} \frac{1-g^{-(T-T_1)}}{1-g^{-1}} L \tag{2}$$

sind pensioniert.

2.1.2 Die Güter sind

0 Geld (trägt Zins)[4]
1 Arbeit[5]
2 Output

2.1.3 Das Geld wird mit dem Realzins $r-1$ verzinst.

Die folgenden beiden Varianten sind zugelassen

a) Offenes System: Der Realzins $\bar{r}-1$ ist vorgegeben und der Markt für das Output-Gut wird durch einen Transfer ins Ausland ins Gleichgewicht gebracht.
b) Geschlossenes System: Ein Kapitaltransfer ins Ausland ist nicht möglich und der Realzins $r-1$ ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen.

2.2 *Die Produktion*

Die Produktionsmöglichkeiten in der Periode t sind durch eine neoklassische linear homogene Produktionsfunktion $F_t(L_t, K_t)$ gegeben. Beträgt der Input in der Periode t

$$L_t, K_t \text{ (Arbeit, Kapital)}$$

so ist in der Periode $t+1$ der Output

$$(1-\gamma)K_t, F_t(L_t, K_t)$$

verfügbar.
In der Periode $t+1$ lässt sich $F_t(L_t, K_t)$ als Kapital- oder als Konsumgut verwenden, hingegen ist $(1-\gamma)K_t$ nur noch als Kapital verwendbar.
$\gamma \in [0,1]$ stellt den Kapitalverzehr («depreciation») dar. Es wird vorausgesetzt

[4] Eine Geldeinheit ist ein Anrecht auf eine Einheit des Output-Gutes.
[5] Jeder Erwerbstätige verfügt pro Periode über eine Arbeitseinheit, die er auf dem Arbeitsmarkt anbietet.

Annahme A1:

1) $F_t(L_t, K_t) \overset{6}{=} F(s^t L_t, K_t) \quad = \quad s^t L_t F\left(1, \frac{K_t}{s^t L_t}\right) := s^t L_t f(k_t)$

Harrod-neutraler technischer Fortschritt — lineare Homogenität

$$\text{mit} \quad k_t := \frac{K_t}{s^t L_t},^{7} \quad s \geqslant 1$$

2) $f: R_+ \to R_+$ ist zweimal stetig differenzierbar und es gilt $f(0) \geqslant 0$, $f' > 0$, $f'' < 0$.
3) $gs > 1 - \gamma$.

Bemerkungen:

1) Die Rate des technischen Fortschritts $s-1$ ist exogen.
2) Aus der Konkavität von f folgt die Konkavität von F.
3) Der Kapitalstock lässt sich höchstens mit der Rate γ abbauen. $gs > 1 - \gamma$ garantiert, dass der Output $F_t(L_t, K_t)$ teilweise als Konsumgut und teilweise als Kapitalgut verwendet wird. Deshalb ist eine Unterscheidung zwischen Konsumgüter- und Kapitalgütermarkt überflüssig.

Für den Profit in der Periode $t+1$ ergibt sich

$$\pi^{t+1} := \max_{L_t \geqslant 0,\, K_t \geqslant 0} \{F(s^t L_t, K_t) + (1-\gamma) K_t - r K_t - r w_t L_t\}^{8} \tag{3}$$

w_t ist der Reallohn in der Periode t.

Soll die optimale Lösung im Innern des zulässigen Bereiches liegen, so sind wegen der Konkavität von F die folgenden Bedingungen 1. Ordnung notwendig und hinreichend:

$$s^t F_1 - r w_t = 0 \quad (F_1, F_2 \text{ sind die partiellen Ableitungen von } F) \tag{4}$$

$$F_2 - (r - 1 + \gamma) = 0.$$

Unter Berücksichtigung von

$$F_1 = f(k_t) - k_t f'(k_t), \quad F_2 = f'(k_t)$$

[6] Bei der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion kann der technische Fortschritt als Harrod-, Hicks- oder Solow-neutral aufgefasst werden.

[7] k_t wird im folgenden als Kapitalintensität bezeichnet.

[8] Da wir uns auf dynamische Gleichgewichte («steady state») beschränken, darf der Zins $r-1$ nicht zeitabhängig sein.

ergibt das

$$\begin{aligned} f'(k_t) &= r-1+\gamma \\ f(k_t)-k_t f'(k_t) &= \frac{rw_t}{s^t}. \end{aligned} \tag{5}$$

Aus (5) folgt

$$\begin{aligned} k_t &= (f')^{-1}[r-1+\gamma] =: k \\ w_t &= s^t \frac{f(k)-kf'(k)}{r} =: s^t w \end{aligned} \tag{6}$$

für $r \in (r_{\min}, r_{\max})$, wobei

$$r_{\min} = 1-\gamma+\lim_{k\to\infty} f'(k), \quad r_{\max} = 1-\gamma+\lim_{k\to 0} f'(k). \tag{7}$$

Die Kapitalintensität k und der reale Basislohn w lassen sich somit als differenzierbare Funktionen von r ausdrücken und es folgt sofort

$$\frac{dk}{dr} = \frac{1}{f''(k)} < 0, \quad \frac{dw}{dr} = -\frac{k+w}{r} < 0 \quad ^{9} \tag{8}$$

Das heisst, dass die Kapitalintensität und der Reallohn bei steigendem Realzins abnehmen.
Wegen der linearen Homogenität der Produktionsfunktion ist $\pi^{t+1} = 0$ und die optimalen Produktionspläne sind von der Form

$$(s^t L_t, K_t) = (\mu s^t, \mu s^t k) \quad \mu \geqslant 0. \tag{9}$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den Arbeitsmarkt ergibt

$$\begin{aligned} L_t &= \bar{L}_t = g^t \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} L \\ K_t &= s^t g^t \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} L \cdot k \end{aligned} \tag{10}$$

und die Kreditnachfrage in der Periode t beträgt

$$\begin{aligned} N_t(r) &:= K_t + s^t w \bar{L}_t \\ &= s^t \bar{L}_t (k+w) = s^t g^t \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} L(k+w) \end{aligned} \tag{11}$$

[9] $-kf''(k)\frac{dk}{dr} = w + r\frac{dw}{dr}$ führt zu $\frac{dw}{dr} = -\frac{k+w}{r}$.

$$\frac{d}{dr} N_t = s^t g^t \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} L \left(\frac{1}{f''(k)} - \frac{k+w}{r} \right) < 0. \tag{12}$$

$N_t(r)$ ist also für $r \in (r_{\min}, r_{\max})$ definiert und differenzierbar.

2.3 *Der Konsument*

Für ein Individuum, das während der Perioden t bis $t+T-1$ lebt, stellt sich folgendes Optimierungsproblem

$$\max U(q_{1,t}, \ldots, q_{T,t}) \tag{13}$$

unter den Restriktionen

$$\boxed{\begin{array}{llll}
q_{1,t} & +m_{1,t} & \leqslant (1-b)s^t w & \\
\vdots & & & \\
q_{\tau,t} & +m_{\tau,t} & \leqslant (1-b)s^{t+\tau-1} w & +rm_{\tau-1,t} \\
\vdots & & & \\
q_{T_1,t} & +m_{T_1,t} & \leqslant (1-b)s^{t+T_1-1} w & +rm_{T_1-1,t} \\
q_{T_1+1,t} & +m_{T_1+1,t} & \leqslant b \dfrac{1-g^{-T_1}}{g^{-T_1}-g^{-T}} s^{t+T_1} w & +rm_{T_1,t} \\
\vdots & & & \\
q_{\tau,t} & +m_{\tau,t} & \leqslant b \dfrac{1-g^{-T_1}}{g^{-T_1}-g^{-T}} s^{t+\tau-1} w & +rm_{\tau-1,t} \\
\vdots & & & \\
q_{T,t} & +m_{T,t} & \leqslant b \dfrac{1-g^{-T_1}}{g^{-T_1}-g^{-T}} s^{t+T-1} w & +rm_{T-1,t} \\
 & m_{T,t} & \geqslant 0 &
\end{array}} \tag{14}$$

[10]

- $(q_{\tau,t})_{\tau=1}^{T} \in R_+^T$ ist der Konsumplan.
- $m_{\tau,t}$ $\tau = 1, \ldots, T$ stellt gleichzeitig die privaten Ersparnisse und die Reserven für das Kapitaldeckungsverfahren in der Lebensperiode τ des Individuums dar. In diesem einfachen Modell besteht formal kein Unterschied.

[10] Die Ungleichungen bringen zum Ausdruck, dass das Wegwerfen von Gütern möglich ist. Beim Optimierungsproblem lassen sich die Ungleichungen durch Gleichungen ersetzen, falls die Nutzenfunktion strikt monoton wachsend ist (siehe Voraussetzung A.2).

- $bs^{t+\tau-1}w$ ist der Beitrag an das Umlageverfahren in der Lebensperiode τ des Individuums ($\tau=1, \ldots, T_1$).
  $b \in [0,1)$ ist der Beitragssatz für das Umlageverfahren.
- $b\,\dfrac{1-g^{-T_1}}{g^{-T_1}-g^{-T}}\,s^{t+\tau-1}w$ ist die Rente aus dem Umlageverfahren in der Lebensperiode τ des Individuums ($\tau=T_1+1, \ldots, T$).
- Die Präferenzen bezüglich den Konsumplänen $(q_{\tau,t})_{\tau=1}^{T}$ sind durch die Nutzenfunktion $U: R_+^T \to R$ gegeben.

Dieser Ansatz erlaubt es, Mischformen von Kapitaldeckungs- und Umlageverfahren zu erfassen. Der Beitragssatz b lässt sich als Intensität des Umlageverfahrens interpretieren.
Aus (14) geht auch unmittelbar hervor, dass sich die Beiträge an das Umlageverfahren für das einzelne Individuum mit $gs-1$ verzinsen. Dieses Resultat ist allerdings in der Literatur seit langer Zeit bekannt (H. Aaron (1966), E. Kaiser). $gs-1$ ist das Wirtschaftswachstum, das hier mit der Wachstumsrate der Lohnsumme übereinstimmt.
Es wird vorausgesetzt

Annahme A2:

1) $U: R_+^T \to R$ ist linear homogen und konkav.
2) Für alle $z \in R_{++}^T$, $\bar{z} \in R_+^T \setminus R_{++}^T$ gilt $U(z) > U(\bar{z})$
3) In jedem Punkt $z \in R_{++}^T$ ist U zweimal stetig differenzierbar, strikt monoton wachsend und es gilt

$$\begin{vmatrix} U_{11} & \ldots & U_{1T} & U_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ U_{T1} & \ldots & U_{TT} & U_T \\ U_1 & \ldots & U_T & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{15}$$

Bemerkungen:

1) A.2.1 garantiert u. a., dass die Struktur des optimalen Konsumplans nicht vom Einkommensniveau abhängt.
2) A.2.2 garantiert, dass das Optimierungsproblem (13), (14) für $w>0$ keine Randlösung hat.
3) A.2.3 ist eine Regularitätsbedingung.

(14) lässt sich zu einer einzigen Budgetrestriktion zusammenfassen und das Optimierungsproblem lautet somit

$$\max U(q_{1,t}, \ldots, q_{T,t}) \tag{16}$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{q_{\tau,t}}{r^{\tau-1}} \leqslant s^t w \frac{1-\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1}}{1-\frac{s}{r}} + b s^t w \underbrace{\left\{ \frac{\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1} - \left(\frac{s}{r}\right)^{T}}{1-\frac{s}{r}} \cdot \frac{1-g^{-T_1}}{g^{-T_1}-g^{-T}} - \frac{1-\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1}}{1-\frac{s}{r}} \right\}}_{:=F(r,g,s)}. \tag{17}$$

Wie man leicht nachweist, gilt

$$\left.\begin{matrix} <0 \\ F(r,g,s)=0 \\ >0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r>gs \\ r=gs \\ r<gs \end{matrix}\right. \tag{18}$$

Wegen A2 lässt sich das implizite Funktionentheorem auf die Kuhn-Tucker-Bedingungen des Optimierungsproblems (16), (17) anwenden. Deshalb ist für $r>0$, $w>0$ der optimale Konsumplan $(q_{\tau,t})_{\tau=1}^{T}$ eine differenzierbare Funktion in (r,w,b).

$m_{\tau,t}(r,w,b)$, $\tau=1,\ldots,T$, ist in (r,w,b) ebenfalls differenzierbar. Da $w(r)$ eine differenzierbare Funktion in $r\in(r_{\min}, r_{\max})$ ist (8), beträgt das Kreditangebot der Konsumenten in der Periode t

$$A_t(r,b) := Lg^t \sum_{\tau=1}^{T} \frac{m_{\tau,t-\tau+1}}{g^{\tau-1}}. \tag{19}$$

$A_t(r,b)$ ist für $r\in(r_{\min}, r_{\max})$, $b\in[0,1)$ definiert und differenzierbar. Aus A.2.1 und (17) folgt weiter

$$\begin{aligned} q_{\tau,t+1}(r,w(r),b) &= s q_{\tau,t}(r,w(r),b) \\ m_{\tau,t+1}(r,w(r),b) &= s m_{\tau,t}(r,w(r),b) \end{aligned} \qquad \tau=1,\ldots,T \tag{20}$$

und somit

$$A_{t+1}(r,b) = gsA_t(r,b), \quad N_{t+1}(r) = gsN_t(r) \tag{21}$$

III Gleichgewicht

3.1 *Geschlossenes System*

Die Nettonachfrage in der Periode t beträgt für die Konsumenten

$$\Big(\underbrace{A_t(r,b) - rA_{t-1}(r,b)}_{\text{Geldnachfrage (netto)}}, \quad -\bar{L}_t, \quad \underbrace{Lg^t \sum_{\tau=1}^{T} \frac{q_{\tau,t-\tau+1}(r,w(r),b)}{g^{\tau-1}}}_{\text{Konsumnachfrage}}\Big) \tag{22}$$

und für den Produzenten

$$\Big(\underbrace{-[N_t(r)-rN_{t-1}(r)]}_{\substack{\text{Kreditnachfrage}\\ \text{(netto)}}},\quad \bar{L}_t,\quad \underbrace{K_t(r)-(1-\gamma)K_{t-1}(r)-F_{t-1}\big(\bar{L}_{t-1},K_{t-1}(r)\big)}_{\substack{\text{Güternachfrage}\\ \text{wobei } K_t(r):=s^t\bar{L}_t k(r).}}\Big) \tag{23}$$

Aus (14) und (19) folgt unter Berücksichtigung von $m_{T,t}(r,w(r),b)=0$

$$A_t(r,b)-rA_{t-1}(r,b)-s^t w\bar{L}_t+Lg^t\sum_{\tau=1}^{T}\frac{q_{\tau,t-\tau+1}(r,w,b)}{g^{\tau-1}}=0 \tag{24}$$

andererseits gilt definitionsgemäss

$$-N_t(r)+s^t w\bar{L}_t+K_t(r)=0 \tag{25}$$

und wegen $\pi^t=0$

$$rN_{t-1}(r)-(1-\gamma)K_{t-1}(r)-F_{t-1}\big(\bar{L}_{t-1},K_{r-1}(r)\big)=0. \tag{26}$$

Somit erfüllt die gesamte Nettonachfrage

$$\begin{aligned}\Big(A_t(r,b)-rA_{t-1}(r,b)-[N_t(r)-rN_{t-1}(r)],\ 0,\ Lg^t\sum_{\tau=1}^{T}\frac{q_{\tau,t-\tau+1}(r,w,b)}{g^{\tau-1}}+\\ +K_t(r)-(1-\gamma)K_{t-1}(r)-F_{t-1}\big(\bar{L}_{t-1},K_{t-1}(r)\big)\Big)\end{aligned} \tag{27}$$

das Walras-Gesetz.
Wegen (21) und dem Walras-Gesetz bringt die Bedingung

$$A_t(r,b)=N_t(r) \tag{28}$$

gleichzeitig den Geldmarkt und den Markt für das Output-Gut ins Gleichgewicht.
Im allgemeinen lässt sich die Existenz einer Lösung von (28) nicht nachweisen. Deshalb setzen wir voraus

Annahme B1:

Es existiert $r_0\in(r_{\min},r_{\max})$, $b_0\in[0,1)$, so dass

$$\begin{aligned}&A_t(r_0,b_0)=N_t(r_0)\\ &\frac{\partial}{\partial r}[A_t(r,b)-N_t(r)]_{(r_0,b_0)}\neq 0\end{aligned} \tag{29}$$

Annahme B1 erlaubt es, den Gleichgewichtszins lokal als eine Funktion von b darzustellen.
D. h. es existiert eine Umgebung $V(b_0)$ von b_0 und eine differenzierbare Funktion

$$r: V(b_0) \to (r_{\min}, r_{\max})$$

mit

$$A_t(r(b), b) = N_t(r(b)) \quad \forall b \in V(b_0). \tag{30}$$

Leider ist im allgemeinen auch keine Aussage über $\frac{dr}{db}$ möglich. Anhand eines nicht-pathologischen Beispiels werden wir aber sehen, dass die Annahme B1 typischerweise erfüllt ist und dass $\frac{dr}{db} > 0$ gilt.

3.2 *Offenes System*

Die Nettonachfrage im offenen System beträgt für die Konsumenten

$$\left(A_t(\bar{r}, b) - \bar{r}A_{t-1}(\bar{r}, b), \quad -\bar{L}_t, \quad Lg^t \sum_{\tau=1}^{T} \frac{q_{\tau,t-\tau+1}(\bar{r}, w(\bar{r}), b)}{g^{\tau-1}}\right), \tag{31}$$

für den Produzenten

$$\left(-[N_t(\bar{r}) - \bar{r}N_{t-1}(\bar{r})], \bar{L}_t, K_t(\bar{r}) - (1-\gamma)K_{t-1}(\bar{r}) - F_{t-1}(\bar{L}_{t-1}, K_{t-1}(\bar{r}))\right), \tag{32}$$

für das Ausland

$$\begin{aligned}\big(N_t(\bar{r}) - \bar{r}N_{t-1}(\bar{r}) - [A_t(\bar{r}, b) - \bar{r}A_{t-1}(\bar{r}, b)],\ 0,\ A_t(\bar{r}, b) - \bar{r}A_{t-1}(\bar{r}, b) - \\ - [N_t(\bar{r}) - \bar{r}N_{t-1}(\bar{r})]\big).\end{aligned} \tag{33}$$

Wieder ist das Walras-Gesetz erfüllt und infolge des Transfers ins Ausland sind alle Märkte im Gleichgewicht.
Es gilt also

$$r(b) = \bar{r}, \tag{34}$$

wobei $\bar{r} \in (r_{\min}, r_{\max})$ exogen vorgegeben ist.

IV Abhängigkeit der Konsumpläne vom Finanzierungssystem

Dem optimalen Konsumplan $q_{\tau,t}(r, w, b)$ entspricht die Nutzenallokation

$$\bar{U}(r, w, b) := U\left([q_{\tau,t}(r, w, b)]_{\tau=1}^{T}\right). \tag{35}$$

Totales Differenzieren ergibt nun

$$\frac{d}{db}\bar{U}(r,w,b)=\underbrace{\bar{U}_r\frac{dr}{db}}_{\text{«Zinseffekt»}}+\underbrace{\bar{U}_w\frac{dw}{db}}_{\text{«Lohneffekt»}}+\underbrace{\bar{U}_b}_{\text{«Finanzierungseffekt»}} \tag{36}$$

Sei

$$I(r,w,b):=s^t w\frac{1-\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1}}{1-\frac{s}{r}}+bs^t wF(r,g,s), \tag{37}$$

dann gilt wegen der Slutsky Gleichungen[11], der linearen Homogenität und den anderen Annahmen über die Nutzenfunktion U

$$\frac{1}{\bar{U}}\frac{d}{db}\bar{U}(r,w,b)=\frac{1}{I}\left\{\frac{dI}{db}+\sum_{\tau=1}^{T}\frac{(\tau-1)q_{\tau,t}}{r^\tau}\cdot\frac{dr}{db}\right\}^{12} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{db}\bar{U}(r,w,b)=&\frac{\bar{U}}{I}\left\{\frac{\partial I}{\partial r}+\sum_{\tau=1}^{T}\frac{(\tau-1)q_{\tau,t}}{r^\tau}\right\}\frac{dr}{db} && \text{«Zinseffekt»}\\ &+\frac{\bar{U}}{I}\frac{\partial I}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dr}\cdot\frac{dr}{db} && \text{«Lohneffekt»}\\ &+\frac{\bar{U}}{I}\frac{\partial I}{\partial b} && \text{«Finanzierungseffekt»}\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{db}\bar{U}(r,w,b)=&\frac{\bar{U}}{I}\left\{\sum_{\tau=1}^{T}\frac{(\tau-1)q_{\tau,t}}{r^\tau}-\sum_{\tau=1}^{T_1}\frac{(\tau-1)s^{\tau+t-1}}{r^\tau}w+bs^t w\frac{\partial F}{\partial r}\right\}\frac{dr}{db}\\ &+\frac{\bar{U}}{I}\left\{s^t\frac{1-\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1}}{1-\frac{s}{r}}+bs^t F(r,g,s)\right\}\frac{dw}{dr}\cdot\frac{dr}{db}\\ &+\frac{\bar{U}}{I}s^t wF(r,g,s)\end{aligned} \tag{40}$$

Nun wollen wir die einzelnen Effekte kurz diskutieren.

[11] Siehe J. Quirk, R. Saposnik, "Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics", S. 51–56.

[12] Änderungen von w und b haben nur Auswirkungen auf das Einkommen. Änderungen von r führen nicht nur zu Einkommensänderungen, sondern auch zu einer Substitution. Der Substitutionseffekt hat aber definitionsgemäss keinen Einfluss auf $\bar{U}$. Δr bewirkt die Einkommensänderung

$$\frac{\partial I}{\partial r}\Delta r+\sum_{\tau=1}^{T}\frac{(\tau-1)q_{\tau,t}}{r^\tau}\Delta r+o(\Delta r).$$

4.1 *Der «Finanzierungseffekt» (FE)*

Aufgrund von (18) gilt

$r > gs$: Der Finanzierungseffekt begünstigt das Kapitaldeckungsverfahren.

$r < gs$: Der Finanzierungseffekt begünstigt das Umlageverfahren.

Dieses Ergebnis ist nicht sehr überraschend, denn das Kapitaldeckungsverfahren beruht auf der «Ertragskraft» der Wirtschaft, die durch den Realzins gegeben ist, während das Umlageverfahren auf der Wachstumsrate basiert. Seit J. von Neumann wird die Wachstumsrate als «natürlicher Zins» betrachtet[13].

Liegt nun der Realzins über der Wachstumsrate, so führen die Reserven des Kapitaldeckungsverfahrens zu einem grösseren Ertrag als die Transferzahlungen des Umlageverfahrens. Die umgekehrte Situation tritt auf, falls die Wachstumsrate über dem Realzins liegt.

4.2 *Der «Lohneffekt» (LE)*

Wegen (8) und (17) gilt

$$\left\{ s^t \frac{1-\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1}}{1-\frac{s}{r}} + bs^t F(r,g,s) \right\} \frac{dw}{dr} =$$

$$= -\frac{k+w}{r} s^t \left\{ b \frac{\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1} - \left(\frac{s}{r}\right)^{T}}{1-\frac{s}{r}} \cdot \frac{1-g^{-T_1}}{g^{-T_1}-g^{-T}} + (1-b) \frac{1-\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1}}{1-\frac{s}{r}} \right\} < 0. \quad (41)$$

Somit wirkt sich der «Lohneffekt» zu Gunsten des Kapitaldeckungsverfahrens aus, falls $\frac{dr}{db}$ positiv ist.

Der «Lohneffekt» lässt sich folgendermassen erklären: Eine Zinssenkung bewirkt eine Erhöhung der Kapitalintensität k. Daraus resultiert eine höhere Grenzproduktivität der Arbeit und damit eine Reallohnerhöhung (vgl. (8)).

4.3 *Der «Zinseffekt» (ZE)*

Setzt man

Annahme B2:

$$m_{\tau,t} \geqslant 0 \forall \tau \in \{1, \ldots, T\}, \quad m_{\tau',t} > 0 \quad \text{für ein} \quad \tau' \in \{1, \ldots, T\} \quad (42)$$

[13] Die Wachstumsrate spielt auch eine zentrale Rolle in David Gale's Zinstheorie.

voraus, so gilt

$$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{(\tau-1)q_{\tau,t}}{r^{\tau}} - \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{(\tau-1)s^{\tau+t-1}}{r^{\tau}} w + bs^t w \frac{\partial F}{\partial r} > 0^{14}. \tag{43}$$

Somit wirkt sich unter B2 der «Zinseffekt» zu Gunsten des Umlageverfahrens aus, falls $\frac{dr}{db} > 0$ ist.

Der «Zinseffekt» bringt den direkten Einkommensausfall zum Ausdruck, den eine Zinsänderung bewirkt.

4.4 *Offenes System*

Im offenen System gilt wegen (34)

$$\frac{dr}{db} = 0, \quad \frac{dw}{db} = \frac{dw}{dr} \cdot \frac{dr}{db} = 0. \tag{44}$$

Deshalb treten der «Lohn-» und der «Zinseffekt» nicht auf. Die Situation lässt sich wie folgt darstellen:

	FE		LE	ZE
<0	falls	$\bar{r} > gs$	0	0
>0	falls	$\bar{r} < gs$		

(45)

<0 zu Gunsten Kapitaldeckungsverfahren
>0 zu Gunsten Umlageverfahren.

---

[14] Es gilt

$$\frac{m_{\theta,t}}{r^{\theta-1}} = \begin{cases} -\sum_{\tau=1}^{\theta} \frac{q_{\tau,t}}{r^{\tau-1}} + (1-b) \sum_{\tau=1}^{\theta} \frac{s^{t+\tau-1}w}{r^{\tau-1}}, & 1 \leqslant \theta \leqslant T_1 \\ -\sum_{\tau=1}^{\theta} \frac{q_{\tau,t}}{r^{\tau-1}} + (1-b) \sum_{\tau=1}^{T_1} \frac{s^{t+\tau-1}w}{r^{\tau-1}} + b \frac{1-g^{-T_1}}{g^{-T_1}-g^{-T}} \sum_{\tau=T_1+1}^{\theta} \frac{s^{t+\tau-1}w}{r^{\tau-1}}, & T_1 < \theta \leqslant T. \end{cases}$$

Wegen (13), (14) und A.2 folgt

$$\frac{m_{T,t}}{r^{T-1}} = 0.$$

Durch eine etwas umständliche Rechnung lässt sich nun (43) herleiten. (Wegen B.2 entspricht jeder Abnahme von

$$\frac{m_{\theta,t}}{r^{\theta-1}}$$

in einem Intervall (θ_1, θ_2) eine Zunahme in früheren Zeitpunkten.)

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist das Kapitaldeckungsverfahren genau dann dem Umlageverfahren vorzuziehen, wenn der vorgegebene Realzins $\bar{r}-1$ die Wachstumsrate $gs-1$ übertrifft.
Weil mit dem Realzins auch die Kapitalintensität k und der reale Basislohn w vorgegeben sind, ist die Diskussion dieses Falles nicht besonders interessant. Seine Bedeutung als Grenzfall sollte aber nicht unterschätzt werden.

4.5 *Geschlossenes System*

Zusätzlich verlangen wir

Annahme B3:

$$\frac{dr}{db} > 0. \tag{46}$$

Annahme B3 entspricht allgemeinen ökonomischen Überlegungen und ist in einem nicht-pathologischen Beispiel (VII) erfüllt.
Unter den Annahmen B1, B2, B3 ergibt sich nun folgende Situation

	FE		LE	ZE
<0	falls	$r(b)>gs$	<0	>0
>0	falls	$r(b)<gs$	$\uparrow$	$\uparrow$
			B3	B2, B3

(47)

Die ökonomischen Effekte («Lohn-» und «Zinseffekt») haben entgegengesetzte Auswirkungen.
Die Auswirkungen des versicherungstechnischen «Finanzierungseffekts» hängen von der Relation zwischen dem Realzins $r(b)-1$ und der Wachstumsrate $gs-1$ ab.
Übertrifft die Wachstumsrate den Realzins, so ist eine Situation denkbar, bei der das Umlageverfahren dem Kapitaldeckungsverfahren vorzuziehen ist.

V Betrachtung des Gesamteinkommens im geschlossenen System

In unserem Modell sind natürlich die Konsumpläne für das Wohlergehen der Individuen entscheidend. Gelegentlich wird aber auch das Gesamteinkommen betrachtet. In diesem Abschnitt wird darauf hingewiesen, dass eine solche Betrachtung sehr leicht zu falschen Schlüssen führen kann.
Das Gesamteinkommen in der Periode t beträgt

$$E_t(r) := s^t w\bar{L}_t + (r-1)\,[K_{t-1}(r) + s^{t-1} w\bar{L}_{t-1}]^{15} \tag{48}$$

$$= s^t \bar{L}_t \left\{ w + \frac{r-1}{gs}(k+w) \right\}. \tag{49}$$

Wegen (8) gilt weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} E_t(r) &= s^t \bar{L}_t \left\{ -\frac{k+w}{r} + \frac{k+w}{gs} + \frac{r-1}{gs}\left(\frac{1}{f''(k)} - \frac{k+w}{r} \right) \right\} \\ &= s^t \bar{L}_t \left\{ -\frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{gs}\right)(k+w) + \frac{r-1}{gs} \cdot \frac{1}{f''(k)} \right\}. \end{aligned} \tag{50}$$

Setzt man $r \geqslant 1$ und $gs \geqslant 1$ voraus, so sinkt das Gesamteinkommen mit steigendem Realzins.
Gilt zusätzlich die Annahme B3, so führt das Umlageverfahren zu einem tieferen Gesamteinkommen als das Kapitaldeckungsverfahren. Dieses Resultat scheint ein starkes Argument für das Kapitaldeckungsverfahren zu sein, aber es ist irreführend. Definitionsgemäss haben die Transferzahlungen des Umlageverfahrens keinen direkten Einfluss auf das Gesamteinkommen. Andererseits haben wir gesehen, dass sich für das einzelne Individuum die Beitragszahlungen an das Umlageverfahren mit der Wachstumsrate der Wirtschaft verzinsen. Somit wirft das Umlageverfahren bei einem positiven Wirtschaftswachstum Erträge ab, die durch das Gesamteinkommen nicht erfasst werden. In der Einleitung wurde bereits erwähnt, dass sich Beispiele konstruieren lassen, wo das Kapitaldeckungsverfahren zu einem höheren Gesamteinkommen führt, wo aber der Nutzen aus den Konsumplänen kleiner ist als beim Umlageverfahren.

VI Die «Goldene Regel» im geschlossenen System

In einfachen Wachstumsmodellen wird der maximale Konsum genau dann erreicht, wenn Realzins und Wachstumsrate übereinstimmen (siehe z. B. Burmeister, Dobell: «Mathematical Theories of Economic Growth», S. 49).
In diesem Abschnitt wird nachgewiesen, dass im geschlossenen System die «Goldene Regel» erfüllt ist.
Zuerst sind zwei Definitionen erforderlich.

[15] $s^t w\bar{L}_t$ ist die gesamte Lohnsumme; $(r-1)\,[K_{t-1} + s^{t-1} w\bar{L}_{t-1}]$ ist der Zinsertrag in der Periode t. Wegen der linearen Homogenität von $F_t(L_t, K_t)$ ist $\pi^t = 0$. Definitionsgemäss stimmt beim Umlageverfahren die Summe der Beitragszahlungen mit der Summe der Rentenzahlungen überein.

Definition 1:

Eine Folge von Konsumplänen $[q_{\tau,t}]_{\tau=1}^{T}$ $t=0,1,2,\ldots$ heisst realisierbar, falls

(I) $$q_{\tau,t}=s^t q_{\tau,0}\,\forall t \tag{51}$$

(II) Es existiert $k\geqslant 0$, so dass

$$\begin{aligned} L\sum_{\tau=1}^{T} g^{t-\tau+1}q_{\tau,t-\tau+1}+(gs+\gamma-1)s^{t-1}kLg^{t-1}\frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} \\ -s^{t-1}Lg^{t-1}\frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}}f(k)\leqslant 0 \end{aligned} \tag{52}$$

erfüllt ist.

Bemerkungen:

ad (I): s^t bringt die Konsumsteigerungen infolge des Harrod-neutralen technischen Fortschritts zum Ausdruck.

ad (II): $L\sum_{\tau=1}^{T} g^{t-\tau+1}q_{\tau,t-\tau+1}$ ist der Konsum aller in der Periode t lebenden Individuen.

$K_{t-1}:=s^{t-1}kLg^{t-1}\dfrac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}}$ ist der Kapitalstock in der Periode $t-1$.

γK_{t-1} sind die Ersatzinvestitionen und $(gs-1)K_{t-1}$ die Neuinvestitionen in der Periode t.

$s^{t-1}Lg^{t-1}\dfrac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}}f(k)$ ist der Output in der Periode t.

Aus (I), (II) folgt

$$\begin{aligned} L\sum_{\tau=1}^{T}(gs)^{t-\tau+1}q_{\tau,0}+(gs+\gamma-1)s^{t-1}kLg^{t-1}\frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}}- \\ -s^{t-1}Lg^{t-1}\frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}}f(k)\leqslant 0 \end{aligned} \tag{53}$$

oder

$$\sum_{\tau=1}^{T}(gs)^{-(\tau-1)}q_{\tau,0}+\frac{1}{gs}\cdot\frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}}[(gs+\gamma-1)k-f(k)]\leqslant 0. \tag{54}$$

Definition 2:

Eine Folge von realisierbaren Konsumplänen $[q_{\tau,t}]_{\tau=1}^{T}$ $t=0,1,2,\ldots$ ist optimal bezüglich einer linear homogenen Nutzenfunktion U, falls für jede

andere Folge von realisierbaren Konsumplänen $[\hat{q}_{\tau,t}]_{\tau=1}^{T}$ $t=0,1,2,\ldots$ gilt

$$U([q_{\tau,t}]_{\tau=1}^{T}) \geqslant U([\hat{q}_{\tau,t}]_{\tau=1}^{T}) \quad t=0,1,2,\ldots \tag{55}$$

Bemerkung:

Wegen (51) und der linearen Homogenität von U ist (55) äquivalent zu

$$U([q_{\tau,0}]_{\tau=1}^{T}) \geqslant U([\hat{q}_{\tau,0}]_{\tau=1}^{T}). \tag{56}$$

Die «Goldene Regel» lässt sich nun wie folgt formulieren[16].

Satz

Voraussetzung: A1, A2, $r(\bar{b})$ erfüllt (28)

Behauptung: $\left.\begin{array}{ll} [q_{\tau,t}(r(\bar{b}), w(r(\bar{b})), \bar{b})]_{\tau=1}^{T} & t=0,1,2,\ldots \\ \text{ist optimal bezüglich } U & \end{array}\right\} \Leftrightarrow r(\bar{b})=gs$

Bemerkungen:

1) Ein Beitragssatz $\bar{b}$ für das Umlageverfahren lässt also genau dann einen optimalen Konsumplan bezüglich U zu, falls ein zugehöriger Gleichgewichtszins mit der Wachstumsrate übereinstimmt.
2) Sind A1, A2, B1 erfüllt, so ist lokal folgende Darstellung möglich

$$\tilde{U}(b) := \bar{U}(r(b), w(r(b)), b) = U([q_{\tau,t}(r(b), w(r(b)), b)]_{\tau=1}^{T}) \quad \forall b \in V(b_0) \tag{57}$$

(siehe (30), (35))

$r(\bar{b})=gs$, $\bar{b} \in V(b_0)$ impliziert dann $\tilde{U}(\bar{b}) \geqslant \tilde{U}(b) \forall b \in V(b_0)$.

(Die Umkehrung gilt hier nicht, da es sich um eine lokale Darstellung handelt.) Für $r(\bar{b})=gs$ verschwindet der «Finanzierungseffekt», folglich müssen sich «Lohn-» und «Zinseffekt» aufheben.

Beweis des Satzes:

Sei

$$\begin{aligned} \bar{q}_{\tau,t} &:= q_{\tau,t}(r(\bar{b}), w(r(\bar{b})), \bar{b}), \quad \tau=1,\ldots,T, \quad t=0,1,2,\ldots \\ \bar{k} &:= k(r(\bar{b})) \end{aligned} \tag{58}$$

[16] Prof. H. Schneider hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass die «Goldene Regel» auch in diesem Modell gelten sollte.

$\Leftarrow$) Wegen der Budgetungleichung (17), $r(\bar{b})=gs$ und A2 gilt

$$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{\bar{q}_{\tau,t}}{(gs)^{\tau-1}} = s^t w\big(r(\bar{b})\big) \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} \forall t \tag{59}$$

oder

$$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{\bar{q}_{\tau,0}}{(gs)^{\tau-1}} = w\big(r(\bar{b})\big) \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} \tag{60}$$

und infolge der Gleichgewichtsbedingung für den Markt des Output-Gutes

$$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{\bar{q}_{\tau,0}}{(gs)^{\tau-1}} + \frac{1}{gs} \cdot \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} [(gs+\gamma-1)\bar{k} - f(\bar{k})] = 0. \tag{61}$$

Aus (20) und (61) folgt die Realisierbarkeit von $[\bar{q}_{\tau,t}]_{\tau=1}^{T}$ $t=0,1,2,\ldots$ im Sinne von Definition 1.

Annahme: Es existiert $(q_{\tau,t})_{\tau=1}^{T}$, $t=0,1,2,\ldots,k\geqslant 0$, so dass

1) $$q_{\tau,t} = s^t q_{\tau,0} \tag{62}$$

2) $$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{q_{\tau,0}}{(gs)^{\tau-1}} + \frac{1}{gs} \cdot \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} [(gs+\gamma-1)k - f(k)] \leqslant 0 \tag{63}$$

3) $$U([q_{\tau,0}]_{t=1}^{T}) > U([\bar{q}_{\tau,0}]_{\tau=1}^{T}). \tag{64}$$

Da $\bar{q}_{\tau,0}$ eine Lösung des Optimierungsproblems (16), (17) ist, gilt wegen (60), (64)

$$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{q_{\tau,0}}{(gs)^{\tau-1}} > \sum_{\tau=1}^{T} \frac{\bar{q}_{\tau,0}}{(gs)^{\tau-1}}. \tag{65}$$

Wegen A1 und $f'(\bar{k})=gs+\gamma-1$ (5) folgt weiter

$$\frac{1}{gs} \cdot \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} [(gs+\gamma-1)k - f(k)] \geqslant \frac{1}{gs} \cdot \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} [(gs+\gamma-1)\bar{k} - f(\bar{k})]. \tag{66}$$

Aus (61), (65), (66) ergibt sich nun

$$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{q_{\tau,0}}{(gs)^{\tau-1}} + \frac{1}{gs} \cdot \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} [(gs+\gamma-1)k - f(k)] > 0. \tag{67}$$

Mit diesem Widerspruch zu (63) ist der Satz in einer Richtung bewiesen.

$\Rightarrow$) Einerseits ist $[\bar{q}_{\tau,0}]_{\tau=1}^{T}$ eine Lösung des Optimierungsproblems (16), (17). Andererseits ist $[\bar{q}_{\tau,0}]_{\tau=1}^{T}$, $\bar{k}$ aber auch eine Lösung von

$$\max U([q_{\tau,0}]_{\tau=1}^{T})$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{\tau=1}^{T} \frac{q_{\tau,0}}{(gs)^{\tau-1}} + \frac{1}{gs} \cdot \frac{1-g^{-T_1}}{1-g^{-1}} [(gs+\gamma-1)k - f(k)] \leqslant 0. \tag{68}$$

Der zweite Teil des Satzes folgt nun durch einen Vergleich der Kuhn-Tucker-Bedingungen für die beiden Optimierungsprobleme.

VII Beispiel für das geschlossene System

Es sei $F(s^t L_t, K_t) = (s^t L_t)^{1-\beta} K_t^{\beta}$, $\beta \in (0,1)$ und somit $f(k) = k^{\beta}$. Die Präferenzen der Konsumenten sind durch

$$U(q_{1,t}, \ldots, q_{T,t}) = \sum_{\tau=1}^{T} \delta^{\tau-1} \ln q_{\tau,t}, \quad \delta > 0^{17} \tag{69}$$

gegeben.
Für die Produktionsseite gilt

$$k = \left(\frac{\beta}{r-1+\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad w = \frac{1-\beta}{r}\left(\frac{\beta}{r-1+\gamma}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \tag{70}$$

und die Kreditnachfrage pro effektive Arbeitskraft in der Periode t beträgt

$$\frac{1}{s^t \bar{L}_t} N_t(r) = w\left(1+\frac{k}{w}\right) = w\left(1+\frac{r}{1-\beta}\cdot\frac{\beta}{r-1+\gamma}\right). \tag{71}$$

Das Optimierungsproblem des Konsumenten führt zur Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(q_{1,t}, \ldots, q_{T,t}, \lambda) := &\sum_{\tau=1}^{T} \delta^{\tau-1} \ln q_{\tau,t} \\ &-\lambda\left\{\sum_{\tau=1}^{T} \frac{q_{\tau,t}}{r^{\tau-1}} - s^t w \frac{1-\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1}}{1-\frac{s}{r}} - b s^t w F(r,g,s)\right\}\end{aligned} \tag{72}$$

und das Kuhn-Tucker Theorem ergibt für $w > 0$ die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{\tau,t}} = \frac{\delta^{\tau-1}}{q_{\tau,t}} - \lambda r^{-\tau+1} = 0 \quad \tau = 1, \ldots, T \\ &-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} = \sum_{\tau=1}^{T} \frac{q_{\tau,t}}{r^{\tau-1}} - s^t w \frac{1-\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1}}{1-\frac{s}{r}} - b s^t w F(r,g,s) = 0\end{aligned} \tag{73}$$

[17] Sei $g(x) := e^{\frac{1-\delta}{1-\delta^T} x}$. Dann ist $g \circ U$ linear homogen.

oder

$$q_{\tau,t}=\frac{1}{\lambda}(\delta r)^{\tau-1}$$

$$\frac{1}{\lambda}=s^t w\,\frac{1-\delta}{1-\delta^T}\left\{\frac{1-\left(\frac{s}{r}\right)^{T_1}}{1-\frac{s}{r}}+bF(r,g,s)\right\}. \tag{74}$$

Es sei

$$g=s=\delta=1. \tag{75}$$

Dann betragen die Ersparnisse (resp. Reserven für das Kapitaldeckungsverfahren)

$$m_{1,t}=(1-b)w-\frac{1}{\lambda}$$

$$m_{2,t}=(1-b)w(1+r)-\frac{2r}{\lambda}$$

$$\vdots$$

$$m_{\tau,t}=(1-b)w\,\frac{r^\tau-1}{r-1}-\frac{\tau r^{\tau-1}}{\lambda}\qquad 1\leqslant\tau\leqslant T_1$$

$$\vdots$$

$$m_{T_1,t}=(1-b)w\,\frac{r^{T_1}-1}{r-1}-\frac{T_1 r^{T_1-1}}{\lambda}$$

$$\vdots$$

$$m_{\tau,t}=(1-b)w\,\frac{r^\tau-r^{\tau-T_1}}{r-1}-\frac{\tau r^{\tau-1}}{\lambda}+b\,\frac{T_1}{T-T_1}\,w\,\frac{r^{\tau-T_1}-1}{r-1}\qquad T_1+1\leqslant\tau\leqslant T$$

$$\vdots$$

$$m_{T,t}=(1-b)w\,\frac{r^T-r^{T-T_1}}{r-1}-\frac{Tr^{T-1}}{\lambda}+b\,\frac{T_1}{T-T_1}\,w\,\frac{r^{T-T_1}-1}{r-1}$$

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{w}{T}\,\frac{1-r^{-T_1}}{1-r^{-1}}+\frac{bw}{T}\left\{\frac{r^{-T_1}-r^{-T}}{1-r^{-1}}\cdot\frac{T_1}{T-T_1}-\frac{1-r^{-T_1}}{1-r^{-1}}\right\}.$$

Daraus ergibt sich für das Kreditangebot in der Periode t

$$\frac{1}{s^t\bar{L}_t}A_t(r,b)=\frac{1}{T_1}\sum_{\tau=1}^{T}m_{\tau,t-\tau+1}=\frac{1-b}{T_1}\,w\,\frac{r^{T+1}-r}{(r-1)^2}-(1-b)\,\frac{w}{r-1}-$$

$$-\frac{1-b}{T_1}\,w\,\frac{r^{T-T_1+1}-r}{(r-1)^2}-\frac{1}{\lambda T_1}\,\frac{Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1}{(r-1)^2}+$$

$$+b\frac{1}{T-T_1}w\frac{r^{T-T_1+1}-r}{(r-1)^2}-b\frac{w}{r-1}=$$

$$=\frac{1-b}{T_1}w\frac{r^{T+1}-r^{T-T_1+1}}{(r-1)^2}-\frac{w}{r-1}+b\frac{1}{T-T_1}w\frac{r^{T-T_1+1}-r}{(r-1)^2}$$

$$-\frac{1}{T_1}\frac{Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1}{(r-1)^2}\left\{\frac{w}{T}\frac{1-r^{-T_1}}{1-r^{-1}}+\frac{bw}{T}\left[\frac{r^{-T_1}-r^{-T}}{1-r^{-1}}\cdot\frac{T_1}{T-T_1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1-r^{-T_1}}{1-r^{-1}}\right]\right\}.$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$A_t(r,b)=N_t(r)$$

ergibt sich für $b=0$

$$\frac{r^{T+1}-r^{T-T_1+1}}{(r-1)^2}-\frac{T_1}{r-1}-\frac{Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1}{T(r-1)^2}\cdot\frac{1-r^{-T_1}}{1-r^{-1}}$$

$$=T_1\left(1+\frac{r}{1-\beta}\cdot\frac{\beta}{r-1+\gamma}\right)$$

oder

$$\underbrace{\frac{r^{T+1}-r^{T-T_1+1}-T_1r+T_1}{(r-1)^2}-\frac{Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1}{T(r-1)^2}\cdot\frac{1-r^{-T_1}}{1-r^{-1}}}_{:=h(r)}$$

$$=\underbrace{T_1\left(1+\frac{r}{1-\beta}\cdot\frac{\beta}{r-1+\gamma}\right)}_{:=g(r)}$$

$$\lim_{r\to\infty}\big(h(r)-g(r)\big)=+\infty \quad \text{falls} \quad T_1>1,$$

$$\lim_{r\to 1}\big(h(r)-g(r)\big)=\frac{(T+1)T-(T-T_1)(T-T_1+1)}{2}-\frac{T(T+1)}{2T}\cdot\frac{T_1}{1}-$$

$$-T_1\left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$=\frac{T_1}{2}\left(T-T_1-2\left\{1+\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\right\}\right).$$

Somit existiert ein Gleichgewichtszins $r-1>0$, falls

$$T-T_1<2\left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\right).$$

Wählt man

$$T=60,\quad T_1=45,\quad \beta=0.5,\quad \gamma=0.0324104,\quad b=0$$

so führt das zu

$$r=1.03.$$

Nun wollen wir $\frac{dr}{db}$ herleiten.

Aus $A_t(r,b)=N_t(r)$ folgt

$$(1-b)\frac{r^{T+1}-r^{T-T_1+1}}{(r-1)^2}-\frac{T_1}{r-1}+b\frac{T_1}{T-T_1}\cdot\frac{r^{T-T_1+1}-r}{(r-1)^2}$$

$$-\frac{Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1}{T(r-1)^2}\left\{\frac{r-r^{-T_1+1}}{r-1}+b\left[\frac{r^{-T_1}-r^{-T}}{1-r^{-1}}\cdot\frac{T_1}{T-T_1}-\frac{1-r^{-T_1}}{1-r^{-1}}\right]\right\}-$$

$$-T_1\left(1+\frac{r}{1-\beta}\cdot\frac{\beta}{r-1+\gamma}\right)=0$$

und weiter

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{(r-1)\left((T+1)r^T-(T-T_1+1)r^{T-T_1}\right)-2(r^{T+1}-r^{T-T_1+1})}{(r-1)^3}+\frac{T_1}{(r-1)^2}-\\
&-\frac{(r-1)\,[T(T+1)r^T-T(T+1)r^{T-1}]-2\,[Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1]}{T(r-1)^3}\cdot\frac{r-r^{-T_1+1}}{r-1}-\\
&-\frac{Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1}{T(r-1)^2}\cdot\frac{(r-1)\left(1+(T_1-1)r^{-T_1}\right)-(r-r^{-T_1+1})}{(r-1)^2}-T_1\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{(r-1+\gamma)-r}{(r-1+\gamma)^2}
\end{aligned}\right\}\left.\frac{dr}{db}\right|_{b=0}$$

$$-\frac{r^{T+1}-r^{T-T_1+1}}{(r-1)^2}+\frac{T_1}{T-T_1}\cdot\frac{r^{T-T_1+1}-r}{(r-1)^2}-\frac{Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1}{T(r-1)^2}\left(\frac{r^{-T_1}-r^{-T}}{1-r^{-1}}\cdot\frac{T_1}{T-T_1}-\frac{1-r^{-T_1}}{1-r^{-1}}\right)=0$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{(T-1)r^{T+1}-(T+1)r^T-(T-T_1-1)r^{T-T_1+1}+(T-T_1+1)r^{T-T_1}+T_1r-T_1}{(r-1)^3}\\
&-\frac{T(T-1)r^{T+1}-2(T+1)\,(T-1)r^T+T(T+1)r^{T-1}-2}{T(r-1)^3}\cdot\frac{r-r^{-T_1+1}}{r-1}\\
&-\frac{Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1}{T(r-1)^2}\cdot\frac{T_1r^{-T_1+1}-(T_1-1)r^{-T_1}-1}{(r-1)^2}+T_1\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{1-\gamma}{(r-1+\gamma)^2}
\end{aligned}\right\}\left.\frac{dr}{db}\right|_{b=0}=$$

$$=\frac{(T-T_1)r^{T+1}-Tr^{T-T_1+1}+T_1r}{(T-T_1)\,(r-1)^2}+\frac{Tr^{T+1}-(T+1)r^T+1}{T(r-1)^2}\left(\frac{r^{-T_1}-r^{-T}}{1-r^{-1}}\cdot\frac{T_1}{T-T_1}-\frac{1-r^{-T_1}}{1-r^{-1}}\right).$$

Für $r=1.03$, $b=0$ ergibt das

$$\frac{dr}{db}=0.0451901.$$

Nun lässt sich die Nutzenallokation in Abhängigkeit von b untersuchen. Wegen (74), (75) gilt

$$\ln q_{\tau,t}=(\tau-1)\ln r-\ln\lambda(r,w,b) \quad \tau=1,\ldots,T$$

und somit

$$\bar{U}(r,w,b):=\sum_{\tau=1}^{T}\ln q_{\tau,t}=\frac{T(T-1)}{2}\ln r+T\ln\frac{1}{\lambda(r,w,b)}$$

$$\frac{d\bar{U}}{db}=\bar{U}_r\frac{dr}{db}+\bar{U}_w\frac{dw}{dr}\cdot\frac{dr}{db}+\bar{U}_b$$

$$=\left\{\frac{T(T-1)}{2}\cdot\frac{1}{r}+T\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\frac{dr}{db}+T\lambda\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{dw}{dr}\frac{dr}{db}+T\lambda\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Für $b=0$ erhält man

$$\frac{d\bar{U}}{db}=\left\{\frac{T(T-1)}{2r}-T\frac{r^{T_1-2}-T_1r^{-1}+(T_1-1)r^{-2}}{(r^{T_1}-1)(1-r^{-1})}\right\}\frac{dr}{db} \quad \text{«Zinseffekt» (ZE)}$$

$$-T\left\{\frac{1}{r}+\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{1}{r-1+\gamma}\right\}\frac{dr}{db} \quad \text{«Lohneffekt» (LE)}$$

$$+\frac{T}{T-T_1}\cdot\frac{Tr^{-T_1}-T_1r^{-T}-T+T_1}{1-r^{-T_1}} \quad \text{«Finanzierungseffekt» (FE)}$$

$$\left.\begin{aligned}&=719.09304\frac{dr}{db} && \text{ZE}\\ &-1019.6307\frac{dr}{db} && \text{LE}\end{aligned}\right\}-13.581325$$

$$-36.8245 \qquad \text{FE}$$

$$=-300.53762\frac{dr}{db}-36.8245=-50.405834.$$

Die Annahmen B1, B2, B3 sind erfüllt. Deshalb gilt

$$\text{ZE}>0, \quad \text{LE}<0$$

$$\text{FE}<0, \quad \text{da} \quad r=1.03, \quad gs=1.$$

Der «Zinseffekt» wirkt zu Gunsten des Umlageverfahrens und der «Lohneffekt» zu Gunsten des Kapitaldeckungsverfahrens. Die ökonomischen Effekte wirken also entgegengesetzt. Dabei überwiegt in dem hier gerechneten Beispiel der «Lohneffekt», d. h. es gilt

$$\mathrm{LE}+\mathrm{ZE}<0.$$

Diesen beiden ökonomischen Effekten steht der versicherungstechnische «Finanzierungseffekt» gegenüber. Weil in diesem Beispiel der Realzins die Wachstumsrate übertrifft, wirkt sich der «Finanzierungseffekt» zu Gunsten des Kapitaldeckungsverfahrens aus. Obwohl wir hier den Extremfall des geschlossenen Systems betrachten, ist der «Finanzierungseffekt» von grosser Bedeutung, denn es gilt

$$|\mathrm{FE}|>|\mathrm{LE}+\mathrm{ZE}|.$$

Zusätzlich erhält man

$$w=3.88907, \quad k=64.183896$$

$$\frac{dw}{dr}=-\frac{k+w}{r}=-66.09026, \quad \frac{dk}{dr}=\frac{1}{f''(k)}=-2056.8334$$

$$\frac{1}{s^t\bar{L}_t}E_t=w+(r-1)\frac{k+w}{gs}=5.931259 \text{ (Durchschnittseinkommen pro effektive Arbeitskraft)}$$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{s^t\bar{L}_t}E_t=-\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{gs}\right)(k+w)+\frac{r-1}{gs}\cdot\frac{1}{f''(k)}=-61.70500$$

$$\frac{d}{db}\left(\frac{1}{s^t\bar{L}_t}E_t\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{s^t\bar{L}_t}E_t\right)\frac{dr}{db}=-2.788455.$$

VIII Schlussbemerkungen

1) Es war möglich, gleichzeitig versicherungstechnische und ökonomische Aspekte zu berücksichtigen. Der versicherungstechnisch bedingte «Finanzierungseffekt» liess sich exakt analysieren (vgl. Seiten 14, 15). Die ökonomisch bedingten «Zins-» und «Lohneffekte» treten nur im geschlossenen System auf. Zwar lässt sich theoretisch sehr leicht nachweisen, dass Zins- und Lohnänderungen entgegengesetzt sind (8), aber weitere Aussagen waren ohne spezielle Annahmen nicht möglich.
Allgemeine ökonomische Überlegungen und unser Beispiel legen jedoch den Schluss nahe, dass $\frac{dr}{db}$ typischerweise positiv ist. Aus $\frac{dr}{db}>0$ (Annahme B3)

folgt dann, dass sich der «Lohneffekt» zu Gunsten des Kapitaldeckungsverfahrens auswirkt. Der «Zinseffekt» wirkt sich typischerweise (Annahmen B2, B3) zu Gunsten des Umlageverfahrens aus. Bei der Bewertung der beiden ökonomischen Effekte ist auch zu bedenken, dass es sich beim geschlossenen System um einen Extremfall handelt.

2) Es hat sich gezeigt, dass eine rein makroökonomische Analyse dieses Modells problematisch ist. Unter realistischen Annahmen liess sich nachweisen, dass das Durchschnittseinkommen mit steigendem Realzins abnimmt. Deshalb ist man im Falle $\frac{dr}{db} > 0$ versucht, dem Kapitaldeckungsverfahren eindeutig den Vorzug zu geben.

Die mikroökonomische Analyse der Konsumpläne hat aber gezeigt, dass eine solche Schlussweise irreführend sein kann. Die Transferzahlungen des Umlageverfahrens, haben Auswirkungen, welche sich durch das Durchschnittseinkommen nicht adäquat erfassen lassen. Liegt der Realzins unter der Wachstumsrate, so wirkt sich der «Finanzierungseffekt» zu Gunsten des Umlageverfahrens aus. Somit sind Situationen denkbar, in denen das Umlageverfahren vorzuziehen ist und es ist auch möglich, entsprechende Beispiele zu konstruieren.

Die mikroökonomische Analyse veranschaulicht auch die bekannte Tatsache, dass das Kapitaldeckungsverfahren auf dem Realzins $r-1$ und das Umlageverfahren auf der Wachstumsrate der Wirtschaft $gs-1$ basiert. Das erklärt die zentrale Bedeutung der Relation zwischen r und gs.

3) In dieser Arbeit wurde auf die grosse Bedeutung des «Finanzierungseffektes» hingewiesen. Martin Feldstein kommt in «Social Security and Saving: The Extended Life Cycle Theory» (AER, Vol. 66, No. 2, S. 77–86) mit verbaler Argumentation zu ähnlichen Ergebnissen. Zuerst weist er darauf hin, dass das Finanzierungsverfahren Auswirkungen auf die Produktivität und auf die Reallöhne hat (Das entspricht im wesentlichen unserem «Lohneffekt»): « . . . Because there is no accumulated social security fund, the decrease in private saving that is caused by social security entails an equal decrease in national saving.

The very substantial size of the estimated decrease in saving implies a correspondingly large decrease in the nation's capital stock . . .. The larger capital stock would mean greater productivity, higher real wage rates and a higher national income». (S. 85).

Dann kommt er auf das zu sprechen, was in unserem Modell ungefähr dem «Finanzierungseffekt» entspricht:

«But the important implication of the reduction in saving is not the fall in income or wages per se. The reduction in welfare comes from the distortion in saving, the substitution of an asset with a much higher social rate of return». (S. 85).

In unserem einfachen Modell arbeiten wir allerdings nicht mit der «social rate of return», sondern mit dem Realzins. Eine solche Aussage würde dann $r > gs$ voraussetzen.

4) Oft wird auf die Schwierigkeiten des Umlageverfahrens bei einer schwachen Bevölkerungszunahme (resp. -abnahme) hingewiesen. Wird ein schwaches Bevölkerungswachstum nicht durch einen entsprechenden technischen Fortschritt kompensiert, so führt das zu einem schwachen Wirtschaftswachstum. Im offenen System wirkt sich das ungünstig auf das Umlageverfahren aus. Um eine Aussage für das geschlossene System zu machen, müsste man den Zusammenhang zwischen Wachstumsrate und Realzins kennen. Es dürfte sich lohnen, diesen Zusammenhang zu analysieren.

5) Schliesslich muss noch auf die Bedeutung von speziellen Modellannahmen hingewiesen werden.

a) Infolge der neoklassischen Annahmen tritt keine Unterbeschäftigung auf. Die neoklassischen Annahmen scheinen eine vernünftige Approximation an die schweizerischen Verhältnisse zu sein. Aber es handelt sich dabei natürlich nicht um eine exakte Wiedergabe der Realität. Neo-Keynesianische Annahmen würden zu einem völlig verschiedenen Modell führen. Speziell wäre der Zusammenhang zwischen Finanzierungsverfahren und Beschäftigungsniveau zu untersuchen.

b) Im Modell ist nur eine Anlagemöglichkeit[18] zugelassen. In Wirklichkeit existiert ein ganzes Spektrum von Anlagemöglichkeiten, z. B. Obligationen, Aktien, Liegenschaften, Rohstoffe, etc. Eventuelle Anlagerestriktionen können sich ungünstig auf die Rendite auswirken. Beispielsweise ist die reale Rendite von eidgenössischen Obligationen im langjährigen Schnitt ungefähr null (vgl. «Weltwoche», 14. Nov. 1979, Seite 11). Bei einem positiven Wirtschaftswachstum, wäre es dann problematisch, das Kapitaldeckungsverfahren zu empfehlen, falls nur solche und ähnliche Anlagen zugelassen würden.

Andererseits scheinen gewisse Anlagerestriktionen aus Sicherheitsüberlegungen erforderlich.

Die Auswirkungen von Anlagerestriktionen sollten unbedingt praktisch und theoretisch untersucht werden.

[18] In «Behauptungen und Argumente zum Finanzierungsverfahren der 2. Säule», M. Janssen, B. Müller werden zwei Anlagemöglichkeiten berücksichtigt.

Literatur

Aaron, H., "The Social Insurance Paradox", The Canadian Journal of Economics and Political Science, August 1966, S. 371–374.

Burmeister, E., Dobell, A. R., "Mathematical Theories of Economic Growth", Macmillan, London 1970.

Feldstein, M., "Social Security and Saving: The Extended Life Cycle Theory", American Economic Review, May 1976, S. 77–86.

Janssen, M., Müller, B., «Behauptungen und Argumente zum Finanzierungsverfahren der 2. Säule», Inst. f. empirische Wirtschaftsforschung, Zürich 1979.

Quirk, J., Saposnik, R., "Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics", McGraw-Hill, New York 1968.

Dr. Heinz Müller
Forschungsinstitut für Mathematik
ETH-Zentrum
8092 Zürich

Zusammenfassung

Die Arbeit versucht die langfristigen Auswirkungen von Kapitaldeckungs- und Umlageverfahren in einem einfachen Wachstumsmodell zu erfassen. Es handelt sich um ein neoklassisches Modell mit positivem oder negativem Bevölkerungswachstum und Harrod-neutralem technischem Fortschritt. Zwei Extremfälle werden betrachtet.
Im ersten Fall ist ein unbeschränkter Transfer ins Ausland möglich und der Realzins ist exogen vorgegeben (offenes System). Das Kapitaldeckungsverfahren ist dem Umlageverfahren genau dann vorzuziehen, falls der Realzins die Wachstumsrate der Wirtschaft übertrifft.
Im zweiten Fall ist kein Transfer ins Ausland möglich und der Realzins ist eine Gleichgewichtsgrösse, die vom Mischverhältnis von Kapitaldeckungs- und Umlageverfahren abhängt (geschlossenes System). Das Mischverhältnis hat versicherungstechnische («Finanzierungseffekt») und ökonomische Effekte («Lohn-» und «Zinseffekt»). Im geschlossenen System gilt die «Goldene Regel», d.h. ein langfristiges Optimum wird genau dann erreicht, falls das Mischverhältnis der beiden Finanzierungsverfahren zu einem Realzins führt, der mit der Wachstumsrate der Wirtschaft übereinstimmt.

Résumé

Ce travail tente de saisir les effets à long terme des systèmes par capitalisation et par répartition dans un modèle de croissance simplifié. Il s'agit d'un modèle néo-classique comportant un taux d'accroissement positif ou négatif de la population et l'hypothèse d'un progrès technique neutre au sens de Harrod. L'auteur considère deux cas extrêmes.
Dans le premier cas, on considère qu'un transfert à l'étranger est possible sans limitations et que le taux réel d'intérêt est exogène (système ouvert). Le système de capitalisation est alors préférable au système par répartition si et seulement si le taux réel d'intérêt est plus fort que le taux de croissance de l'économie.
Dans le second cas, on suppose qu'un transfert à l'étranger n'est pas possible (système fermé). Le taux réel d'intérêt est déterminé par une condition d'équilibre et dépend de la proportion dans laquelle on mélange les deux systèmes de financement. Cette proportion a des effets actuariels et des effets économiques. Dans le système fermé, la «règle d'or» est satisfaite, c.à.d. un optimum à long terme est atteint si et seulement si le taux réel d'intérêt qui résulte du mélange des deux systèmes de financement coïncide avec le taux de croissance de l'économie.

Summary

This work tries to grasp the long run effects of the social security tax system, and of the system of full funding in a simple growth model. A neoclassical growth model with a positive or negative growth rate of the population and Harrod neutral technical progress is presented. Two extreme cases are considered.
In the first case there are no limits to exports or imports of capital and the real interest rate is exogeneously given (open system). The system of full funding is preferable to the social security tax system if and only if the real interest rate exceeds the growth rate of the economy.
In the second case capital cannot be transferred abroad at all (closed system). The real interest rate is determined by an equilibrium condition and depends on the combination of the two funding systems. This combination has actuarial and economic effects. In the closed system the "golden rule" holds, i.e. a long run optimum is attained if and only if the combination of the two funding systems leads to a real interest rate which is equal to the growth rate of the economy.