

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
<b>Herausgeber:</b>	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
<b>Band:</b>	79 (1979)
<b>Artikel:</b>	Umlageprämie und Lebenserwartung
<b>Autor:</b>	Letsch, Walter
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-967128">https://doi.org/10.5169/seals-967128</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Umlageprämie und Lebenserwartung

von Walter Letsch, Zürich

Versichert sei eine Altersrente in Höhe des Lohnes. Für die Prämie  $\beta^A$  des Ausgabenumlage-Verfahrens gilt bekanntlich

$$\beta^A = \frac{\sum_{x=s}^{\omega} l_x}{\sum_{x=x_0}^{s-1} l_x}, \quad (1)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die Versichertenbestände der Überlebensordnung  $\{l_x\}$  entsprechen.

Mit Hilfe der mittleren Lebenserwartung

$$e_x = \frac{\sum_{u=x}^{\omega} l_u}{l_x} \quad (2)$$

kann die Umlageprämie geschrieben werden als

$$\beta^A = \frac{l_s e_s}{l_{x_0} e_{x_0} - l_s e_s}. \quad (3)$$

Statt  $e_x$  kann natürlich auch  $\mathring{e}_x = e_x - \frac{1}{2}$  gesetzt werden, um dem Umstand

Rechnung zu tragen, dass die Todesfälle im Durchschnitt in der Mitte des Jahres erfolgen. Bei der Formel (3) fällt die formale Ähnlichkeit mit der Formel für die Prämie  $\beta^D$  des Deckungskapital-Verfahrens (Anwartschaftsdeckung) beim Übergang  $l_x e_x \longleftrightarrow N_x$  auf [1]:

$$\beta^D = \frac{N_s}{N_{x_0} - N_s}.$$

Mit der Beziehung  $l_s = l_{x_0} \prod_{x=x_0}^{s-1} p_x$  erhält man

$$\beta^A = \frac{e_s \prod_{x=x_0}^{s-1} p_x}{e_{x_0} - e_s \prod_{x=x_0}^{s-1} p_x}, \quad (4)$$

oder, wenn

$$p_x = \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}$$

gesetzt wird,

$$\beta^A = \frac{\prod_{x=x_0}^{s-1} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}}{e_{x_0} - \prod_{x=x_0}^{s-1} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}} \quad (5)$$

$$\beta^A = \frac{\prod_{x=x_0}^{s-1} (e_x - 1)}{\prod_{x=x_0}^{s-1} e_x - \prod_{x=x_0}^{s-1} (e_x - 1)}. \quad (6)$$

Zur Illustration berechnen wir die Umlageprämie nach den Grundlagen SM/SF 1968/73, wobei wir für die Männer  $x_0 = 25$ ,  $s = 65$  und für die Frauen  $y_0 = 25$ ,  $s = 62$  annehmen wollen. Wir erhalten

$$\beta^A = 0,2804 \quad \text{für Männer und}$$

$$\beta^{A'} = 0,4811 \quad \text{für Frauen.}$$

Die oben hergeleitete Formel (5) bzw. (6) ist natürlich vor allem dann zweckmäßig, wenn nur die Lebenserwartungen, jedoch keine Absterbeordnung, publiziert sind. Dies ist z. B. bei der von M. Frischknecht konstruierten «Theoretischen Sterbetafel 2101» [2] der Fall, der eine Extrapolation der mittleren Lebenserwartungen zugrunde liegt. Die Berechnung der Umlageprämien ergibt

$$\beta^A = 0,6176 \quad \text{für Männer und}$$

$$\beta^{A'} = 0,9176 \quad \text{für Frauen.}$$

Diese Prämien liegen für Männer 120%, für Frauen 91% höher als jene nach den Tafeln SM/SF 1968/73, was die demographische Abhängigkeit des Ausgabenumlage-Verfahrens deutlich demonstriert.

Wir wollen uns nun noch der Frage zuwenden, um wieviel sich die Umlageprämie  $\beta^A$  erhöht, wenn die Lebenserwartung ansteigt. Ist vom Ansteigen der Lebenserwartung um  $\Delta$  Jahre innerhalb eines bestimmten Zeitraums die Rede, so versteht man darunter nicht eine Erhöhung im Sinne eines Übergangs von  $e_x$  zu  $e_x + \Delta$  für alle  $x$ . Eine solche Erhöhung würde – ähnlich wie auch ein Übergang von  $e_x$  zu  $(1 + \delta)e_x$  für alle  $x$  – nicht dem tatsächlichen Geschehen entsprechen. Überdies wäre dann auch die neue Umlageprämie nicht in geschlossener und praktikabler Form darstellbar.

Unter dem Ansteigen der Lebenserwartung um  $\Delta$  Jahre versteht man vielmehr die Erhöhung der mittleren Lebensdauer, d. h. der vollständigen mittleren Lebenserwartung der Neugeborenen,  $e_0$ . Eine solche Erhöhung wirkt sich in den Altern  $x > 0$  als Indexverschiebung aus: Erhöht sich die Lebenserwartung um  $\Delta$  Jahre, so kann einem  $x$ -Jährigen im Sinn einer vernünftigen Näherung neu die Lebenserwartung eines  $(x - \Delta)$ -Jährigen zugeordnet werden.

Eine ähnliche Methode der Altersverschiebung wird, vor allem in Deutschland, auch angewendet, um aus Periodentafeln Generationentafeln zu erzeugen.

Wir untersuchen also  $\beta^A(e_{x-\Delta})$  ausgehend von  $\beta^A(e_x)$ . Für praktische Zwecke reicht es völlig, den Fall  $\Delta = 1$  zu berechnen, da ja eine weitere Rekursion jederzeit möglich ist. Wir erhalten

$$\beta_{\Delta=1}^A = \frac{\prod_{x=x_0-1}^{s-2} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}}{\frac{e_{x_0-1}}{e_{s-1}} - \prod_{x=x_0-1}^{s-2} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}} \quad (7)$$

$$\beta_{\Delta=1}^A = \frac{\frac{e_{x_0-1} - 1}{e_{s-1}} \cdot \frac{e_s}{e_{x_0}} \prod_{x=x_0}^{s-1} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}}{\frac{e_{x_0-1}}{e_{s-1}} \cdot \frac{e_{x_0-1} - 1}{e_{s-1} - 1} \cdot \frac{e_s}{e_{x_0}} \prod_{x=x_0}^{s-1} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}}}. \quad (8)$$

Aus (5) erhält man

$$\frac{e_s}{e_{x_0}} \prod_{x=x_0}^{s-1} \frac{e_x - 1}{e_{x+1}} = \frac{\beta^A}{1 + \beta^A}.$$

Setzt man dies in (8) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\beta_{A=1}^A = \frac{\beta^A (e_{x_0-1} - 1) e_{s-1}}{(e_{s-1} - 1) e_{x_0-1} - \beta^A (e_{x_0-1} - e_{s-1})}. \quad (9)$$

Mit den Tafeln SM/SF 1968/73 erhalten wir

$$\beta_{A=1}^A = 1.068 \beta^A \quad \text{für Männer und}$$

$$\beta_{A=1}^{A'} = 1.050 \beta^{A'} \quad \text{für Frauen.}$$

Wir erkennen, dass sich die Erhöhung der Lebenserwartung um ein Jahr bei den Männern stärker auswirkt als bei den Frauen, was verständlich ist, da die Männer die kleinere Lebenserwartung aufweisen. Anderseits ist aber die Lebenserwartung der Frauen in den vergangenen Jahren deutlich stärker angestiegen als jene der Männer [3], so dass sich innerhalb eines bestimmten Zeitraumes etwa die gleiche Erhöhung der Umlageprämien für Männer und Frauen ergibt.

## Literatur

- [1] *Letsch, W.*: Beiträge und Reserven von Pensionskassen bei Berücksichtigung der wirtschaftlichen Entwicklung. 21. Int. Kongress der Versicherungsmathematiker, Thema 5.
- [2] *Frischknecht, M.*: Mittlere Lebenserwartung der Schweizer und Schweizerinnen nach Generationen-Sterbetafeln. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 72, Heft 2, 1972.
- [3] *Eidgenössisches Statistisches Amt*: Schweizerische Sterbetafel 1968/73. Statistische Quellenwerke der Schweiz/Heft 559, 1975.

Walter Letsch  
 VITA Lebensversicherungs-  
 Aktiengesellschaft  
 Mythenquai 10  
 8022 Zürich

## **Zusammenfassung**

Der Autor zeigt, wie die Prämie des Ausgabenumlageverfahrens mit Hilfe der Lebenserwartungen ausgedrückt werden kann. Anschliessend wird die Erhöhung dieser Prämie bei einer Zunahme der Lebenserwartung ermittelt.

## **Résumé**

L'auteur montre comment exprimer la prime d'une rente selon le système de la répartition des dépenses au moyen des espérances de vie, puis comment exprimer l'augmentation de cette prime lorsque l'espérance de vie elle-même augmente.

## **Riassunto**

L'autore dimostra come si puo esprimere il premio di una rendita calcolata secondo il sistema di ripartizione delle spese, per mezzo di «speranze di vita». Indica in seguito come si determina l'aumento di detto premio quando aumenta la speranza di vita stessa.

## **Summary**

The author shows how the premium of an expense contributory system can be expressed by means of expected mean lives. Then the increase of such premiums as a function of increased expected mean life is assessed.

