

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 79 (1979)

Artikel: Calcul du taux d'intérêt réel d'une opération financière

Autor: Jaumain, Christian

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-967126>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Calcul du taux d'intérêt réel d'une opération financière

Par Christian Jaumain, Belgique

Introduction

On sait que le calcul précis du taux d'intérêt d'une opération financière est souvent laborieux. Même dans le cas particulier où les échéances sont équidistantes, le problème, qui conduit alors à une équation algébrique, n'est pas susceptible d'une résolution algébrique dès que le nombre de ces échéances est supérieur à 5, c'est-à-dire dès que le degré de l'équation est supérieur à 4. C'est donc vers des méthodes approchées ou vers des méthodes d'itération que se sont orientées les recherches, parmi lesquelles il faut citer celles de *L. Maingie* [1] et de *B. de Finetti* [2].

Le défaut commun à toutes les méthodes approchées est de manquer de précision alors que, souvent, la décision en matière d'emprunt, d'investissement ou d'arbitrage exige une approximation inférieure à quelques centièmes pour cent dans le calcul du taux d'intérêt. Quant aux méthodes d'itération, elles sont généralement spécifiques du type d'opération financière envisagée et elles ne convergent parfois que lentement vers la solution recherchée. Les unes et les autres ne s'appliquent le plus souvent qu'à des opérations financières particulières, faisant intervenir des échéances équidistantes et des montants constants ou variant dans le temps selon une loi simple.

La méthode proposée dans la présente étude repose sur l'utilisation des calculatrices électroniques, maintenant largement répandue, permettant le calcul numérique des fonctions exponentielles. Cette méthode est générale: elle s'applique à toute opération financière, quels qu'en soient les montants, le nombre et l'époque des échéances, et sa précision ne trouve de limite que dans la taille de l'appareil utilisé. Elle met le calcul exact du taux d'intérêt d'une opération financière à la portée de tout utilisateur d'une calculatrice électronique de poche, même non programmable.

1. Position du problème

Soit les capitaux $C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_n$ d'échéance respective $r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n$, tels que:

$$(C_1, r_1) + \dots + (C_n, r_n) = (D_1, s_1) + \dots + (D_n, s_n). \quad (1)$$

La relation (1) exprime qu'il revient au même de posséder – ou d'être redevable – des capitaux C_1, \dots, C_n aux instants respectifs r_1, \dots, r_n et de posséder – ou d'être redevable – des capitaux D_1, \dots, D_n aux instants s_1, \dots, s_n . Ainsi par exemple, i étant l'intérêt annuel payable à terme échu d'un capital unitaire :

$$(1, 0) = (i, 1) + \dots + (i, n-1) + (1 + i, n),$$

$$(a_{\overline{n}}, 0) = (1, 1) + \dots + (1, n).$$

Par capital, on entend un montant financier de n'importe quelle nature, par exemple un capital proprement dit ou des intérêts.

Sans nuire à la généralité, on peut, quel que soit k , supposer :

(i) $C_k, D_k \geq 0$, quitte à transposer des termes de la relation (1) d'un membre dans l'autre ;

(ii) le nombre des C_k égal à celui des D_k , certains d'entre eux pouvant être nuls. Une suite de capitaux $C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_n$ vérifiant la relation (1) est dite en équilibre financier. Cet équilibre financier est réalisé pour un (ou zéro, ou plusieurs) taux d'intérêt particulier que la présente étude a précisément pour objet de déterminer. A cet effet, il sera fait usage de la notion d'échéance moyenne d'une suite de capitaux.

2. Echéance moyenne

2.1. *Définition.* On appelle échéance moyenne des capitaux non négatifs S_1, \dots, S_n d'échéance respective t_1, \dots, t_n l'instant t tel que :

$$(S_1, t_1) + \dots + (S_n, t_n) = (S, t), \quad (2)$$

où

$$S = S_1 + \dots + S_n. \quad (3)$$

C'est par exemple l'instant auquel un débiteur pourrait s'acquitter des dettes S_1, \dots, S_n échéant respectivement aux instants t_1, \dots, t_n , par un paiement unique S égal à la somme arithmétique des dettes considérées.

Il vient, en égalant les valeurs actuelles à l'instant t :

$$S v^t = \sum_{k=1}^n S_k v^{t_k}, \quad v = \frac{1}{1+i}, \quad (4)$$

d'où :

$$t = -\frac{1}{\ln u} \ln \frac{\sum_{k=1}^n S_k v^{t_k}}{S}, \quad u = \frac{1}{v}. \quad (5)$$

L'échéance moyenne dépend évidemment du taux annuel d'intérêt adopté pour le calcul des valeurs actuelles. De manière plus précise, on dit que t est l'échéance moyenne au taux annuel d'intérêt i des capitaux S_1, \dots, S_n d'échéance respective t_1, \dots, t_n .

2.2. *Cas particulier où $i = 0$.* En particulier, si $i = 0$, c'est-à-dire si $v = 1$, l'échéance moyenne t , considérée comme fonction de i , prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. En appliquant le théorème de l'*Hospital*, on obtient la vraie valeur:

$$t_0 = t(i = 0) = \lim_{v \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{v}} \frac{\sum_{k=1}^n S_k t_k v^{t_k-1}}{S},$$

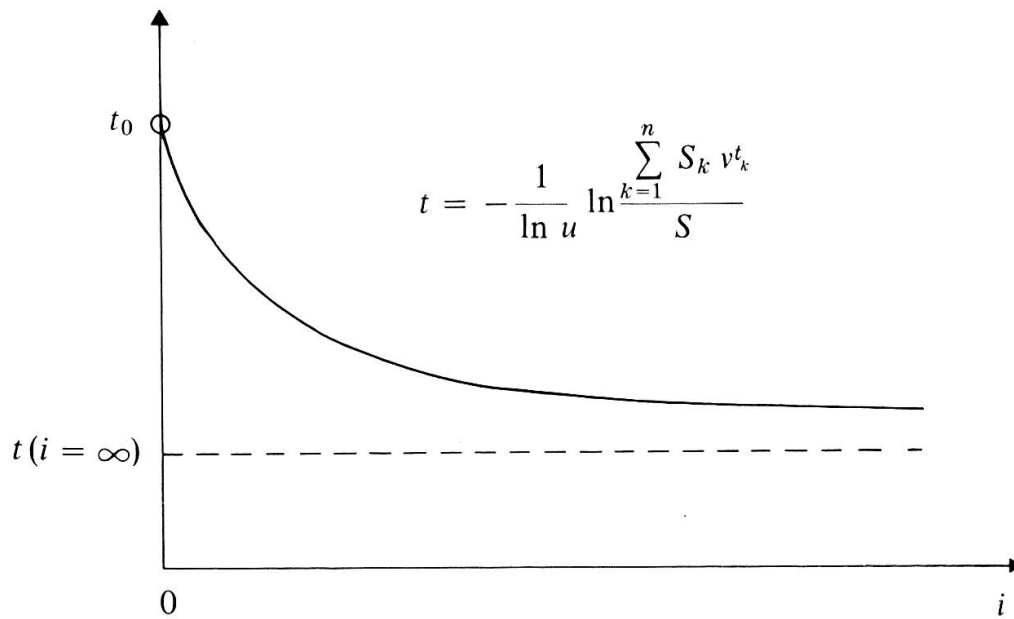
c'est-à-dire:

$$t_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} S_k t_k}{S}. \quad (6)$$

t_0 est donc le barycentre des points t_1, t_2, \dots, t_n de masse respective S_1, \dots, S_n . Ce résultat fournit une interprétation financière remarquable du concept mathématique de vraie valeur. Si $i = 0$, l'équation (4) est vérifiée quel que soit t : l'emprunteur peut s'acquitter à tout instant des dettes S_1, \dots, S_n par le paiement unique S . Dans ce cas, on peut donc assigner à t une valeur quelconque. Parmi cette infinité de valeurs qui toutes conviennent, la vraie valeur t_0 est la seule qui rende la fonction $t(i)$ continue quand $i = 0$.

2.3. *Etude de l'échéance moyenne en fonction du taux d'intérêt.* On démontre que t_0 est compris entre le plus petit et le plus grand des t_k et que, lorsque i tend vers l'infini, t tend vers le plus petit des t_k .

On démontre également que la dérivée de $t(v)$ par rapport à v est nulle pour $v = 1$ c'est-à-dire pour $i = 0$ et est positive pour $v < 1$, de sorte que t est une fonction croissante de v , donc décroissante de i . La courbe représentative de la fonction $t(i)$ se présente dès lors comme suit.



3. Calcul du taux d'intérêt réel

Revenons à l'équation (1).

Au taux d'intérêt $i = 0$, soit respectivement ϱ_0 et σ_0 l'échéance moyenne des capitaux C_1, \dots, C_n et des capitaux D_1, \dots, D_n :

$$\varrho_0 = \frac{\sum_{k=1}^n C_k r_k}{C}, \quad C = C_1 + \dots + C_n, \quad (7)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{k=1}^n D_k s_k}{D}, \quad D = D_1 + \dots + D_n. \quad (8)$$

L'équation (1) devient:

$$(C, \varrho_0) = (D, \sigma_0).$$

Le taux annuel d'intérêt i_0 résultant de cette équation est:

$$i_0 = \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{\sigma_0 - \varrho_0}} - 1. \quad (9)$$

Au taux i_0 , soit respectivement ϱ_1 et σ_1 l'échéance moyenne des capitaux C_1, \dots, C_n et des capitaux D_1, \dots, D_n :

$$\varrho_1 = -\frac{1}{\ln u_0} \ln \frac{\sum_{k=1}^n C_k v_0^{rk}}{C},$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\ln u_0} \ln \frac{\sum_{k=1}^n D_k v_0^{sk}}{D}.$$

L'équation (1) devient:

$$(C, \varrho_1) = (D, \sigma_1),$$

d'où:

$$i_1 = \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{\sigma_1 - \varrho_1}} - 1,$$

et ainsi de suite.

Si la suite $\{i_0, i_1, \dots\}$ converge, où:

$$i_j = \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{\sigma_j - \varrho_j}} - 1, \quad (10)$$

$$\varrho_j = -\frac{1}{\ln u_{j-1}} \ln \frac{\sum_{k=1}^n C_k v_{j-1}^{rk}}{C}, \quad (11)$$

$$\sigma_j = -\frac{1}{\ln u_{j-1}} \ln \frac{\sum_{k=1}^n D_k v_{j-1}^{sk}}{D}, \quad (12)$$

alors la limite est solution de l'équation (1).

Exemple 1.

investissement	époque
99	0

produit de l'investissement	époque
7	1
7	2
7	3
7	4
7	5
25	6
25	7
25	8
25	9
26	10

On trouve:

$$\begin{aligned}i_0 &= 0,0727 \\i_1 &= 0,0753 \\i_2 &= 0,0754,\end{aligned}$$

alors que:

$$i_{\text{exact}} = 0,07544020\dots$$

Exemple 2.

investissement	époque
50	0
75	1
150	$\frac{3}{2}$
300	5

produit de l'investissement	époque
50	$\frac{2}{40}$
200	$\frac{12}{25}$
500	$\frac{3}{3}$

On trouve:

$$\begin{aligned}i_0 &= 0,0801 \\i_1 &= 0,0826,\end{aligned}$$

alors que:

$$i_{\text{exact}} = 0,08264663\dots$$

4. Cas particuliers

4.1. La plupart des cas particuliers, comme le calcul du taux d'intérêt connaissant $a_{\overline{n}}$ ou $s_{\overline{n}}$, ou le calcul du taux d'intérêt des emprunts obligataires, font l'objet de méthodes spécifiques souvent ingénieuses, mais toujours particulières. De plus, comme c'est le cas dans le calcul du taux d'intérêt connaissant $s_{\overline{n}}$, la convergence est parfois très lente.

Dans le cas de versements constants, effectués à échéances équidistantes, la formule générale se réduit à une forme plus aisée à utiliser sur calculatrice électronique non programmable.

4.2. *Calcul de i connaissant $a_{\bar{n}}$.* En plaçant l'origine des temps 1 en avant l'échéance du premier paiement, les relations (9) et (10) se réduisent respectivement à :

$$i_0 = \left(\frac{n}{a_{\bar{n}}} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1, \quad (13)$$

$$i_j = \left(\frac{n}{a_{\bar{n}}} \right)^{\frac{\ln u_{j-1}}{\ln \frac{a_{\bar{n}}, i_{j-1}}{n}}} - 1. \quad (14)$$

Exemple. Soit $a_{\bar{20}} = 12,46221035$. On trouve :

$$\begin{aligned} i_0 &= 0,0461 \\ i_1 &= 0,0497 \\ i_2 &= 0,0500, \end{aligned}$$

alors que :

$$i_{\text{exact}} = 0,05000000.$$

4.3. *Calcul de i connaissant $s_{\bar{n}}$.* En adoptant comme origine des temps l'échéance du premier paiement, les relations (9) et (10) se réduisent respectivement à :

$$i_0 = \left(\frac{s_{\bar{n}}}{n} \right)^{\frac{2}{n-1}} - 1, \quad (15)$$

$$i_j = \left(\frac{s_{\bar{n}}}{n} \right)^{\frac{\ln u_{j-1}}{\ln \frac{s_{\bar{n}}, i_{j-1}}{n}}} - 1. \quad (16)$$

Exemple. Soit $s_{\bar{20}} = 33,06595414$. On trouve :

$$\begin{aligned} i_0 &= 0,0543 \\ i_1 &= 0,0497 \\ i_2 &= 0,0500, \end{aligned}$$

alors que :

$$i_{\text{exact}} = 0,05000000.$$

5. Extension aux opérations à caractère aléatoire

La méthode s'applique aux opérations faisant intervenir des probabilités (opérations viagères, valeurs à rendement aléatoire, emprunts à lots, etc. ...), à condition de considérer les C_k , D_k comme le produit des valeurs nominales des capitaux par la probabilité correspondante, supposée connue.

6. Critères d'existence d'une solution

6.1. *Cas général.* Sans nuire à la généralité, outre les hypothèses (i) et (ii) émises au 1^{er} paragraphe, on peut, quel que soit k , supposer :

- (iii) $r_k, s_k > 0$, quitte à changer l'origine des temps, ce qui n'altère pas l'équilibre financier ;
- (iv) $r_k \neq s_k$, quitte à remplacer C_k ou D_k par la différence positive $C_k - D_k$ ou $D_k - C_k$.

Chacun des 2 membres de l'équation (1), écrite sous la forme :

$$\sum_{k=1}^n C_k v^{r_k} = \sum_{k=1}^n D_k v^{s_k} \quad (17)$$

est, comme combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions monotones décroissantes, une fonction monotone décroissante. Pour $i = 0$, il est respectivement égal à C et à D . Pour $i = \infty$, il est nul. En représentant respectivement par r_m et s_m le plus petit des r_k et le plus petit des s_k , on a :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n C_k v^{r_k} - \sum_{k=1}^n D_k v^{s_k} \right) = \pm 0$$

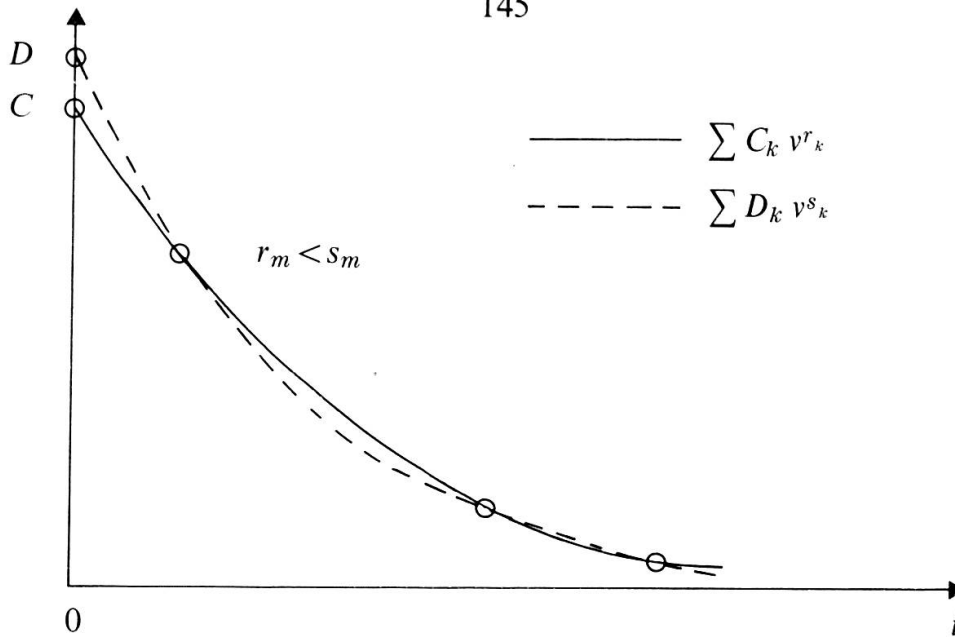
selon que $r_m < s_m$ ou que $r_m > s_m$.

On a alors le critère d'existence suivant.

Critère 1. Si $C < D$ (resp. $>$) et si $r_m < s_m$ (resp. $>$), alors l'équation (1) admet au moins une solution i positive (voir fig.).

6.2. *Cas particulier.* Dans le cas particulier où tous les C_k sont nuls à l'exception d'un seul, C , d'échéance r , l'équation (1) prend la forme :

$$C v^r = \sum_{k=1}^n D_k v^{s_k}. \quad (1')$$



On démontre alors les critères d'existence et d'unicité suivants.

Critère 2. Si $C < D$ et si $r < s_m$, où s_m est le plus petit des s_k , alors l'équation (1') admet une et une seule solution i positive.

Critère 3. Si $C > D$ et si $r > s_M$, où s_M est le plus grand des s_k , alors l'équation (1') admet une et une seule solution i positive.

6.3. Remarques

6.3.1. En toute généralité, il se peut que l'équation (1) ou (17) n'ait pas de solution, ou en ait une ou plusieurs. On peut facilement construire des cas où l'équation a plusieurs solutions, celles-ci étant fixées d'avance. En pratique cependant, il n'existe généralement qu'une solution acceptable et une seule.

6.3.2. Il peut arriver que la suite $\{i_0, i_1, \dots\}$ ne converge pas vers la solution acceptable qui, cependant, existe. Il convient alors d'adopter une valeur initiale différente de $i = 0$.

Auteurs cités

[1] *L. Maingie*: La Théorie de l'Intérêt et ses Applications, Wesmael-Charlier, Bruxelles, 1932.

[2] *B. de Finetti*: Leçons de mathématiques financières, Dunod, Paris, 1969.

Le lecteur désirant un programme, écrit en langage FORTRAN, fournissant la valeur de i calculée conformément à la présente étude, peut l'obtenir en écrivant à l'auteur.

Christian Jaumain

Directeur pour la Belgique de VITA

Chargé de cours à l'Université de MONS

La Closerie, rue Castaigne 2, B-1310 La Hulpe

Zusammenfassung

Die Arbeit beschreibt eine Methode zur Berechnung des Zinssatzes bei einer finanziellen Operation. Diese Methode ist allgemein: Sie lässt sich bei jeder beliebigen finanziellen Operation anwenden, unabhängig von den Beträgen, der Anzahl Transaktionen und deren Daten. Dasselbe gilt für Operationen, deren Zahlungen mit vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten versehen sind.

Résumé

L'article propose une méthode de calcul du taux d'intérêt réel d'une opération financière. La méthode est générale: elle s'applique à toute opération financière, quels qu'en soient les montants, le nombre et l'époque des échéances. Elle s'étend aux opérations faisant intervenir des probabilités de paiement supposées connues.

Riassunto

L'articolo propone un metodo di calcolo del tasso d'interesse reale di una operazione finanziaria. Il metodo è generale: si applica ad ogni operazione finanziaria, qualunque siano gli importi, il numero e le date di scadenza. Si estende anche ad operazioni che fanno intervenire delle probabilità di pagamento presupposte note.

Summary

The article proposes a calculation's method of the actual rate of interest of a financial operation. The method is general: it applies itself to any financial operation, whatever the amounts, number and dates of payment may be. It spreads to operations where probabilities of payment supposed known appear.