Calcul du taux d'intérêt réel d'une opération financière

Calcul du taux d'intérêt réel d'une opération financière

Par Christian Jaumain, Belgique

Introduction

On sait que le calcul précis du taux d'intérêt d'une opération financière est souvent laborieux. Même dans le cas particulier où les échéances sont équidistantes, le problème, qui conduit alors à une équation algébrique, n'est pas susceptible d'une résolution algébrique dès que le nombre de ces échéances est supérieur à 5, c'est-à-dire dès que le degré de l'équation est supérieur à 4. C'est donc vers des méthodes approchées ou vers des méthodes d'itération que se sont orientées les recherches, parmi lesquelles il faut citer celles de *L. Maingie* [1] et de *B. de Finetti* [2].
Le défaut commun à toutes les méthodes approchées est de manquer de précision alors que, souvent, la décision en matière d'emprunt, d'investissement ou d'arbitrage exige une approximation inférieure à quelques centièmes pour cent dans le calcul du taux d'intérêt. Quant aux méthodes d'itération, elles sont généralement spécifiques du type d'opération financière envisagée et elles ne convergent parfois que lentement vers la solution recherchée. Les unes et les autres ne s'appliquent le plus souvent qu'à des opérations financières particulières, faisant intervenir des échéances équidistantes et des montants constants ou variant dans le temps selon une loi simple.
La méthode proposée dans la présente étude repose sur l'utilisation des calculatrices électroniques, maintenant largement répandue, permettant le calcul numérique des fonctions exponentielles. Cette méthode est générale: elle s'applique à toute opération financière, quels qu'en soient les montants, le nombre et l'époque des échéances, et sa précision ne trouve de limite que dans la taille de l'appareil utilisé. Elle met le calcul exact du taux d'intérêt d'une opération financière à la portée de tout utilisateur d'une calculatrice électronique de poche, même non programmable.

1. Position du problème

Soit les capitaux $C_1, \ldots, C_n, D_1, \ldots, D_n$ d'échéance respective $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n$, tels que:

$$(C_1, r_1) + \ldots + (C_n, r_n) = (D_1, s_1) + \ldots + (D_n, s_n). \tag{1}$$

La relation (1) exprime qu'il revient au même de posséder – ou d'être redevable – des capitaux $C_1, \ldots, C_n$ aux instants respectifs $r_1, \ldots, r_n$ et de posséder – ou d'être redevable – des capitaux $D_1, \ldots, D_n$ aux instants $s_1, \ldots, s_n$. Ainsi par exemple, i étant l'intérêt annuel payable à terme échu d'un capital unitaire:

$$(1, 0) = (i, 1) + \ldots + (i, n-1) + (1+i, n),$$

$$(a_{\overline{n|}}, 0) = (1, 1) + \ldots + (1, n).$$

Par capital, on entend un montant financier de n'importe quelle nature, par exemple un capital proprement dit ou des intérêts.

Sans nuire à la généralité, on peut, quel que soit k, supposer:

(i) $C_k, D_k \geq 0$, quitte à transposer des termes de la relation (1) d'un membre dans l'autre;

(ii) le nombre des C_k égal à celui des D_k, certains d'entre eux pouvant être nuls.

Une suite de capitaux $C_1, \ldots, C_n, D_1, \ldots, D_n$ vérifiant la relation (1) est dite en équilibre financier. Cet équilibre financier est réalisé pour un (ou zéro, ou plusieurs) taux d'intérêt particulier que la présente étude a précisément pour objet de déterminer. A cet effet, il sera fait usage de la notion d'échéance moyenne d'une suite de capitaux.

2. Echéance moyenne

2.1. *Définition.* On appelle échéance moyenne des capitaux non négatifs $S_1, \ldots, S_n$ d'échéance respective $t_1, \ldots, t_n$ l'instant t tel que:

$$(S_1, t_1) + \ldots + (S_n, t_n) = (S, t), \tag{2}$$

où

$$S = S_1 + \ldots + S_n. \tag{3}$$

C'est par exemple l'instant auquel un débiteur pourrait s'acquitter des dettes $S_1, \ldots, S_n$ échéant respectivement aux instants $t_1, \ldots, t_n$, par un paiement unique S égal à la somme arithmétique des dettes considérées.

Il vient, en égalant les valeurs actuelles à l'instant t:

$$S\, v^t = \sum_{k=1}^{n} S_k\, v^{t_k}, \qquad v = \frac{1}{1+i}, \tag{4}$$

d'où:

$$t = -\frac{1}{\ln u} \ln \frac{\sum_{k=1}^{n} S_k\, v^{t_k}}{S}, \qquad u = \frac{1}{v}. \tag{5}$$

L'échéance moyenne dépend évidemment du taux annuel d'intérêt adopté pour le calcul des valeurs actuelles. De manière plus précise, on dit que t est l'échéance moyenne au taux annuel d'intérêt i des capitaux $S_1, \ldots, S_n$ d'échéance respective $t_1, \ldots, t_n$.

2.2. *Cas particulier où* $i = 0$. En particulier, si $i = 0$, c'est-à-dire si $v = 1$, l'échéance moyenne t, considérée comme fonction de i, prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. En appliquant le théorème de l'*Hospital*, on obtient la vraie valeur:

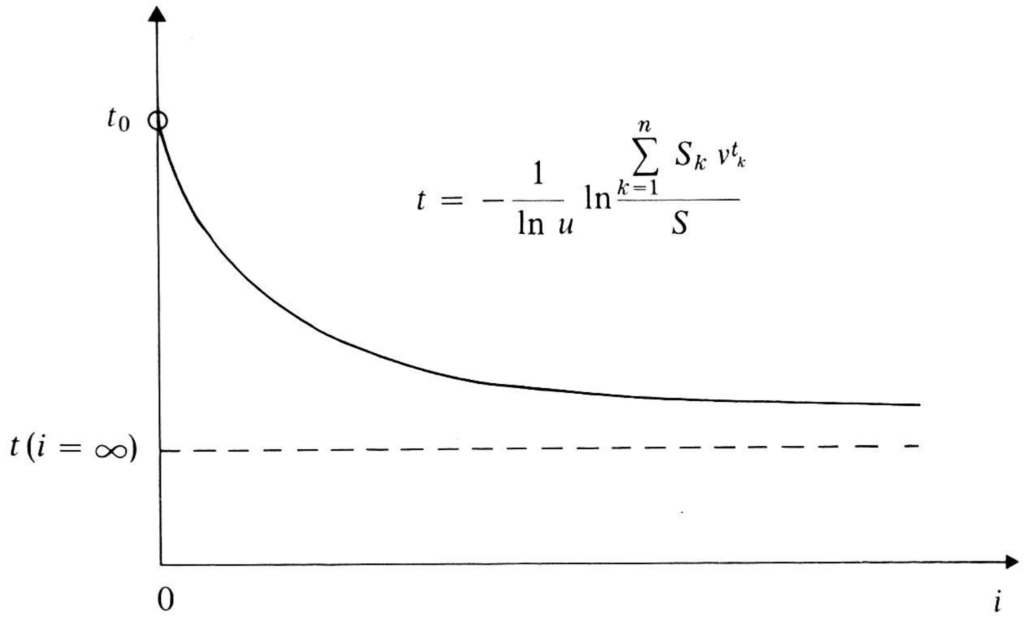
$$t_0 = t(i = 0) = \lim_{v \to 1} \frac{1}{\frac{1}{v}} \frac{\sum_{k=1}^{n} S_k \, t_k \, v^{t_k - 1}}{S},$$

c'est-à-dire:

$$t_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} S_k \, t_k}{S}. \tag{6}$$

t_0 est donc le barycentre des points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de masse respective $S_1, \ldots, S_n$. Ce résultat fournit une interprétation financière remarquable du concept mathématique de vraie valeur. Si $i = 0$, l'équation (4) est vérifiée quel que soit t: l'emprunteur peut s'acquitter à tout instant des dettes $S_1, \ldots, S_n$ par le paiement unique S. Dans ce cas, on peut donc assigner à t une valeur quelconque. Parmi cette infinité de valeurs qui toutes conviennent, la vraie valeur t_0 est la seule qui rende la fonction $t(i)$ continue quand $i = 0$.

2.3. *Etude de l'échéance moyenne en fonction du taux d'intérêt.* On démontre que t_0 est compris entre le plus petit et le plus grand des t_k et que, lorsque i tend vers l'infini, t tend vers le plus petit des t_k.
On démontre également que la dérivée de $t(v)$ par rapport à v est nulle pour $v = 1$ c'est-à-dire pour $i = 0$ et est positive pour $v < 1$, de sorte que t est une fonction croissante de v, donc décroissante de i. La courbe représentative de la fonction $t(i)$ se présente dès lors comme suit.



3. Calcul du taux d'intérêt réel

Revenons à l'équation (1).
Au taux d'intérêt $i = 0$, soit respectivement ϱ_0 et σ_0 l'échéance moyenne des capitaux $C_1, \ldots, C_n$ et des capitaux $D_1, \ldots, D_n$:

$$\varrho_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k r_k}{C}, \qquad C = C_1 + \ldots + C_n, \tag{7}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k s_k}{D}, \qquad D = D_1 + \ldots + D_n. \tag{8}$$

L'équation (1) devient:

$$(C, \varrho_0) = (D, \sigma_0).$$

Le taux annuel d'intérêt i_0 résultant de cette équation est:

$$i_0 = \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{\sigma_0 - \varrho_0}} - 1. \tag{9}$$

Au taux i_0, soit respectivement ϱ_1 et σ_1 l'échéance moyenne des capitaux $C_1, \ldots, C_n$ et des capitaux $D_1, \ldots, D_n$:

$$\varrho_1 = -\frac{1}{\ln u_0} \ln \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k v_0^{r_k}}{C},$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\ln u_0} \ln \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k v_0^{s_k}}{D}.$$

L'équation (1) devient:

$$(C, \varrho_1) = (D, \sigma_1),$$

d'où:

$$i_1 = \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{\sigma_1 - \varrho_1}} - 1,$$

et ainsi de suite.

Si la suite $\{i_0, i_1, \ldots\}$ *converge, où:*

$$i_j = \left(\frac{D}{C}\right)^{\frac{1}{\sigma_j - \varrho_j}} - 1, \tag{10}$$

$$\varrho_j = -\frac{1}{\ln u_{j-1}} \ln \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k v_{j-1}^{r_k}}{C}, \tag{11}$$

$$\sigma_j = -\frac{1}{\ln u_{j-1}} \ln \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k v_{j-1}^{s_k}}{D}, \tag{12}$$

alors la limite est solution de l'équation (1).

Exemple 1.

investissement	époque
99	0

produit de l'investissement	époque
7	1
7	2
7	3
7	4
7	5
25	6
25	7
25	8
25	9
26	10

On trouve:

$$i_0 = 0{,}0727$$
$$i_1 = 0{,}0753$$
$$i_2 = 0{,}0754,$$

alors que:

$$i_{\text{exact}} = 0{,}07544020\ldots$$

Exemple 2.

investissement	époque
50	0
75	1
150	$\frac{3}{2}$
300	5

produit de l'investissement	époque
50	2
200	$\frac{40}{12}$
500	$\frac{25}{3}$

On trouve:

$$i_0 = 0{,}0801$$
$$i_1 = 0{,}0826,$$

alors que:

$$i_{\text{exact}} = 0{,}08264663\ldots$$

4. Cas particuliers

4.1. La plupart des cas particuliers, comme le calcul du taux d'intérêt connaissant $a_{\overline{n}|}$ ou $s_{\overline{n}|}$, ou le calcul du taux d'intérêt des emprunts obligataires, font l'objet de méthodes spécifiques souvent ingénieuses, mais toujours particulières. De plus, comme c'est le cas dans le calcul du taux d'intérêt connaissant $s_{\overline{n}|}$, la convergence est parfois très lente.
Dans le cas de versements constants, effectués à échéances équidistantes, la formule générale se réduit à une forme plus aisée à utiliser sur calculatrice électronique non programmable.

4.2. *Calcul de i connaissant $a_{\overline{n}|}$.* En plaçant l'origine des temps 1 en avant l'échéance du premier paiement, les relations (9) et (10) se réduisent respectivement à:

$$i_0 = \left(\frac{n}{a_{\overline{n}|}}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1, \tag{13}$$

$$i_j = \left(\frac{n}{a_{\overline{n}|}}\right)^{-\frac{\ln u_{j-1}}{\ln \frac{a_{\overline{n}|}, i_{j-1}}{n}}} - 1. \tag{14}$$

Exemple. Soit $a_{\overline{20}|} = 12{,}4622\,1035$. On trouve:

$$\begin{aligned} i_0 &= 0{,}0461 \\ i_1 &= 0{,}0497 \\ i_2 &= 0{,}0500, \end{aligned}$$

alors que:

$$i_{\text{exact}} = 0{,}0500\,0000.$$

4.3. *Calcul de i connaissant $s_{\overline{n}|}$.* En adoptant comme origine des temps l'échéance du premier paiement, les relations (9) et (10) se réduisent respectivement à:

$$i_0 = \left(\frac{s_{\overline{n}|}}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}} - 1, \tag{15}$$

$$i_j = \left(\frac{s_{\overline{n}|}}{n}\right)^{\frac{\ln u_{j-1}}{\ln \frac{s_{\overline{n}|}, i_{j-1}}{n}}} - 1\,. \tag{16}$$

Exemple. Soit $s_{\overline{20}|} = 33{,}0659\,5414$. On trouve:

$$\begin{aligned} i_0 &= 0{,}0543 \\ i_1 &= 0{,}0497 \\ i_2 &= 0{,}0500, \end{aligned}$$

alors que:

$$i_{\text{exact}} = 0{,}0500\,0000.$$

5. Extension aux opérations à caractère aléatoire

La méthode s'applique aux opérations faisant intervenir des probabilités (opérations viagères, valeurs à rendement aléatoire, emprunts à lots, etc. ...), à condition de considérer les C_k, D_k comme le produit des valeurs nominales des capitaux par la probabilité correspondante, supposée connue.

6. Critères d'existence d'une solution

6.1. *Cas général.* Sans nuire à la généralité, outre les hypothèses (i) et (ii) émises au 1er paragraphe, on peut, quel que soit k, supposer:

(iii) r_k, $s_k > 0$, quitte à changer l'origine des temps, ce qui n'altère pas l'équilibre financier;

(iv) $r_k \neq s_k$, quitte à remplacer C_k ou D_k par la différence positive $C_k - D_k$ ou $D_k - C_k$.

Chacun des 2 membres de l'équation (1), écrite sous la forme:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \, v^{r_k} = \sum_{k=1}^{n} D_k \, v^{s_k} \tag{17}$$

est, comme combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions monotones décroissantes, une fonction monotone décroissante. Pour $i = 0$, il est respectivement égal à C et à D. Pour $i = \infty$, il est nul. En représentant respectivement par r_m et s_m le plus petit des r_k et le plus petit des s_k, on a:

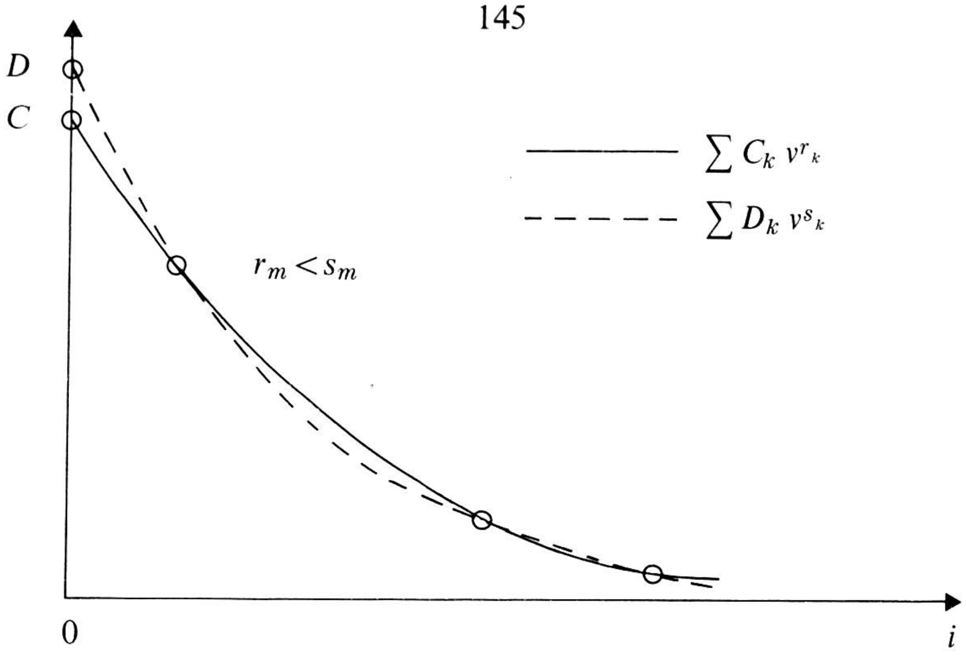
$$\lim_{i \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} C_k \, v^{r_k} - \sum_{k=1}^{n} D_k \, v^{s_k} \right) = \pm 0$$

selon que $r_m < s_m$ ou que $r_m > s_m$.
On a alors le critère d'existence suivant.

Critère 1. Si $C < D$ (resp. $>$) et si $r_m < s_m$ (resp. $>$), alors l'équation (1) admet au moins une solution i positive (voir fig.).

6.2. *Cas particulier.* Dans le cas particulier où tous les C_k sont nuls à l'exception d'un seul, C, d'échéance r, l'équation (1) prend la forme:

$$C \, v^r = \sum_{k=1}^{n} D_k \, v^{s_k}. \tag{1'}$$



On démontre alors les critères d'existence et d'unicité suivants.

Critère 2. Si $C < D$ et si $r < s_m$, où s_m est le plus petit des s_k, alors l'équation (1') admet une et une seule solution i positive.

Critère 3. Si $C > D$ et si $r > s_M$, où s_M est le plus grand des s_k, alors l'équation (1') admet une et une seule solution i positive.

6.3. *Remarques*

6.3.1. En toute généralité, il se peut que l'équation (1) ou (17) n'ait pas de solution, ou en ait une ou plusieurs. On peut facilement construire des cas où l'équation a plusieurs solutions, celles-ci étant fixées d'avance. En pratique cependant, il n'existe généralement qu'une solution acceptable et une seule.

6.3.2. Il peut arriver que la suite $\{i_0, i_1, \ldots\}$ ne converge pas vers la solution acceptable qui, cependant, existe. Il convient alors d'adopter une valeur initiale différente de $i = 0$.

Auteurs cités

[1] *L. Maingie:* La Théorie de l'Intérêt et ses Applications, Wesmael-Charlier, Bruxelles, 1932.
[2] *B. de Finetti:* Leçons de mathématiques financières, Dunod, Paris, 1969.

Le lecteur désirant un programme, écrit en langage FORTRAN, fournissant la valeur de *i* calculée conformément à la présente étude, peut l'obtenir en écrivant à l'auteur.

Christian Jaumain
Directeur pour la Belgique de VITA
Chargé de cours à l'Université de MONS
La Closerie, rue Castaigne 2, B-1310 La Hulpe

Zusammenfassung

Die Arbeit beschreibt eine Methode zur Berechnung des Zinssatzes bei einer finanziellen Operation. Diese Methode ist allgemein: Sie lässt sich bei jeder beliebigen finanziellen Operation anwenden, unabhängig von den Beträgen, der Anzahl Transaktionen und deren Daten. Dasselbe gilt für Operationen, deren Zahlungen mit vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten versehen sind.

Résumé

L'article propose une méthode de calcul du taux d'intérêt réel d'une opération financière.
La méthode est générale: elle s'applique à toute opération financière, quels qu'en soient les montants, le nombre et l'époque des échéances. Elle s'étend aux opérations faisant intervenir des probabilités de paiement supposées connues.

Riassunto

L'articolo propone un metodo di calcolo del tasso d'interesse reale di una operazione finanziaria.
Il metodo e generale: si applica ad ogni operazione finanziaria, qualunque siano gli importi, il numero et le date di scadenza. Si estende anche ad operazioni che fanno intervenire delle probabilità di pagamento presupposte note.

Summary

The article proposes a calculation's method of the actual rate of interest of a financial operation.
The method is general: it applies itself to any financial operation, whatever the amounts, number and dates of payment may be. It spreads to operations where probabilities of payment supposed known appear.