

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 79 (1979)

Artikel: Die Eigenvektoren der Abwicklungsmatrix

Autor: Irniger, René

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-967119>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Eigenvektoren der Abwicklungsmatrix

Von René Irniger, Allschwil

1. Einleitung

Die Schadenzahlungen, die zu einem bestimmten Ereignisjahr gehören, verteilen sich häufig auf mehrere sogenannte Abwicklungsjahre. Das Gebot einer richtigen Bilanzierung der Verpflichtungen sowie statistische Bedürfnisse zwingen den Versicherer, innerhalb des Abwicklungszeitraumes Schadenrückstellungen zu bestimmen. Er wird also auf den Bilanzzeitpunkt hin für alle Ereignisjahre, die noch unerledigte Schadensfälle aufweisen, die erwarteten künftigen Zahlungen schätzen. Die statistischen Probleme, die bei diesen Schätzungen auftreten, wurden schon öfters dargestellt; es sei auf die Arbeiten [1] bis [4] hingewiesen. Die in diesen Arbeiten beschriebenen Methoden stützen sich meist auf das sogenannte «Abwicklungsdreieck». Ein Beispiel soll dieses verdeutlichen:

Abwicklungs- jahre	Ereignisjahre			
	1975	1976	1977	1978
	Zahlungen in Fr. 1000.-			
0	165	132	117	182
1	792	816	923	
2	143	252		
3	50			

Hier tritt das Abwicklungsdreieck deutlich in Erscheinung. In den oben erwähnten Arbeiten werden Methoden angegeben, die eine Ergänzung dieses Dreiecks zu einem Abwicklungsquadrat ermöglichen. Die im Beispiel noch fehlenden Elemente sind also berechenbar, und sie sind gerade die gesuchten Rückstellungsbeträge für künftige Abwicklungsjahre.

Wenn der Versicherer über ausgedehntere Statistiken verfügt als jene, die im Abwicklungsdreieck erscheinen, so kann er letzteres ausdehnen. Man hängt zusätzliche Zahlungsspalten für weiter zurückliegende Ereignisjahre an. Geht man von einer höchstens n -jährigen Abwicklungsperiode aus – im obenstehenden Beispiel 4 Jahre –, so besteht die Erweiterung im Anfügen eines Abwicklungs-Rechteckes, dessen Spalten die Zahlungen von vollständig «abgewickelten» Er-

eignisjahren enthalten. Es stellt sich dann die Frage, ob mit den zusätzlichen Informationen die Schätzungen für Schadenrückstellungen verbessert werden können. Hier wird aber noch nicht diesem interessanten Problem nachgegangen. Mit den nachstehenden Zeilen soll hingegen auf einige Eigenschaften von speziellen Abwicklungsrechtecken hingewiesen werden; dazu werden bekannte Sätze aus der Matrizentheorie herangezogen.

2. Ausgangspunkt

Die Zahlungen für Schadensfälle, die das Ereignisjahr i betreffen und die im Abwicklungsjahr j geleistet werden, seien mit Z_{ji} bezeichnet. Sie sollen $Z_{ji} \geq 0$ erfüllen und wie folgt angeordnet sein.

Abwicklungs- jahre	Ereignisjahre								
	0	1	· · ·	i	· · ·	$n-1$	n	· · ·	$2(n-1)$
0	Z_{00}	Z_{01}	· · ·	Z_{0i}	· · ·	$Z_{0, n-1}$	$Z_{0, n}$	· · ·	$Z_{0, 2(n-1)}$
1	Z_{10}	Z_{11}	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
j	Z_{j0}	Z_{j1}	· · ·	Z_{ji}	· · ·	$Z_{j, n-1}$	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$n-2$	$Z_{n-2, 0}$	$Z_{n-2, 1}$	·	·	$Z_{n-2, n-1}$	$Z_{n-2, n}$			
$n-1$	$Z_{n-1, 0}$	$Z_{n-1, 1}$	· · ·	$Z_{n-1, i}$	· · ·	$Z_{n-1, n-1}$			
	Z_0	Z_1	· · ·	Z_i	· · ·	Z_{n-1}			

Die Tabelle zeigt in den ersten n Spalten und Zeilen die Zahlungen vollständig erledigter Ereignisjahre. Im folgenden wird diese Anordnung als Abwicklungsmaatrix bezeichnet; sie ist quadratisch und enthält alles nicht negative Elemente. Die unvollständigen Spalten n bis $2(n-1)$ stellen das in der Einleitung erwähnte Abwicklungsdreieck dar.

Es wird hier angenommen, die n Jahre dauernde Abwicklungsperiode sei so angesetzt, dass alle Zahlungen eines Ereignisjahres innerhalb dieser Periode stattfinden. In Versicherungsbranchen mit langer Abwicklungsduer kann n

ohne weiteres 10 Jahre umfassen. Es ist aber oft möglich, die wenigen lang dauernden Schadenfälle separat zu behandeln, so dass n tiefer angesetzt werden kann.

In vorstehender Tabelle stellen die Spaltensummen

$$Z_i = \sum_{j=0}^{n-1} Z_{ji}; \quad i = 0, \dots, n-1$$

den gesamten Schadenaufwand der Ereignisjahre dar.

Dividiert man die Elemente jeder Spalte durch Z_i , erhält man die relativen Zahlungen, die man zur folgenden Abwicklungsmatrix zusammenstellt

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} z_{00} & \dots & z_{0i} & \dots & z_{0, n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{j0} & \dots & z_{ji} & \dots & z_{j, n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{n-1, 0} & \dots & z_{n-1, i} & \dots & z_{n-1, n-1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Diese quadratische Matrix ist charakterisiert durch

$$z_{ji} = \frac{Z_{ji}}{Z_i} \quad (2)$$

für i und j je von 0 bis $(n-1)$, und

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_{ji} = 1 \quad (3)$$

für alle Ereignisjahre $i = 0, \dots, n-1$.

Die Abwicklungsmatrix \underline{A} hat die konstante Spaltensumme 1. Die Spalten zeigen, mit welchen Anteilen die einzelnen Abwicklungsjahre am gesamten Schadenaufwand eines Ereignisjahres beteiligt sind. Jede Zeile gibt die Anteile für ein festes Abwicklungsjahr an; es handelt sich sozusagen um die Anteile «gleich alter» Zahlungen.

Im nächsten Abschnitt werden Sätze aus der Matrizentheorie auf die Abwicklungsmatrix (1) angewandt und interpretiert.

3. Eigenwerte und Eigenvektoren der Abwicklungsmatrix

Die spezielle Eigenwertaufgabe der Matrizenlehre sucht jenen Spaltenvektor $\underline{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})'$ zu bestimmen, der zum Vektor $\underline{A} \underline{x}$ proportional ist, d. h. der

$$\underline{A} \underline{x} = s \underline{x} \quad (4)$$

erfüllt. \underline{A} ist eine beliebige quadratische Matrix, und der Proportionalitätsfaktor s wird als Eigenwert bezeichnet. \underline{x} heisst der zum Eigenwert s gehörige Eigenvektor. n -spaltige quadratische Matrizen haben genau n Eigenwerte, die reell oder komplex, einfach und/oder mehrfach sein können. Weitergehende Eigenschaften sowie die Berechnungsmethoden für diese Größen können den Lehrbüchern entnommen werden.

In Spezialfällen, wie etwa der Abwicklungsmatrix (1), können über die Eigenwerte und die Vektoren \underline{x} besondere Aussagen gemacht werden. Für unsere Zwecke zitieren wir, ohne Beweise, einige Sätze aus [5].

«Unter den Eigenwerten einer unzerlegbaren nicht negativen Matrix \underline{A} gibt es einen einfachen reellen positiven Wert $s = u$, der dem Betrage nach von keinem anderen Eigenwert der Matrix übertroffen wird. Zu diesem $s = u$ gehört ein positiver Eigenvektor $\underline{x} > 0$, d. h. einer mit nur positiven Komponenten $x_i > 0$. $s = u$ ist der einzige Eigenwert, zu dem ein nicht negativer Eigenvektor existiert.»

Die hier geforderte Unzerlegbarkeit der Matrix \underline{A} bedeutet, dass man \underline{A} nicht in quadratische Untermatrizen zerlegen kann, und zwar weder durch Spalten noch durch Zeilenumstellungen. In praktischen Fällen dürfte dies weitgehend erfüllt sein, so dass auf weitere Erläuterungen zu diesem Begriff verzichtet werden kann.

Eine weitere Aussage lautet:

«Eine spaltensummenkonstante quadratische Matrix \underline{A} mit der Spaltensumme t hat den Eigenwert t .»

Interessant ist auch nachstehende Behauptung:

«Ist \underline{A} nicht negativ, unzerlegbar, mit konstanter Spaltensumme 1 und sind die Eigenwerte s_i von \underline{A} , mit Ausnahme des Maximalwertes $s_1 = 1$, dem Betrage nach kleiner als 1, dann konvergiert die Folge der Potenzen \underline{A}^m mit wachsendem m gegen eine wiederum spaltensummenkonstante Matrix, deren sämtliche Spalten miteinander übereinstimmen. Die Spalte \underline{x} der Grenzmatrix ist gleich dem zu $s_1 = 1$ gehörigen auf Spaltensumme 1 normierten Eigenvektor von \underline{A} .»

Die Abwicklungsmatrix (1) ist nicht negativ; sie ist spaltensummenkonstant, mit der Summe 1. Die Unzerlegbarkeit nehmen wir als gegeben an. Die eben

zitierten Sätze garantieren uns dann den betragsgrößten, einfachen Eigenwert $s = 1$ und die Existenz eines zugehörigen Eigenvektors mit nur positiven Komponenten.

Für die Abwicklungsmatrix (1) und den Eigenwert $s = 1$ heisst das System (4)

$$\begin{pmatrix} z_{00} & \dots & z_{0, n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n-1, 0} & \dots & z_{n-1, n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Noch ausführlicher und für ein bestimmtes Abwicklungsjahr j wird das zu:

$$z_{j0} x_0 + \dots + z_{ji} x_i + \dots + z_{j, n-1} x_{n-1} = x_j \quad (6)$$

für $j = 0, \dots, (n-1)$. Dieses homogene Gleichungssystem hat, nach den angeführten Sätzen, eine Lösung mit $x_i > 0$, für alle i . Die x_i sind die Komponenten des zu $s = 1$ gehörenden Eigenvektors, den wir ab jetzt als normiert, d.h.

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i = 1, \quad (7)$$

annehmen.

Betrachtet man wieder (6), so können die x_i als Gewichte der Zahlungsanteile eines festen Abwicklungsjahres j interpretiert werden. Die linken Seiten erscheinen als gewichtete Mittel der relativen Zahlungen im Laufe der Zeit. Die Bestimmung der Gewichte muss dabei so vorgenommen werden, dass das gewichtete Mittel (linke Seite) gerade gleich dem Gewicht x_j (rechte Seite) wird. Man erkennt die x_j als eine Art Mittelwerte. Es sind aber nicht Durchschnitte im üblichen Sinne. Das Einsetzen des arithmetischen Mittels der Zeilen

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} z_{ji} \quad (8)$$

in (6) zeigt das.

Man kann also die Komponenten des Eigenvektors der Abwicklungsmatrix – zum maximalen Eigenwert 1 – als «Mittelwerte» für die relativen Anteile der Zahlungen in den Abwicklungsjahren bezeichnen. Eine einfache formelmässige Darstellung dieser Mittelwerte ist, von Spezialfällen abgesehen, nicht möglich. Dies hat seinen Grund darin, dass die x_j Lösungen eines Gleichungssystems sind.

Die Eigenschaft (7) führt, auf das System (6) angewandt, zu den Ungleichungen:

$$\min_i z_{ji} \leq x_j \leq \max_i z_{ji} \quad (9)$$

für i und $j = 0, \dots, (n-1)$. Die Eigenvektorkomponenten liegen für jedes Abwicklungsjahr bzw. für jede Zeile zwischen den Maxima und Minima der Zahlungsanteile.

Als Spezialfall von (1) sei jene Matrix erwähnt, die alles gleiche Spalten hat. Eine solche Matrix entsteht, wenn die relativen Anteile der Schadenzahlungen für alle Ereignisjahre gleich bleiben. Eine bestimmte Abwicklungszeile enthält dann alles gleiche Elemente:

$$z_{j0} = z_{j1} = \dots = z_{j, n-1} \quad \text{für } j = 0, \dots, (n-1).$$

In (6) eingesetzt ergibt das

$$\begin{aligned} z_{j0}(x_0 + \dots + x_{n-1}) &= x_j \\ z_{j0} = x_j; \quad j &= 0, \dots, (n-1) \end{aligned} \quad (10)$$

Genau dasselbe Resultat erhält man, wenn man das arithmetische Mittel (8) berechnet. Man kann also sagen: Bleibt die Auszahlungsstruktur während n Jahren unverändert, so sind die Eigenvektor-Komponenten und das arithmetische Mittel der Zahlungsanteile eines Abwicklungsjahres einander gleich.

Diese Eigenschaft mag, zusammen mit (9), eine gewisse Rechtfertigung der Bezeichnung «Mittelwerte» für die x_j ergeben.

Es sei noch erwähnt, dass die Komponenten des Eigenvektors auf die Vertauschung von Spalten reagieren, was für die arithmetischen Mittel aus (8) nicht gilt.

4. Anwendungen

Es ist nicht klar, wie die als «Mittelwerte» erkannten Elemente des Eigenvektors zum Eigenwert 1 für die Schätzung der Schadenrückstellungen verwendet werden können. Will man diese Aufgabe lösen, muss man eine Verbindung zwischen der Abwicklungsmatrix (Jahre 0 bis $(n-1)$) und dem Abwicklungsdiagramm (Jahre n bis $2(n-1)$) herstellen. Eine direkte Verwendung der Eigenwertkomponenten scheint aber nur möglich zu sein, wenn innerhalb der ersten n Jahre (Abwicklungsmatrix) die Zeilen keine systematischen Entwicklungen zeigen und wenn angenommen werden darf, dass solche auch in den anschließenden Jahren nicht auftreten werden. In solchen Fällen könnte man den Eigen-

vektor auch für die Ereignisjahre des Abwicklungs dreiecks als gültig annehmen. Die Ergänzung des Dreiecks kann dann auf verschiedene Arten geschehen. Eines der einfachsten Verfahren ist anschliessend notiert.

Als *Anteilsvektor* wird jene Spalte \underline{a} definiert, deren k . Element durch

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1} x_j \right)^{-1}$$

gegeben ist; $k = 1, \dots, n-1$.

$$\underline{a} = (a_0, \dots, a_{n-2})' = \left(\frac{1}{x_0}, \dots, \frac{1}{x_0 + \dots + x_{n-2}} \right)'.$$

Die x_j sind die Komponenten des Eigenvektors – zum Eigenwert 1. Das Verfahren funktioniert aber auch mit jedem anderen auf Spaltensumme 1 normierten Vektor. Der Vektor \underline{a} , und mit ihm die nachstehend definierten Vektoren, enthalten nur noch $(n-1)$ Komponenten.

Der *Rückstellungsvektor* entsteht aus \underline{a} durch Subtraktion der Spalte $(1, \dots, 1)'$.

$$\underline{r} = (r_0, \dots, r_{n-2})' = \underline{a} - \underline{1} = \left(\frac{1-x_0}{x_0}, \dots, \frac{1-x_0-\dots-x_{n-2}}{x_0 + \dots + x_{n-2}} \right)'$$

Mit den Zahlungen der letzten $(n-1)$ Ereignisjahre bildet man den *Zahlungssummenvektor*. Sein k . Element hat die Gestalt (siehe Tabelle in Abschnitt 2):

$$\sum_{j=0}^{k-1} Z_{j, 2(n-1)-j}; k = 1, \dots, n-1$$

$$\underline{z}' = (z_0, \dots, z_{n-2}) = (Z_{0, 2(n-1)}; \dots; Z_{0, n} + Z_{n-2, n}).$$

Hier stellt jedes Element die kumulierten Zahlungen eines Ereignisjahres dar. Die Zahlungen des «jüngsten» Ereignisjahres stehen dabei an erster Stelle. Mit diesen Bezeichnungen errechnet man den gesamten geschätzten Schaden aufwand der letzten $(n-1)$ Jahre als das folgende Skalarprodukt:

$$\hat{Z} = \underline{z}' \underline{a} = \sum_{i=0}^{n-2} z_i a_i = \frac{Z_{0, 2(n-1)}}{x_0} + \dots + \frac{Z_{0, n} + \dots + Z_{n-2, n}}{x_0 + \dots + x_{n-2}}.$$

Die einzelnen Summanden stellen die geschätzten Totalzahlungen der einzelnen Ereignisjahre dar, wobei wieder das «jüngste» Jahr zuerst kommt.

Die Rückstellungen der letzten $(n-1)$ Jahre sind ebenfalls ein Skalarprodukt:

$$\hat{R} = \underline{z}' \underline{r} = \sum_{i=0}^{n-2} z_i r_i$$

$$= Z_{0, 2(n-1)} \frac{1-x_0}{x_0} + \dots + (Z_{0, n} + \dots + Z_{n-2, n}) \cdot \frac{1-x_0-\dots-x_{n-2}}{x_0 + \dots + x_{n-2}}$$

Der erste Summand zeigt die Rückstellungen für das Ereignisjahr $2(n-1)$ und der letzte Summand die erwarteten Zahlungen für das Ereignisjahr n und dessen letztes Abwicklungsjahr $(n-1)$.

Ein einfaches Beispiel soll das Dargestellte verdeutlichen.

Abwicklungsjahre	Zahlungen in Fr. 1000.– Ereignisjahre				
	1974 0	1975 1	1976 2	1977 3	1978 4
0	100	55	180	130	105
1	700	880	780	975	
2	200	165	240		
	1000	1100	1200		

Die Abwicklungsmatrix hat hier die Form

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 & 0,15 \\ 0,7 & 0,80 & 0,65 \\ 0,2 & 0,15 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom für die Eigenwertbestimmung heisst:

$$-s^3 + 1,1 s^2 - 0,0975 s - 0,0025 = 0$$

Die Eigenwerte sind:

$$s_1 = 1$$

$$s_{2,3} = \frac{1}{20} (1 \pm \sqrt{2})$$

Der auf Summe 1 normierte Eigenvektor zu $s_1 = 1$ hat die Gestalt:

$$\underline{x} = \left(\frac{3125}{44875}; \frac{34500}{44875}; \frac{7250}{44875} \right)'$$

Für die übrigen Vektoren erhält man:

$$\underline{a} = \left(\frac{44875}{3125}; \frac{44875}{37625} \right); \quad \underline{r} = \left(\frac{41750}{3125}; \frac{7250}{37625} \right)'$$

$$\underline{z}' = (105; 130 + 975) = (105; 1105).$$

Damit gewinnt man:

$$\hat{Z} = 1508 + 1318 = 2826$$

$$\hat{R} = 1402 + 213 = 1615.$$

Diese Resultate stellt man wie folgt noch etwas übersichtlicher zusammen:

	Ereignisjahre	
	1977	1978
Zahlungen bis 31. Dezember 1978	1105	105
Rückstellungen	213	1403
Geschätzter Aufwand	1318	1508

Literatur

- [1] Beard, R. E.: Verification of outstanding claim provisions – Separation technique. ASTIN-Bulletin IX/1977.
- [2] Straub, E. und Kramreiter, H. : On the calculation of IBNR Reserves II. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 73. Band, Heft 2.
- [3] Taylor, G. C.: Separation of Inflation and other effects from the distribution of non-life insurance claim delays. ASTIN-Bulletin IX, 1977.
- [4] De Vylder, F.: Estimation of IBNR claims by least squares. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 78. Band, Heft 2.
- [5] Zurmühl, R.: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Springer Verlag, 1964; insbesondere ab § 17.

Dr. René Irniger
 Basler Versicherungs-Gesellschaft
 Aeschenplatz 7
 4002 Basel

Zusammenfassung

Können die Schadenzahlungen, die zu einem festen Ereignisjahr gehören, innerhalb von n Jahren abgewickelt werden, so kann mit den Zahlungen von n aufeinanderfolgenden Ereignisjahren eine Matrix gebildet werden: die Abwicklungsmatrix. Die Spalten enthalten die Zahlungen eines Ereignisjahrs. Ersetzt man die Zahlungen durch deren relativen Anteil, je pro Ereignisjahr, so entsteht eine spaltensummenkonstante Matrix. Es werden einige bekannte Sätze aus der Matrizentheorie herangezogen, um die Abwicklungsmatrix zu charakterisieren. Die Komponenten des Eigenvektors zum betragsmäßig grössten Eigenwert haben Eigenschaften, die eine Interpretation als «Mittelwerte» der relativen Zahlungen pro Abwicklungsjahr zulassen. Praktische Anwendungen sind nur in Spezialfällen möglich.

Résumé

Si les paiements pour sinistres, qui appartiennent à une année de survenance déterminée, s'effectuent au cours d'une période inférieure ou égale à n ans, on peut former, avec les paiements de n années de survenance successives, une matrice: la matrice de liquidation. Les colonnes contiennent les paiements des années de survenance. En remplaçant les paiements par leurs valeurs relatives on obtient une matrice dont les colonnes ont une somme constante. Quelques théorèmes de la théorie des matrices sont utilisés pour caractériser la matrice de liquidation. Les éléments du vecteur propre, dont la valeur propre absolue est maximale, ont des propriétés qui permettent de les interpréter comme valeurs moyennes des paiements par année de liquidation. Des applications pratiques sont possibles dans des cas spéciaux seulement.

Summary

If the claim payments which belong to a fixed year of origin can be “run off” within n years, then a matrix can be formed with the payments from n successive years of origin: the “run off” matrix. The columns contain the payments of a year of origin. If the payments are replaced by a percentage per each year of origin, we then have a matrix with constant-sum columns. Several theorems from matrix theory are quoted in order to characterize the “run off” matrix. The components of the eigenvector which belongs to the eigenvalue with the highest absolute value have properties which permit an interpretation as mean values of the relative payments per “run off” year. Practical applications are only possible in special cases.

Riassunto

Quando i pagamenti per sinistri che appartengono ad un determinato anno di avvenimento si effettuano nel corso di un periodo inferiore o uguale a n anni, si può formare coi pagamenti di n anni di avvenimento successivi una matrice: la matrice di liquidazione. Le colonne contengono i pagamenti di un anno di avvenimento. Sostituendo i pagamenti con i loro valori relativi, si ottiene una matrice dove le colonne hanno una somma costante. Per caratterizzare la matrice di liquidazione vengono utilizzati alcuni teoremi della teoria delle matrici. Gli elementi del vettore proprio, che corrisponde al massimo valore proprio, hanno la qualità di poter essere interpretati come valori medi dei pagamenti di un anno di liquidazione. In casi speciali sono possibili applicazioni pratiche.