

L'équation générale d'équilibre d'un risque collectif

Autor(en): **Amsler, Marc-Henri**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **78 (1978)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555076>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'équation générale d'équilibre d'un risque collectif

Par Marc-Henri Amsler, Lausanne

Introduction

Aborder des questions dans lesquelles interviendront les notions de solvabilité, de ruine, de provision de fluctuations représente bien souvent pour l'actuaire une entreprise frôlant l'aventure. La retenue du praticien devant ce genre de problèmes provient en bonne partie du fait que la mathématique qui formalise ces notions est délicate: il faut raisonner avec des probabilités... qui ne sont pas du type «de ces bons q_x de l'assurance sur la vie»; il y a lieu en plus d'évaluer des intégrales ou de procéder à des développements analytiques dont il est parfois difficile d'appréhender la légitimité et l'exactitude.

Nous nous proposons dans cet article de contrer la réserve et la méfiance qui entourent actuellement la notion de ruine: la ruine dont parle la théorie du risque collectif ne marque point la ruine du raisonnement actuariel. Elle ne relève pas non plus d'une sorte d'ésotérisme spéculatif. L'article montre qu'il est possible de formuler de façon absolument précise la relation liant, dans un portefeuille quelconque d'assurance, risques et protections financières. Tenant compte du rôle central que joue cette relation dans toute sorte de domaines, nous la nommerons «équation générale d'équilibre». Il s'agit d'une forme – que nous croyons nouvelle – de l'inégalité de Cramér

$$\text{probabilité de ruine} < e^{-R \cdot U},$$

inégalité dans laquelle R est justement solution d'une équation où intervient une intégrale.

Pour un portefeuille absolument quelconque, l'équation générale d'équilibre s'écrit:

$$(P + \lambda) \cdot \frac{\ln \varepsilon}{U} + \psi_c \left(\frac{-\ln \varepsilon}{U} \right) = 0, \quad (15)$$

équation dans laquelle les différents symboles signifient:

P : la prime pure,

A : la marge de sécurité comprise dans la prime, $A = \lambda \cdot P$,

U : la provision de fluctuation,

ε : la borne supérieure acceptable pour la probabilité de ruine,

ψ_c : la fonction caractéristique réelle du risque collectif.

Sous cette forme, l'équation d'équilibre conserve un degré de généralité encore peu propice à des applications numériques. En faisant l'hypothèse – réaliste comme nous le verrons – d'un risque collectif de type gamma, l'équation générale d'équilibre prend la forme élémentaire suivante:

$$2 \cdot A' \cdot U + V \cdot \ln \varepsilon = 0 \quad (23)$$

où A' et V représentent

A' : une partie de la marge de sécurité comprise dans la prime

$$A' = \lambda' \cdot P,$$

le taux réduit λ' étant lié au taux effectif λ par une relation simple,

V : la variance du risque collectif.

Cette dernière équation est appelée «équation d'équilibre d'un risque de type gamma».

La forme extrêmement simple de cette équation permet d'extraire, sans difficulté aucune, l'une des grandeurs (A' , U , V , ε) connaissant les trois autres. Cette équation est exacte (dans le cas d'un risque collectif de type gamma) en ce sens que son établissement ne fait appel à aucune approximation, à aucun développement en série ou autre «déformation» mathématique.

Les pages qui suivent sont consacrées à l'établissement de l'équation générale d'équilibre (15) d'un portefeuille quelconque et à la spécialisation (23) de cette formule générale au cas d'un risque de type gamma. La démonstration de la première formule (§1 et §2 ci-après) demande un développement mathématique qui n'est pas élémentaire; le praticien peut s'en épargner la lecture. Dès le §3, il retrouvera des raisonnements s'appuyant à nouveau exclusivement sur l'analyse et l'algèbre élémentaires.

Exprimer analytiquement la probabilité de la ruine d'un portefeuille d'assurance directement au moyen des probabilités du nombre des sinistres et des divers montants possibles des sinistres est une opération des plus compliquées. Un outil adéquat pour surmonter les difficultés est la «fonction caractéristique

réelle». Nous exposerons au § 1, sans les démontrer, les quelques propriétés de ces fonctions dont nous aurons besoin par la suite. Le § 2 établira les relations liant les diverses fonctions caractéristiques correspondant aux variables aléatoires déterminant le risque collectif. De ces diverses relations, nous dégagerons l'équation générale d'équilibre. Au § 3, nous présenterons quelques cas particuliers de cette équation générale, notamment le cas d'un risque gaussien et celui d'un risque de type gamma; suivront, au § 4, quelques exemples numériques. Enfin, le § 5 présentera, à titre de première application, encore élémentaire, le critère de l'indice de solvabilité. Des applications plus élaborées feront l'objet de communications ultérieures.

§ 1 Fonctions caractéristiques réelles (fcr)

1.1 Définitions

Considérons une variable aléatoire X définie sur un ensemble D de nombres réels. Soit $F(x)$ sa fonction de répartition. L'expression

$$\varphi(s) = \int_D e^{sx} \cdot dF \quad (1)$$

dans laquelle s est un paramètre réel – à choisir de façon à assurer l'existence de l'intégrale – est dite «première fonction caractéristique réelle» de la variable X . La fonction $\varphi(s)$ étant positive, son logarithme naturel est réel. La fonction

$$\psi(s) = \ln \varphi(s) \quad (2)$$

est donc réelle également. Elle est connue sous le nom de «deuxième fonction caractéristique réelle» de X . Tous les raisonnements développés dans le présent article s'appuyant sur la seule fonction $\psi(s)$, nous appellerons $\psi(s)$ «fonction caractéristique réelle» de X , appellation que nous abrègerons par les lettres fcr.

Pour des variables discrètes, l'intégrale est remplacée par une sommation.

Exemple: si X est une variable de Poisson

$$\text{prob}(X = x) = \frac{t^x}{x!} e^{-t},$$

on a

$$\varphi(s) = e^{t(e^s - 1)}$$

et

$$\psi(s) = t(e^s - 1) \quad (\text{cf. annexe II}). \quad (3)$$

1.2 Propriétés des fonctions caractéristiques réelles

Les propriétés des fcr dont nous aurons besoin pour mener nos raisonnements sont les suivantes (sans démonstration):

1° $\psi(0) = 0$.

Cette propriété dit également $\varphi(0) = 1$, c.-à-d. que la somme des probabilités est égale à l'unité.

2° Si X est une variable positive, la fcr $\psi(s)$ est croissante, si X est une variable négative, la fcr $\psi(s)$ est décroissante, si X admet des valeurs positives et négatives, le graphe de $\psi(s)$ est en forme de U .

3° Si $X = a = \text{constante}$, $\psi(s) = a \cdot s$ (X est dite «variable de Dirac»).

4° Si $Y = aX$ (a réel), $\psi_Y(s) = \psi_X(as)$.

Cette propriété exprime la transformation de ψ dans un changement d'échelle de X .

5° Les trois premières dérivées de $\psi(s)$ par rapport à s , prises à l'origine, donnent les valeurs des trois premiers cumulants de X :

$$\psi'(0) = E(X) \quad \psi''(0) = \text{Var}(X) \quad \psi'''(0) = \mu_3(X)^*.$$

6° Si X_1 et X_2 sont deux variables statistiquement indépendantes, à $X = X_1 + X_2$ correspond

$$\psi_X(s) = \psi_{X_1}(s) + \psi_{X_2}(s).$$

Cette propriété est classique dans la théorie de la convolution de deux variables aléatoires.

7° Si l'on dispose d'une famille de variables aléatoires X_w de densité de probabilité $f(x, w)$, pour laquelle la famille correspondante des fcr est linéaire, c.-à-d. pour laquelle

$$\psi(s; w) = w \cdot \psi_1(s),$$

alors à une pondération de la famille des variables X_w par une variable de structure W

$$f(x) = \int f(x; w) \cdot dF(w)$$

correspond, dans le domaine des fcr, une «imbrication»:

$$\psi(s) = \psi_w(\psi_1(s)),$$

$\psi_w(s)$ étant la fcr de la variable de structure W [1].

* μ_3 est le troisième moment par rapport à la moyenne.

Le lecteur introduit dans la théorie des transformations de Laplace retrouvera dans les propriétés 1 à 7 certaines relations classiques du calcul opérationnel.

1.3 Exemple

A titre d'exemple, regardons comment ces propriétés se concrétisent dans le cas d'une variable de Poisson (qui est une variable discrète). On a vu, de (3), que

$$\psi(s) = t \cdot (e^s - 1) \quad (t \text{ réel positif}).$$

$\psi(s)$ existe quel que soit s . Les propriétés 1 et 2 sont évidentes. La propriété 4 l'est aussi: de

$$\text{prob}(X = x) = \frac{t^x}{x!} e^{-t},$$

la probabilité attachée à $Y = aX$ est la même que celle attachée à X . Alors

$$\varphi_Y(s) = \sum e^{sy} \cdot \text{prob}(Y = y) = \sum e^{sax} \cdot \text{prob}(X = x) = \varphi_x(sa).$$

En passant aux logarithmes:

$$\psi_Y(s) = \psi_X(sa).$$

La propriété 5 donne

$$\psi'(s) = \psi''(s) = \psi'''(s) = t \cdot e^s$$

c.-à-d.

$$E(X) = \text{Var}(X) = \mu_3 = t.$$

La propriété 6 est satisfaite: on sait que la somme de deux variables de Poisson est une variable de Poisson d'espérance mathématique égale à la somme des espérances mathématiques des deux variables de base:

$$\text{si } E(X_1) = t_1, E(X_2) = t_2, \text{ c.-à-d. } E(X) = t_1 + t_2,$$

$$\text{on a } \psi_X(s) = (t_1 + t_2) \cdot (e^s - 1) = t_1 \cdot (e^s - 1) + t_2 \cdot (e^s - 1) = \psi_{X_1}(s) + \psi_{X_2}(s).$$

La propriété 7 est connue des actuaires notamment par la théorie d'Ammeter sur la fluctuation des probabilités de base: si l'on pondère une loi de Poisson de moyenne t par une loi de structure de type gamma normé, on obtient une loi binomiale négative. Les fcr des variables entrant dans la pondération sont (cf. annexe II):

loi de Poisson	$\psi_1(s) = t \cdot (e^s - 1)$
formant la famille	$\psi(s; w) = w \cdot t \cdot (e^s - 1)$
loi gamma normée	$\psi_w(s) = \ln \left(\frac{h}{h-s} \right)^h$

loi binomiale négative

$$\psi(s) = \ln \left[1 - \frac{t}{h} \cdot (e^s - 1) \right]^{-h}.$$

La propriété 7 est bien vérifiée dans ce cas particulier

$$\psi_w(\psi_1(s)) = \ln \left(\frac{h}{h - t(e^s - 1)} \right)^h = \ln \left[1 - \frac{t}{h} \cdot (e^s - 1) \right]^{-h}. \quad (4)$$

§ 2 Equation générale d'équilibre

2.1 Type de risque considéré

Le risque dont nous allons nous entretenir est celui que l'on considère ordinairement dans la théorie du risque collectif: il est constitué, pendant une période donnée (une année), par l'apparition d'un nombre aléatoire de sinistres, de montants aléatoires. Comme dans la théorie du risque collectif classique, nous supposons le risque stationnaire, les montants des sinistres statistiquement indépendants les uns des autres et indépendants également du nombre des sinistres.

Le risque considéré peut comprendre soit la totalité d'un portefeuille, soit seulement la partie conservée par la compagnie pour compte propre.

2.2 Eléments du risque

Les variables décrivant le risque sont:

- le montant d'un sinistre X_1 , de fcr $\psi_1(s)$
- le hasard poissonien H , de fcr $\psi_H(s) = t \cdot (e^s - 1)$
- la variable de structure W , telle que l'a définie Ammeter dans sa théorie des fluctuations des probabilités de base, de fcr $\psi_W(s)$.

Le risque collectif résulte du mélange de ces trois variables. Le nombre N des sinistres étant le résultat de la pondération de la loi de Poisson par la loi de structure, on a

$$\psi_N(s) = \psi_W(\psi_H(s))$$

de par la propriété (7) des fcr.

Le montant annuel total des sinistres X_c étant le résultat de la pondération de X_1 , convolué avec lui-même, par la variable N , nous obtenons, pour la fcr du risque collectif X_c

$$\psi_c(s) = \psi_N(\psi_1(s))$$

donc
$$\psi_c(s) = \psi_W[\psi_H(\psi_1(s))]. \quad (5)$$

La fcr du risque collectif est donc une fonction de fonction à trois niveaux, chaque niveau étant celui de l'une des variables de base X_1 , H et W .

Le montant annuel total X_c a une espérance mathématique (propriété 5) égale à

$$E(X_c) = \psi'_c(0) = \psi'_W[\psi_H(\psi_1(s))] \cdot \psi'_H[\psi_1(s)] \cdot \psi'_1(s)$$

en $s = 0$ c.-à-d.
$$E(X_c) = E(W) \cdot E(H) \cdot E(X_1), \quad (6)$$

et une variance égale à $\psi''_c(0)$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_c) = & \text{Var}(W) \cdot E^2(H) \cdot E^2(X_1) + \\ & E(W) \cdot \text{Var}(H) \cdot E^2(X_1) + \\ & E(W) \cdot E(H) \cdot \text{Var}(X_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Ces formules sont bien connues de l'actuaire [1].

Le jeu de somme nulle (au sens de la théorie des jeux) qui consiste pour l'un des joueurs (la compagnie d'assurance) à poser l'enjeu P et pour l'autre joueur (les assurés) à créer des dépenses totales X_c peut être représenté par la variable «bénéfice»

$$X_B = P - X_c.$$

Les fcr des variables P et $-X_c$ sont, selon propriétés (3) et (4):

$$\begin{aligned} P = \text{constante} & \quad \psi_P(s) = P \cdot s \\ Y = -X_c \quad (a = -1) & \quad \psi_Y(s) = \psi_c(-s) \end{aligned}$$

Enfin, pour la somme X_B , nous obtenons (propriété 6):

$$\psi_B(s) = \psi_P(s) + \psi_c(-s) = P \cdot s + \psi_c(-s). \quad (8)$$

Le jeu étant de somme nulle, on doit avoir $E(X_B) = 0$: de $E(X_B) = \psi'_B(0)$, on a

$$\psi'_B(s)|_{s=0} = P + \psi'_c(-s)|_{s=0} = P - \psi'_c(0) = P - P = 0 \quad \text{c.q.f.d.}$$

2.3 Marges de sécurité et bénéfice

Pour contenir le risque X_c , l'assureur inclut une marge de sécurité Λ dans ses primes et, de plus, a recours à une provision de fluctuation U . Nous opterons pour une marge de sécurité Λ venant s'ajouter à la prime pure exacte P et former la prime pure avec marge de sécurité $P' = P + \Lambda$. La prime P' étant constante, sa fcr est

$$\psi_{P'}(s) = P' \cdot s = (P + \Lambda) \cdot s.$$

Le jeu de somme non-nulle (en faveur de l'assureur) basé sur la prime avec marge de sécurité P' est caractérisé par la variable «bénéfice»

$$X_B = P' - X_c$$

de fcr $\psi_B(s) = (P + \Lambda)s + \psi_c(-s)$. (9)

Le bénéfice annuel moyen de l'assureur est (propriété 5):

$$E(X_B) = \psi'_B(0) = P + \Lambda - \psi'_c(0) = P + \Lambda - P = \Lambda, \quad (10)$$

ce qui est l'évidence même.

La variance $\text{Var}(X_B)$ est égale à celle du risque collectif $\text{Var}(X_c)$: en effet, par dérivation de l'expression pour $\psi_B(s)$ ci-dessus, on obtient

$$\psi''_B(s) = \psi''_c(-s)$$

c.-à-d. pour $s = 0$

$$\text{Var}(X_B) = \text{Var}(X_c). \quad (11)$$

Vu que X_B est une variable qui peut accepter des valeurs soit positives, soit négatives, le graphe de $\psi_B(s)$ est une courbe en U (propriété 2). La dérivée étant positive à l'origine, car

$$\psi'_B(0) = E(X_B) = \Lambda > 0,$$

l'équation $\psi_B(s) = 0$ possède, outre la racine évidente $s' = 0$, une et une seule seconde racine s'' , qui est négative.

2.4 Probabilité de ruine

La théorie générale du risque collectif nous enseigne que, malgré la prise en considération d'une marge de sécurité Λ et d'une provision de fluctuation U ,

le risque peut «être en situation de ruine». La probabilité de cet événement hautement désagréable est bornée par la valeur

$$\varepsilon = e^{-\kappa \cdot U} \quad (12)$$

le coefficient $-\kappa$ étant la racine négative s'' de l'équation $\psi_B(s) = 0$: $-\kappa = s''$.

2.5 Equation générale d'équilibre

De tous les paramètres introduits jusqu'ici, seul le paramètre s'' n'a pas de signification actuarielle directe. Il est relié aux autres paramètres ε et U par la relation (12)

$$\ln \varepsilon = s'' \cdot U$$

c.-à-d.

$$s'' = \frac{\ln \varepsilon}{U}. \quad (13)$$

Nous savons que, pour cette valeur de s'' , la fcr du bénéfice:

$$\psi_B(s) = (P + A) \cdot s + \psi_W [\psi_H [\psi_1(-s)]] ,$$

selon (9), s'annule. En portant la valeur de s'' , selon (13), dans l'expression pour $\psi_B(s)$, nous obtenons une relation dans laquelle s'' disparaît:

$$(P + A) \cdot \frac{\ln \varepsilon}{U} + \psi_W \left[\psi_H \left(\psi_1 \left(\frac{-\ln \varepsilon}{U} \right) \right) \right] = 0. \quad (14)$$

Cette équation est l'équation générale d'équilibre recherchée. Elle lie les paramètres du risque, concrétisés par les trois fonctions ψ imbriquées, aux 4 paramètres A , P , U et ε relevant de la gestion de la compagnie.

Il s'agit d'une relation exacte, aucune estimation n'ayant été faite au cours de son élaboration (ε représente la borne de la probabilité de ruine, non la probabilité elle-même). L'équation générale d'équilibre permet essentiellement de déterminer l'un des nombreux paramètres intervenant dans le risque si l'on connaît tous les autres. La valeur du paramètre que l'on extrait ainsi de l'équation est «exacte».

Le résultat de l'imbrication des trois ψ représentant la fcr du risque collectif X_c , l'équation générale d'équilibre peut s'écrire également

$$(P + A) \frac{\ln \varepsilon}{U} + \psi_c \left(\frac{-\ln \varepsilon}{U} \right) = 0. \quad (15)$$

Cette forme simplifiée sera préférée à l'autre si l'on connaît non les fcr des trois variables de base, mais la fcr du risque collectif lui-même.

2.6 Structure de l'équation d'équilibre

L'équation générale d'équilibre (14) relie 7 grandeurs et l'équation (15) 5 grandeurs: P , A , ε , U et les ψ .

Quatre remarques liminaires s'imposent:

- a) La prime P est liée à la fonction $\psi_c(s)$ puisque $\psi'_c(0) = P$.
- b) La marge A et la provision U sont des paramètres exogènes au risque; ils peuvent être «choisis» indépendamment du risque: ce sont des paramètres de caractère commercial et économique
- c) La borne ε et la provision U n'apparaissent dans l'équation que par leur mélange

$$\frac{\ln \varepsilon}{U}.$$

Il est donc possible de modifier la situation d'un portefeuille sans altérer l'équilibre en faisant varier proportionnellement $\ln \varepsilon$ et U . La liaison entre U et ε est donc élémentaire. Cette propriété est bien sûr une conséquence de l'équation de Cramèr

$$\varepsilon = e^{s^* \cdot U}.$$

- d) Les développements mathématiques réalisés pour obtenir cette équation fondamentale, ainsi que l'équation elle-même, ne font appel qu'aux fcr à l'exclusion de toute fonction de répartition.

2.7 Conditions de validité

Il est utile de rappeler que l'équation générale d'équilibre est valable quel que soit le risque considéré, notamment que le portefeuille soit réassuré ou non, également quelles que soient les trois variables de base X_1 , H et W intervenant dans le processus.

§ 3 Modèles particuliers

Il est intéressant de relever que l'équation générale d'équilibre peut, dans certains cas particuliers, prendre une forme spécialement simple.

3.1 Risque collectif gaussien

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse d'un risque collectif gaussien ne tient pas trop bien compte des réalités. Un risque gaussien varie de moins à plus l'infini, ce qui n'est assurément pas le cas d'un risque collectif réel. De plus on sait que, selon l'hypothèse gaussienne, pour une variance donnée les probabilités des très mauvaises années sont trop faibles. Le seul avantage du risque gaussien est, pour le praticien, d'arriver à ses fins sans grande difficulté algébrique ou numérique!

On sait que pour une variable gaussienne d'espérance mathématique E et de variance V

$$\varphi(s) = e^{Es + \frac{1}{2}Vs^2}$$

c.-à-d.
$$\psi(s) = Es + \frac{1}{2}Vs^2 \quad (\text{cf. annexe II}). \quad (16)$$

Dans ce cas

$$\psi_B(s) = (P + A)s + \left(-Es + \frac{1}{2}Vs^2\right) = s \cdot \left(A + \frac{1}{2}Vs\right)$$

puisque $E = P$. L'équation $\psi_B(s) = 0$

a deux solutions $s' = 0$

et
$$s'' = \frac{-2A}{V}$$

L'équation générale d'équilibre

$$\psi_B\left(s'' = \frac{\ln \varepsilon}{U}\right) = 0$$

s'écrit donc

$$A + \frac{1}{2}V \frac{\ln \varepsilon}{U} = 0$$

c.-à-d.
$$2 \cdot A \cdot U + V \cdot \ln \varepsilon = 0. \quad (17)$$

On ne peut trouver relation plus simple: les 4 paramètres A , U , V et ε peuvent être extraits sans difficulté de l'équation. Notamment

$$\varepsilon = e^{\frac{-2AU}{V}}. \quad (18)$$

3.2 Risque collectif de type gamma

Le risque collectif de type gamma a ses adeptes [2]. En effet, une variable gamma ne prend que des valeurs positives et, pour une variance donnée, les probabilités des mauvaises années sont plus grandes que sous l'hypothèse d'un risque gaussien. La fcr d'une variable gamma d'espérance mathématique E et de variance V est

$$\varphi(s) = \left(1 - \frac{V}{E} \cdot s\right)^{\frac{-E^2}{V}}$$

c.-à-d.

$$\psi(s) = \frac{-E^2}{V} \cdot \ln\left(1 - \frac{V}{E} \cdot s\right) \quad (\text{cf. annexe II}). \quad (19)$$

Dans ce cas, vu que $E = P$:

$$\psi_B(s) = (P + \Lambda) \cdot s - \frac{P^2}{V} \ln\left(1 + \frac{V}{P} \cdot s\right).$$

L'équation $\psi_B(s) = 0$ a deux solutions

$$s' = 0 \text{ et } s''$$

difficile à extraire algébriquement.

L'équation générale d'équilibre est donc

$$(P + \Lambda) \cdot \frac{\ln \varepsilon}{U} - \frac{P^2}{V} \cdot \ln\left(1 + \frac{V}{P} \cdot \frac{\ln \varepsilon}{U}\right) = 0. \quad (20)$$

Seul Λ peut être extrait aisément de cette équation. Pour tirer les autres paramètres – et normalement ce sont justement ces autres paramètres qui intéressent l'actuaire – il y a lieu de transformer légèrement l'équation: en multipliant l'équation par

$$\frac{V}{P^2}$$

on obtient (vu que $\Lambda = \lambda \cdot P$):

$$(1 + \lambda) \cdot \frac{V \cdot \ln \varepsilon}{P \cdot U} - \ln\left(1 + \frac{V \cdot \ln \varepsilon}{P \cdot U}\right) = 0.$$

Dans cette équation, les paramètres qui nous intéressent (V, P, U, ε) apparaissent toujours groupés de la même manière. Posons donc, en introduisant un facteur 2 pour simplifier la suite des développements, et en remarquant que seul $\ln \varepsilon$ est négatif:

$$\frac{-V \cdot \ln \varepsilon}{2 \cdot P \cdot U} = \lambda' \quad (\lambda' > 0). \quad (21)$$

L'équation d'équilibre prend alors la forme

$$2(1 + \lambda) \cdot \lambda' + \ln(1 - 2\lambda') = 0. \quad (22)$$

Il s'agit d'extraire λ' connaissant λ !

En annexe, nous montrons que l'équation (22) accepte une et une seule valeur λ' pour un λ donné, cette valeur λ' étant comprise entre 0 et 0,5 et toujours inférieure à λ .

Ainsi, pour un λ donné, il existe un seul λ' satisfaisant l'équation (22). La valeur numérique de λ' peut être extraite de la table donnée sous point 4 de l'annexe I. Connaissant λ' , la relation (21) s'écrit

$$2 \cdot \lambda' \cdot P \cdot U + V \cdot \ln \varepsilon = 0.$$

Si maintenant on désigne par A' la marge de sécurité calculée au taux réduit λ' :

$$A' = \lambda' \cdot P,$$

l'équation d'équilibre prend la forme définitive

$$2 \cdot A' \cdot U + V \cdot \ln \varepsilon = 0. \quad (23)$$

Il y a lieu de remarquer que cette équation a exactement la même structure que celle qui découle d'un risque gaussien (17), la marge de sécurité devant être calculée, pour un risque de type gamma, au taux réduit λ' , alors qu'elle doit être prise au taux effectif λ pour un risque de type gaussien.

Ainsi, en présence d'un portefeuille donné (et pour lequel on peut supposer que le risque collectif est de type gamma), l'équation d'équilibre (23), par son extrême simplicité, permettra d'aborder dans de bonnes conditions la résolution de problèmes pratiques.

3.3 Solutions approchées

Lorsque le risque collectif X_c est connu essentiellement par ses composantes X_1, H et W , seule l'équation d'équilibre (14) sous sa forme générale est susceptible de donner p.ex. ε à partir des autres paramètres.

Toutefois, il est imaginable que la valeur de s'' , c.-à-d. le quotient

$$s'' = \frac{\ln \varepsilon}{U}$$

soit, en valeur absolue, faible par rapport aux autres paramètres du modèle.

Dans ce cas, on peut tenter de développer la fonction $\psi_c(s)$ en puissances de s

$$\psi_c(s) = E \cdot s + \frac{1}{2} \cdot V \cdot s^2 + \frac{1}{6} \mu_3 \cdot s^3 + \dots$$

L'équation d'équilibre (15) devient

$$(P + \Lambda) \cdot s - E \cdot s + \frac{1}{2} \cdot V \cdot s^2 - \frac{1}{6} \cdot \mu_3 \cdot s^3 + \dots = 0.$$

En ne retenant que les termes jusqu'en s^2 (méthode du développement quadratique), on obtient

$$(P + \Lambda) \cdot s - E \cdot s + \frac{1}{2} \cdot V \cdot s^2 = 0$$

c.-à-d.

$$2 \cdot \Lambda + V \cdot s'' = 0,$$

et en introduisant

$$s'' = \frac{\ln \varepsilon}{U}$$

on obtient

$$2 \cdot \Lambda \cdot U + V \cdot \ln \varepsilon = 0.$$

On retrouve la situation du risque gaussien ! Cela n'est guère étonnant, puisque le $\psi(s)$ d'une variable de Gauss est un polynôme du second degré : le développement s'arrête de lui-même au terme de deuxième degré. Si l'on retient un terme de plus dans le développement de $\psi_c(s)$ (méthode du développement cubique), on obtient :

$$6 \cdot \Lambda + 3 \cdot V \cdot s + \mu_3 \cdot s^2 = 0$$

dont les solutions sont aisément calculables. Ordinairement le coefficient μ_3 est difficile à estimer (μ_3 est le 3^e moment centré par rapport à la moyenne).

Le cadre des développements en série limités offre d'autres possibilités : le coefficient $-\kappa = s''$ (cf. point 2.4) de l'équation de Cramèr est défini par

$$\psi_B(s'') = 0$$

c.-à-d. par

$$\varphi_B(s'') = e^{\psi_B(s'')} = 1.$$

Le développement de $\varphi_B(s)$ en série de puissances, arrêté au terme en s^2 , égalé à 1 donne [3]

$$2 \cdot \Lambda + (V + \Lambda^2) \cdot s'' = 0$$

c.-à-d.

$$2 \cdot \Lambda \cdot U + (V + \Lambda^2) \cdot \ln \varepsilon = 0.$$

La méthode des développements quadratiques et cubiques ne donne qu'une valeur approximative pour le paramètre extrait de l'équation d'équilibre, en particulier pour la borne supérieure de la probabilité de ruine. Cette méthode est néanmoins très utilisée.

3.4 Modèles complets

On peut se demander comment se présenteraient développements et calculs si l'on faisait des hypothèses non sur X_c , c.-à-d. sur $\psi_c(s)$, mais sur les trois composantes de X_c , à savoir X_1 , H et W . Voici un exemple, simple, mais qui pourrait fort bien correspondre à un portefeuille réel.

Supposons les montants des sinistres X_1 distribués selon une loi gamma. En normant $E(X_1)$ à l'unité, nous avons

$$\psi_1(s) = \frac{-1}{V} \cdot \ln(1 - V \cdot s), \quad (24)$$

expression dans laquelle V est la variance de X_1 . En pratique la variance est beaucoup plus grande que l'espérance, c.-à-d. V est beaucoup plus grand que 1. Prenons maintenant pour le nombre N des sinistres une loi binomiale négative, loi qui s'obtient – selon H. Ammeter – par pondération de la loi de Poisson de moyenne t par une loi de structure gamma de paramètre h :

$$\psi_N(s) = -h \cdot \ln \left(1 - \frac{t}{h} (e^s - 1) \right) \quad (\text{cf. annexe II}).$$

Pour le risque collectif X_c , nous obtenons, en utilisant (24):

$$\psi_c(s) = \psi_N(\psi_1(s)) = -h \cdot \ln \left[1 - \frac{t}{h} \left((1 - Vs)^{\frac{1}{V}} - 1 \right) \right]$$

et pour le bénéfice

$$\begin{aligned} \psi_B(s) &= (P + A) \cdot s + \psi_c(-s) \\ &= (P + A) \cdot s - h \cdot \ln \left[1 - \frac{t}{h} \left((1 + V \cdot s)^{\frac{1}{V}} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

L'équation générale d'équilibre

$$\psi_B\left(\frac{\ln \varepsilon}{U}\right) = 0$$

s'écrit alors

$$(P + A) \cdot \frac{\ln \varepsilon}{U} - h \cdot \ln \left[1 - \frac{t}{h} \left(\left(1 + V \cdot \frac{\ln \varepsilon}{U} \right)^{\frac{1}{V}} - 1 \right) \right] = 0. \quad (25)$$

Il n'y a pas beaucoup d'espoir de pouvoir extraire facilement par l'algèbre la probabilité ε de cette équation, connaissant tous les autres paramètres. Dans un cas concret, le moyen le plus simple est de résoudre l'équation par approximations successives. L'inconvénient d'un calcul fastidieux devrait être compensé par la perspective de trouver, pour la borne ε , une valeur exacte. Nous aborderons un tel calcul au paragraphe suivant.

§ 4 Exemples numériques

Les considérations qui précèdent nous ont donné divers modèles. Il peut être intéressant de voir ce qu'ils deviennent dans un cas numérique particulier.

Considérons un portefeuille d'assurance caractérisé par les éléments suivants:

Montant des sinistres individuels X_1 : une variable gamma

de moyenne $E(X_1) = 1$ (une unité opérationnelle)

de variance $V_1 = 50$.

Hasard pur de Poisson H :

nombre moyen des sinistres $E(H) = 1000$

Variable de structure W : une variable gamma

de moyenne $E(W) = 1$

de variance $V_2 = \frac{1}{h} = 0,01$.

Sous ces hypothèses le montant total annuel des sinistres X_c suit une loi de type inconnu, mais pour laquelle on a [formules (6) et (7)]:

$$E(X_c) = E(W) \cdot E(H) \cdot E(X_1) = 1000$$

$$\text{Var}(X_c) = 0,01 \cdot 10^6 + 10^3 + 10^3 \cdot 50 = 61\,000 = V.$$

L'encaisse annuelle des primes pures exactes étant $P = E(X_c) = 1000$,

choisissons une marge de sécurité de 20% de P $A = 200$

et une provision de fluctuation de 30% de P $U = 300$.

Sous les hypothèses faites, l'équation générale livre les bornes supérieures ε des probabilités de ruine suivantes:

a) hypothèse du risque collectif gaussien (cf. chiffre 3.1): l'équation d'équilibre

$$2 \cdot A \cdot U + V \cdot \ln \varepsilon = 0 \quad (17)$$

donne une borne ε de

$$\varepsilon = e^{-1,9672} = 0,1398 \text{ (14\%);}$$

b) hypothèse du risque collectif de type gamma (chiffre 3.2):

ici $\lambda = \frac{A}{P} = 0,20$
c.-à-d. selon table en annexe I:

$$\lambda' = 0,1568.$$

L'équation d'équilibre

$$2 \cdot \lambda' \cdot P \cdot U + V \cdot \ln \varepsilon = 0 \quad (23)$$

donne une borne ε de

$$\varepsilon = e^{-1,5423} = 0,2139 \text{ (21\%);}$$

c) par approximation quadratique de $\varphi_B(s)$ (chiffre 3.3): l'équation d'équilibre

$$2 \cdot A \cdot U + (V + A^2) \cdot \ln \varepsilon = 0$$

donne une borne ε de

$$\varepsilon = e^{-1,1881} = 0,3048 \text{ (30\%);}$$

d) par le modèle exact complet (chiffre 3.4): l'équation d'équilibre

$$1200 \cdot \frac{\ln \varepsilon}{300} - 100 \cdot \ln \left[1 - \frac{1000}{100} \left\{ \left(1 + 50 \cdot \frac{\ln \varepsilon}{300} \right)^{-0,02} - 1 \right\} \right] = 0$$

c.-à-d.

$$\psi_B \left(\frac{\ln \varepsilon}{U} \right) = 4 \cdot \ln \varepsilon - 100 \cdot \ln \left[1 - 10 \left\{ \left(1 + \frac{1}{6} \ln \varepsilon \right)^{-0,02} - 1 \right\} \right] = 0$$

donne une borne ε de (valeur exacte):

$$\varepsilon = e^{-1,5716} = 0,2077 \text{ (21\%).}$$

Il est intéressant de remarquer que, dans cet exemple particulier, l'hypothèse d'un risque collectif de type gamma livre une bonne approximation de la borne exacte ε : 21%. L'hypothèse de l'approximation quadratique conduit à une borne ε trop forte: 30%. Il fallait enfin s'attendre à ce que l'hypothèse d'un risque collectif gaussien donnât une perspective trop optimiste du risque de ruine: 14% seulement.

Rappelons ici que la valeur de ε est celle de la borne supérieure de la probabilité de ruine. La probabilité elle-même se situe au-dessous de ε .

§ 5 L'indice de solvabilité

L'équation d'équilibre d'un risque de type gamma suggère une méthode pragmatique pour mesurer le degré de solvabilité. L'hypothèse d'un risque collectif de type gamma a permis d'établir une équation d'équilibre de structure spécialement simple:

$$2 \cdot A' \cdot U + V \cdot \ln \varepsilon = 0. \quad (23)$$

De plus, les exemples numériques du §4 ont montré que, dans un cas particulier imaginé au hasard, mais pour lequel il a été possible de calculer exactement la borne supérieure de la probabilité de ruine, l'hypothèse du risque de type gamma menait pratiquement à la même probabilité de ruine. Une hirondelle ne fait bien sûr pas le printemps: les risques collectifs des portefeuilles d'assurance seraient-ils d'une façon générale assimilables à des risques de type gamma? Si cette supposition devait se confirmer, peut-être partiellement seulement, il serait possible, grâce à l'équation d'équilibre des risques de type gamma, de formuler un critère de solvabilité fondé sur la probabilité de ruine sans que cette probabilité intervienne formellement.

En effet, divisons l'équation (23) par P^2 . Nous obtenons

$$2 \cdot \lambda' \cdot u + \sigma^2 \cdot \ln \varepsilon = 0,$$

équation dans laquelle les minuscules représentent des taux par rapport à la prime pure:

$$\lambda' = \frac{A'}{P} \quad u = \frac{U}{P} \quad \sigma^2 = \frac{V}{P^2};$$

σ est l'écart-type relatif, bien connu en théorie de la crédibilité.

Isolons ε ($\ln \varepsilon < 0$):

$$\frac{2 \cdot \lambda' \cdot u}{\sigma^2} = |\ln \varepsilon|. \quad (26)$$

Par cette équation, l'exigence imposée à ε pour s'assurer de la solvabilité d'un portefeuille peut être transposée en une exigence imposée à l'expression du membre de gauche. Vu que pour des λ inférieurs à 30%, on a approximativement*, à $\frac{1}{2}\%$ d'erreur,

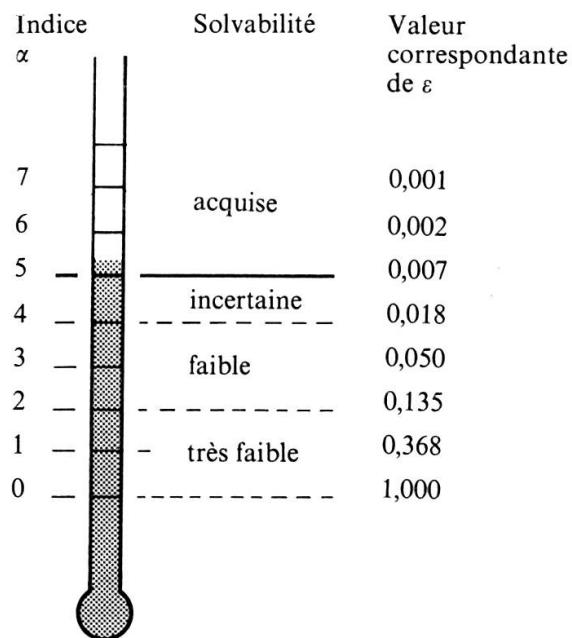
$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 + 1,4 \cdot \lambda}$$

L'équation (26) devient

$$\frac{2 \cdot \lambda \cdot u}{(1 + 1,4 \lambda) \sigma^2} = |\ln \varepsilon|$$

Appelons «indice de solvabilité» l'expression

$$\alpha = \frac{2 \cdot \lambda \cdot u}{(1 + 1,4 \lambda) \sigma^2}$$



* Cf. annexe I, chiffre 4.

Selon la valeur que prendra ledit indice α (c.-à-d. en fait selon la valeur que prendra $ln\varepsilon$), il sera possible de juger si la solvabilité est acquise ou non. Le tableau de la page précédente présente un «baromètre» du degré de solvabilité d'un portefeuille. L'évolution d'un portefeuille sera favorable si en cours de «navigation» le baromètre se maintient au-dessus de l'échelon 5 ($\varepsilon \leq 0,7\%$). Considérons un exemple numérique afin de concrétiser l'emploi de l'indice de solvabilité α . Imaginons un portefeuille d'assurance présentant un écart-type relatif de 10%, c.-à-d. un portefeuille pour lequel les résultats annuels fluctuent avec un écart-type de 10% par rapport à la moyenne (un actuaire peut connaître en ordre de grandeur, par l'observation, la variabilité de ses résultats annuels). Supposons que la prime comporte une marge de sécurité de 20% et que la compagnie dispose d'une provision de fluctuation de 17% des primes. L'indice de solvabilité vaut

$$\alpha = \frac{2 \cdot 0,20 \cdot 0,17}{1,28 \cdot 0,01} = 5,31.$$

Selon notre baromètre, le portefeuille se situe dans la zone de la «solvabilité acquise». En effet, en langage de ruine, nous avons

$$\varepsilon = e^{-5,31} = 0,005.$$

Si la compagnie ne disposait que d'une provision de fluctuation de 10% des primes, on aurait

$$\alpha = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 0,1}{1,28 \cdot 0,01} = 3,125$$

et la solvabilité ne serait que «faible» ($\varepsilon = 0,044$).

Vu la simplicité du critère, il est pensable que l'indice de solvabilité α soit mieux reçu de l'actuaire praticien que la notion de probabilité de ruine:

$$\varepsilon = e^{-k \cdot U}.$$

Ces deux critères sont équivalents.

La mise au point du critère de l'indice de solvabilité représente une première application, encore élémentaire, de l'équation générale d'équilibre. D'autres développements, plus élaborés, suivront dans des articles ultérieurs.

Annexe I
sur la relation implicite intervenant dans l'équation d'équilibre
d'un risque de type gamma (cf. 3.2 du texte principal)

Taux effectif λ de la marge de sécurité comprise dans les primes et taux réduit λ' sont liés par la relation:

$$2(1 + \lambda)\lambda' + \ln(1 - 2\lambda') = 0 \quad (\lambda, \lambda' \text{ positifs}). \quad (22)$$

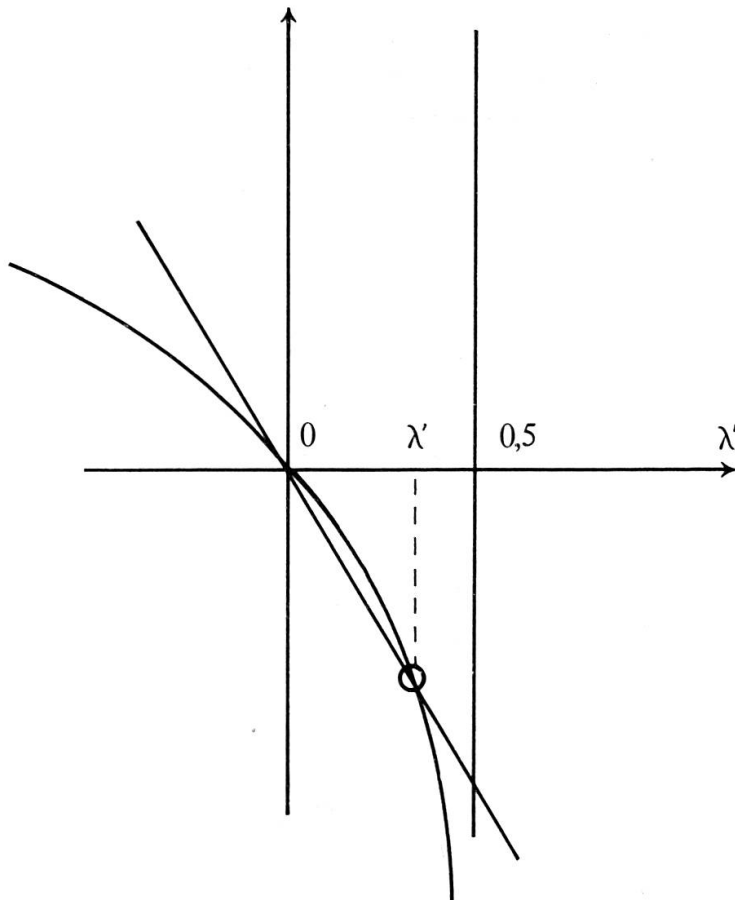
Propriétés de cette relation implicite

1. Existence et unicité de λ' pour un λ donné

L'équation peut s'écrire

$$\ln(1 - 2\lambda') = -2(1 + \lambda) \cdot \lambda'.$$

Le membre de gauche représente – en fonction du paramètre λ' – une courbe décroissante, convexe, de concavité orientée vers le bas et ayant une asymptote verticale en $\lambda' = 0,5$ (cf. figure).



Le membre de droite représente une droite, de pente négative. Courbe et droite passent par l'origine; en ce point, les pentes sont:

pour la courbe: -2

pour la droite: $-2 \cdot (1 + \lambda)$

1^{er} cas: λ strictement positif.

La droite coupe la courbe à l'origine puisque en ce point sa pente est plus forte que celle de la courbe. Vu la concavité de la courbe et la présence de l'asymptote verticale, la droite coupe la courbe en un second point λ' . Ce second point d'intersection est unique.

2^e cas: $\lambda = 0$. La droite est tangente à la courbe. L'équation n'admet que la solution $\lambda' = 0$.

Résultat: Pour un λ positif donné, l'équation a exactement une solution λ' positive. Pour $\lambda = 0$, l'équation n'admet que la solution $\lambda' = 0$.

2. Valeurs possibles pour λ'

Pour $\lambda = 0$, on a vu que $\lambda' = 0$.

Lorsque λ augmente, la pente de la droite s'accroît. L'augmentation de la valeur absolue de la pente de la droite entraîne (pour les raisons géométriques invoquées ci-dessus) une augmentation de λ' . Pour un λ de plus en plus grand, λ' tend vers la valeur 0,5.

Résultat: λ' , en fonction de λ , est une fonction monotone croissant de 0 à 0,5.

3. Valeurs relatives $\lambda:\lambda'$

En tirant λ de l'équation (22) en fonction de λ' :

$$\lambda = \frac{\ln(1 - 2\lambda')}{-2\lambda'} - 1$$

et en développant le membre de droite en série de Maclaurin, on trouve

$$\lambda = \lambda' + \frac{1}{3}(2\lambda')^2 + \dots + \frac{1}{n}(2\lambda')^{n-1} + \dots$$

ce qui montre que

$$\lambda > \lambda'$$

c.-à-d.

$$\lambda' < \lambda$$

Résultat: le taux λ' est inférieur au taux effectif λ .

4. Valeurs numériques

λ	λ'	$\frac{\lambda'}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{(1+0,3\lambda)(1+\lambda)}$	$\frac{\lambda}{1+1,4\lambda}$
0.00	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.01	0.0099	0.9870	0.0099	0.0099
0.02	0.0195	0.9740	0.0195	0.0195
0.03	0.0288	0.9613	0.0289	0.0288
0.04	0.0380	0.9490	0.0380	0.0379
0.05	0.0468	0.9370	0.0469	0.0467
0.06	0.0555	0.9252	0.0556	0.0554
0.07	0.0640	0.9137	0.0641	0.0638
0.08	0.0722	0.9025	0.0723	0.0719
0.09	0.0802	0.8914	0.0804	0.0799
0.10	0.0881	0.8807	0.0883	0.0877
0.11	0.0957	0.8701	0.0959	0.0953
0.12	0.1032	0.8598	0.1034	0.1027
0.13	0.1105	0.8497	0.1107	0.1100
0.14	0.1176	0.8397	0.1179	0.1171
0.15	0.1245	0.8300	0.1248	0.1240
0.16	0.1313	0.8205	0.1316	0.1307
0.17	0.1379	0.8111	0.1382	0.1373
0.18	0.1444	0.8020	0.1447	0.1438
0.19	0.1507	0.7930	0.1511	0.1501
0.20	0.1568	0.7842	0.1572	0.1563
0.21	0.1629	0.7756	0.1633	0.1623
0.22	0.1688	0.7672	0.1692	0.1682
0.23	0.1745	0.7589	0.1749	0.1740
0.24	0.1802	0.7507	0.1805	0.1796
0.25	0.1857	0.7427	0.1860	0.1852
0.26	0.1911	0.7349	0.1914	0.1906
0.27	0.1963	0.7272	0.1967	0.1959
0.28	0.2015	0.7196	0.2018	0.2011
0.29	0.2065	0.7122	0.2068	0.2063
0.30	0.2115	0.7050	0.2117	0.2113

Pour des λ inférieurs à 30% ($\lambda < 0,3$), λ' vaut approximativement:

$$\lambda' \cong \frac{\lambda}{(1+0,3\lambda)(1+\lambda)} \quad (\text{colonne 4})$$

ou

$$\lambda' \cong \frac{\lambda}{1+1,4\lambda} \quad (\text{colonne 5})$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2}\%$.

Annexe II
Définitions et formules d'usage courant

Variable de Poisson

$$\text{prob}(X = x) = \frac{t^x}{x!} e^{-t}$$

$$E(X) = t \qquad \text{Var}(X) = t$$

$$\text{fcr: } \psi(s) = t(e^s - 1).$$

Variable binomiale négative (Polya)

$$\text{prob}(X = x) = \binom{x+a-1}{x} \cdot \left(\frac{a}{a+t}\right)^a \cdot \left(\frac{t}{a+t}\right)^x$$

$$E(X) = t \qquad \text{Var}(X) = t \left(1 + \frac{t}{a}\right)$$

$$\text{fcr: } \psi(s) = -a \cdot \ln \left[1 - \frac{t}{a} (e^s - 1) \right].$$

Variable de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$E(X) = m \qquad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

$$\text{fcr: } \psi(s) = m \cdot s + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot s^2.$$

Variable gamma

$$f(x) = \frac{v^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-v \cdot x}$$

$$E(X) = 1 \qquad \text{Var}(X) = \frac{1}{v}$$

$$\text{fcr: } \psi(s) = -v \cdot \ln \left(1 - \frac{1}{v} \cdot s \right)$$

Variante: si $E(X) = E \neq 1$ et $\text{Var}(X) = V$

$$\text{fcr: } \psi(s) = \frac{-E^2}{V} \ln \left(1 - \frac{V}{E} \cdot s \right).$$

Bibliographie

- [1] *Brown, A.*, Cumulants of Convolution-Mixed Distributions, ASTIN-Bulletin, Vol.IX, Parts 1 and 2 (1977).
- [2] *Seal, H.L.*, Approximations to Risk Theory's $F(x,t)$ by Means of the Gamma Distribution, ASTIN-Bulletin, Vol.IX, Parts 1 and 2 (1977).
- [3] *Straub, E.*, How to fix retention, Bull. Ass. Act. suisses, 1978, 1.

Marc-Henri Amsler
Professeur à l'Université
de Lausanne
Chemin des Prouges 3
1009 Pully

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wird eine mathematische Gleichung, «allgemeine Gleichgewichtsgleichung» genannt, aufgestellt, welche die Risikomerkmale eines Versicherungsbestandes mit den vor dem «Ruin» des Portefeuilles schützenden finanziellen Mitteln verbindet. Die Gleichung wird dadurch gekennzeichnet, dass sie ganz allgemein gilt (sie ist an jedes Portefeuille anwendbar) und dass sie genau ist (deren Aufstellung erfordert keine Näherung). Wenn für den Totalbetrag der Versicherungsleistungen pro Jahr eine stochastische Variable vom Gamma-Typus angenommen wird, nimmt die allgemeine Gleichgewichtsgleichung eine einfache Form an, welche es gestattet, einen Risiko- oder Sicherheitsparameter des Portefeuilles in Abhängigkeit der übrigen mühelos auszudrücken. Anwendungen dieser allgemeinen Gleichung werden später angegeben.

Résumé

Le présent article propose une équation mathématique, dite «équation générale d'équilibre», liant les risques compris dans un portefeuille d'assurance aux sécurités protégeant le portefeuille du risque de ruine. Cette équation se caractérise par le fait qu'elle est générale (elle s'applique à tout portefeuille) et qu'elle est exacte (elle ne fait pas intervenir d'approximations). Si l'on suppose que le total annuel des prestations versées est une variable de type gamma, l'équation générale d'équilibre prend une forme simple permettant d'exprimer sans difficulté l'un des paramètres du risque ou des sécurités en fonction des autres. L'auteur indiquera ultérieurement des applications de cette équation d'équilibre.

Riassunto

L'articolo propone un'uguaglianza matematica detta «uguaglianza generale d'equilibrio» che mette in relazione le caratteristiche dei rischi in portafoglio con le riserve a protezione dello stesso. Questa uguaglianza è generale (perchè si può applicarla ad un portafoglio qualunque) ed esatta (perchè non si deve fare nessuna approssimazione). A condizione che il totale dei danni in un anno sia una variabile del tipo gamma, l'uguaglianza generale d'equilibrio prende una forma semplice. Questo fatto permette di esprimere senza difficoltà i parametri dei rischi in funzione dei parametri delle misure di sicurezza e viceversa. Infine l'autore indica le possibilità di come applicare questa uguaglianza.

Summary

The present article proposes a mathematical equation, called the "general balance equation", which connects the parameters of the risks in the portfolio with the securities preventing the portfolio from the ruin situation. This equation is distinguished by the fact that it is general (applicable to every portfolio) and exact (uses no approximation). If it is supposed that the total amount of the claims per year is a gamma variable, the general balance equation takes a very simple form which allows one of the risk or security parameters to be expressed as a function of the others. Applications of the general balance equation will be given in coming articles.