

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
<b>Herausgeber:</b>	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
<b>Band:</b>	78 (1978)
<b>Artikel:</b>	Modèle pratique et modèle rationnel pour actifs et invalides
<b>Autor:</b>	Chuard, Philippe
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-555072">https://doi.org/10.5169/seals-555072</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Modèle pratique et modèle rationnel pour actifs et invalides

Par Philippe Chuard, Pully

## 1. Introduction

Lorsque, notamment dans les assurances de pensions de la prévoyance professionnelle, l'incapacité de travail donne droit à des prestations, on est conduit à utiliser une technique actuarielle dans laquelle on distingue, parmi les vivants, les actifs des invalides. Cette distinction apparaît en premier lieu dans les ordres et effectifs sur lesquels reposent les développements conduisant à l'obtention des valeurs actuelles que l'on désire. Une étude publiée antérieurement<sup>1</sup> a montré comment doit être rectifiée la formule de récurrence communément adoptée pour l'effectif des invalides. La correction proposée permet en outre de faire correspondre au modèle utilisé jusqu'à présent, un autre modèle dans lequel intervient la réactivité des invalides, et de les lier par des relations simples et rigoureuses. Le présent travail se rapporte à la construction de ces relations et à l'usage qu'on peut en faire pour calculer des valeurs actuelles.

## 2. Définitions et notations

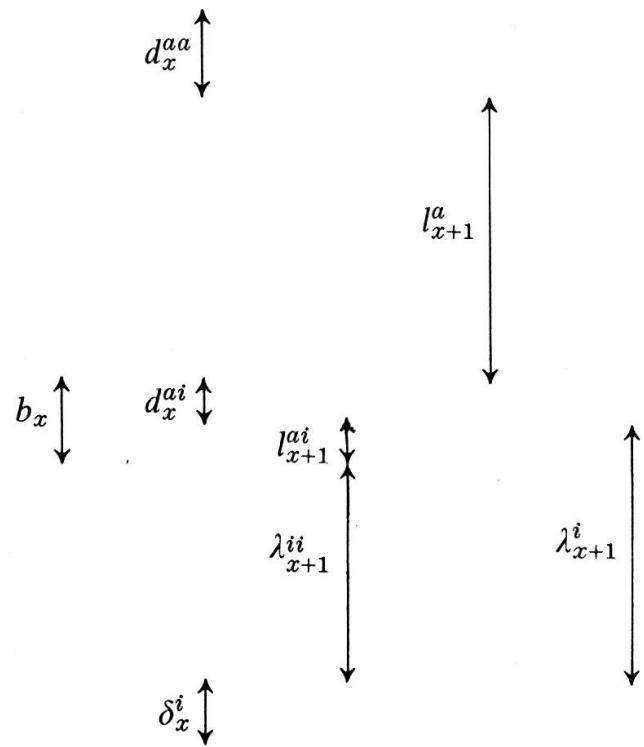
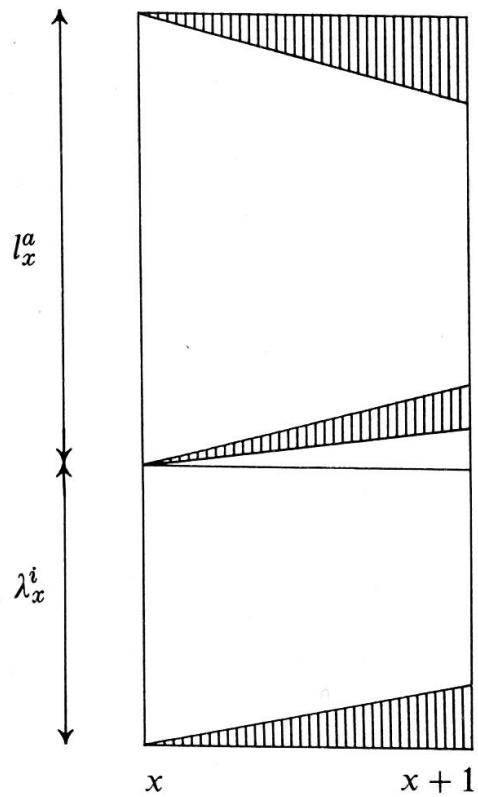
Considérons un certain nombre de vivants de même âge, comprenant des actifs et des invalides, et suivons en l'évolution dans le temps. Le *décès* agit comme cause de diminution, pour les actifs comme pour les invalides. L'*invalidité*, qui fait passer des actifs à l'état d'invalides, agit comme cause de diminution pour les actifs et comme cause d'augmentation pour les invalides. La *réactivité* a l'effet inverse.

Nous disons que cette évolution suit le *modèle pratique* si la réactivité n'intervient pas, et qu'elle suit le *modèle rationnel* si la réactivité intervient. Les formules de base, relatives à ces modèles, s'établissent en examinant comment les nombres d'actifs et d'invalides varient entre deux âges consécutifs  $x$  et  $x+1$ . C'est à cette variation que se rapportent les deux schémas suivants ainsi que les notations qu'ils font intervenir.

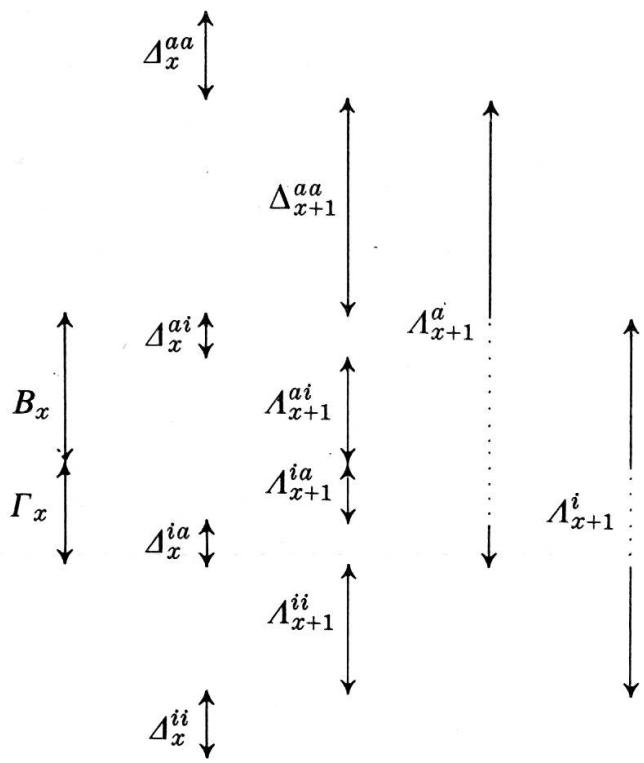
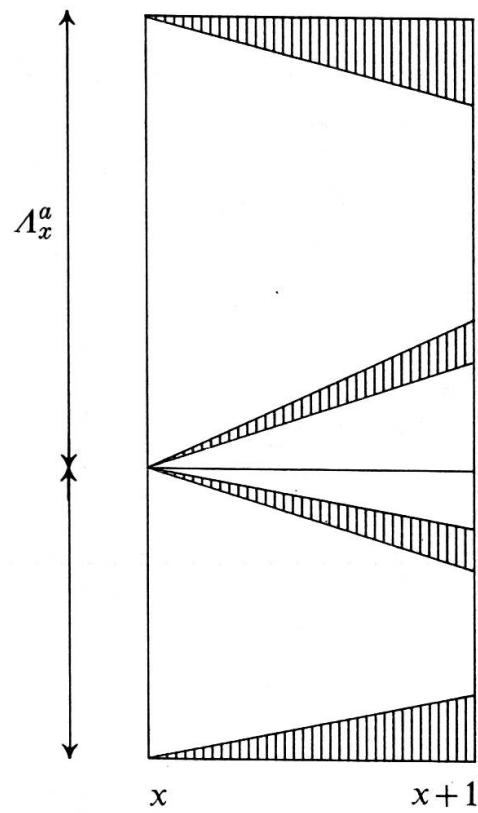
<sup>1</sup> Bibliographie citée [1].

*Schémas*

## Modèle pratique



## Modèle rationnel



### Notations

Modèle pratique	Modèle rationnel	
$l_x^a$	$\Lambda_x^a$	actifs d'âge $x$
$\lambda_x^i$	$\Lambda_x^i$	invalides d'âge $x$
$b_x$	$B_x$	actifs d'âge $x$ devenus invalides avant l'âge $x+1$
	$\Gamma_x$	invalides d'âge $x$ devenus actifs par réactivité avant l'âge $x+1$
$d_x^{aa}$	$\Delta_x^{aa}$	actifs d'âge $x$ décédés à l'état d'actif avant l'âge $x+1$
$d_x^{ai}$	$\Delta_x^{ai}$	actifs d'âge $x$ devenus invalides puis décédés à l'état d'invalides avant l'âge $x+1$
$\delta_x^i$		invalides d'âge $x$ décédés avant l'âge $x+1$
	$\Delta_x^{ia}$	invalides d'âge $x$ devenus actifs par réactivité puis décédés à l'état d'actif avant l'âge $x+1$
	$\Delta_x^{ii}$	invalides d'âge $x$ décédés à l'état d'invalides avant l'âge $x+1$
	$\Lambda_{x+1}^{aa}$	actifs d'âge $x$ , en vie à l'état d'actif à l'âge $x+1$
$l_{x+1}^{ai}$	$\Lambda_{x+1}^{ai}$	actifs d'âge $x$ , devenus invalides, en vie à l'état d'invalides à l'âge $x+1$
	$\Lambda_{x+1}^{ia}$	invalides d'âge $x$ devenus actifs par réactivité, en vie à l'état d'actif à l'âge $x+1$
$\lambda_{x+1}^{ii}$	$\Lambda_{x+1}^{ii}$	invalides d'âge $x$ , en vie à l'état d'invalides à l'âge $x+1$
$l_{x+1}^a$	$\Lambda_{x+1}^a$	actifs d'âge $x+1$
$\lambda_{x+1}^i$	$\Lambda_{x+1}^i$	invalides d'âge $x+1$

Au sujet des notations introduites, précisons

- qu'il est fait usage de *lettres latines* ( $l, b, d$ ) pour les *ordres*<sup>2</sup> et les nombres de personnes qui en dépendent, et de *lettres grecques* ( $\lambda, \delta, \Lambda, B, \Gamma, \Delta$ ) pour les *effectifs*<sup>3</sup> et les nombres de personnes qui en dépendent,
- qu'il est fait usage de *minuscules* ( $l, b, d, \lambda, \delta$ ) pour le *modèle pratique*, et de *majuscules* ( $\Lambda, B, \Gamma, \Delta$ ) pour le *modèle rationnel*.

On peut en outre attirer l'attention sur le fait que les nombres  $l, \lambda, \Lambda$  se rapportent à un *instant* (qui est celui de l'âge indiqué en indice), et que les nombres  $b, d, \delta, B, \Gamma, \Delta$  se rapportent à une *durée* (qui est de un an dès l'âge indiqué en indice). Les premiers sont des *états numériques*, et les seconds des *cumuls*.

<sup>2</sup> *Ordre*: personnes de même âge dont le nombre, en fonction de l'écoulement du temps, varie sous l'action d'une ou de plusieurs *causes de sortie uniquement*.

<sup>3</sup> *Effectif*: personnes de même âge dont le nombre, en fonction de l'écoulement du temps, varie sous l'action d'une ou de plusieurs *causes de sortie et d'entrée*.

### 3. Probabilités

Utilisant des minuscules pour le modèle pratique et des majuscules pour le modèle rationnel, désignons comme suit les *probabilités indépendantes* des événements qui agissent sur les nombres des actifs et des invalides:

Modèle pratique	Modèle rationnel	
$q_x^a$	$Q_x^a$	décès d'actif
$i_x$	$I_x$	invalidité
$q_x^i$	$Q_x^i$	décès d'invalidé
	$R_x$	réactivité

(Nous admettons que la probabilité de réactivité, comme les autres probabilités, dépend de l'âge  $x$ .)

A ces probabilités indépendantes on associe les *probabilités dépendantes* ci-après:

Modèle pratique

$$*q_x^{aa} = q_x^a \left(1 - \frac{i_x}{2}\right) \quad (1)$$

$$*i_x = i_x \left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right). \quad (2)$$

Modèle rationnel

$$*Q_x^{aa} = Q_x^a \left(1 - \frac{I_x}{2}\right) \quad (3)$$

$$*I_x = I_x \left(1 - \frac{Q_x^a}{2}\right) \quad (4)$$

$$*Q_x^{ii} = Q_x^i \left(1 - \frac{R_x}{2}\right) \quad (5)$$

$$*R_x = R_x \left(1 - \frac{Q_x^i}{2}\right). \quad (6)$$

#### 4. Formules du modèle pratique

L'indépendance du décès d'actif et de l'invalidité conduit à la relation de récurrence de l'ordre des actifs

$$l_{x+1}^a = l_x^a (1 - q_x^a) (1 - i_x) \quad (7)$$

équivalente, par (1) et (2), à

$$l_{x+1}^a = l_x^a (1 - *q_x^{aa} - *i_x). \quad (8)$$

Si l'on pose

$$*q_x^{aa} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^a} \text{ et } *i_x = \frac{b_x}{l_x^a},$$

la relation

$$l_{x+1}^a = l_x^a - d_x^{aa} - b_x,$$

que fait apparaître le schéma du modèle pratique, est équivalente à (8). On peut donc écrire

$$b_x = l_x^a *i_x. \quad (9)$$

Le travail mentionné précédemment<sup>4</sup> montre que, contrairement à ce qui résulte des formules communément adoptées, on doit poser (ce qui, en outre, est intuitivement correct),

$$l_{x+1}^{ai} = b_x - \frac{1}{2} p_{x+\frac{1}{2}}^i. \quad (10)$$

Partant de

$$\frac{1}{2} p_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{l_{x+1}^i}{l_{x+\frac{1}{2}}^i} \text{ et } l_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{1}{2} (l_x^i + l_{x+1}^i),$$

où  $l_x^i$  est l'ordre des invalides lié à  $q_x^i$  par

$$l_{x+1}^i = l_x^i (1 - q_x^i),$$

on obtient

$$\frac{1}{2} p_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{q_x^i}{2}}. \quad (11)$$

Compte tenu de (10), (9), (2) et (11),  $l_{x+1}^{ai}$  peut être exprimé par

$$l_{x+1}^{ai} = l_x^a i_x \left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right) \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{q_x^i}{2}}. \quad (12)$$

<sup>4</sup> Bibliographie citée [1], formule (37).

D'autre part le schéma du modèle pratique fait apparaître que

$$\lambda_{x+1}^i = \lambda_{x+1}^{ii} + l_{x+1}^{ai}.$$

Si, dans cette expression, on tient compte de (12) et de

$$\lambda_{x+1}^{ii} = \lambda_x^i (1 - q_x^i)$$

on obtient

$$\lambda_{x+1}^i = \lambda_x^i (1 - q_x^i) + l_x^a i_x \left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right) \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{q_x^i}{2}}, \quad (13)$$

formule de récurrence pour l'effectif des invalides dans le modèle pratique<sup>5</sup>. Remarquons en passant que si les deux mortalités  $q_x^a$  et  $q_x^i$  sont égales, ce qu'on peut exprimer par

$$q_x^a = q_x^i = q,$$

les formules (7) et (13) conduisent à

$$l_{x+1}^a + \lambda_{x+1}^i = (l_x^a + \lambda_x^i) (1 - q)$$

ce qui montre que  $q$  est également la mortalité  $q_x$  des  $l_x^a + \lambda_x^i = l_x$  vivants d'âge  $x$ . Cette conséquence est logique; sa démonstration est rendue possible par la formule (13) de  $\lambda_{x+1}^i$ .

## 5. Formules du modèle rationnel

Du schéma pour le modèle rationnel on tire

$$\Lambda_{x+1}^{aa} = \Lambda_x^a - \Delta_x^{aa} - B_x \quad (14)$$

$$\Lambda_{x+1}^{ii} = \Lambda_x^i - \Delta_x^{ii} - \Gamma_x \quad (15)$$

$$\Lambda_{x+1}^a = \Lambda_{x+1}^{aa} + \Lambda_{x+1}^{ia} \quad (16)$$

$$\Lambda_{x+1}^i = \Lambda_{x+1}^{ii} + \Lambda_{x+1}^{ai}. \quad (17)$$

<sup>5</sup> Bibliographie citée [1], formule (44).

Sur la base d'un raisonnement identique à celui qui conduit aux formules (7) et (8) du modèle pratique on arrive à

$$\Lambda_{x+1}^{aa} = \Lambda_x^a (1 - Q_x^a) (1 - I_x) \quad (18)$$

$$= \Lambda_x^a (1 - *Q_x^{aa} - *I_x) \quad (19)$$

$$\Lambda_{x+1}^{ii} = \Lambda_x^i (1 - Q_x^i) (1 - R_x) \quad (20)$$

$$= \Lambda_x^i (1 - *Q_x^{ii} - *R_x) \quad (21)$$

ainsi qu'à

$$B_x = \Lambda_x^a * I_x \quad (22)$$

$$\Gamma_x = \Lambda_x^i * R_x. \quad (23)$$

Retenant les considérations conduisant à (10) dans le modèle pratique, on peut écrire

$$\Lambda_{x+1}^{ai} = B_x \frac{1}{2} P_{x+\frac{1}{2}}^i \quad (24)$$

$$\Lambda_{x+1}^{ia} = \Gamma_x \frac{1}{2} P_{x+\frac{1}{2}}^a \quad (25)$$

avec

$$\frac{1}{2} P_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{1 - Q_x^i}{1 - \frac{Q_x^i}{2}} \quad (26)$$

$$\frac{1}{2} P_{x+\frac{1}{2}}^a = \frac{1 - Q_x^a}{1 - \frac{Q_x^a}{2}}. \quad (27)$$

Les formules (16), (18), (25), (23), (6), (27), d'une part, et (17), (20), (24), (22), (4), (26), d'autre part, conduisent aux relations de récurrence

$$\Lambda_{x+1}^a = \Lambda_x^a (1 - Q_x^a) (1 - I_x) + \Lambda_x^i R_x \left( 1 - \frac{Q_x^i}{2} \right) \frac{1 - Q_x^a}{1 - \frac{Q_x^a}{2}} \quad (28)$$

$$\Lambda_{x+1}^i = \Lambda_x^i (1 - Q_x^i) (1 - R_x) + \Lambda_x^a I_x \left( 1 - \frac{Q_x^a}{2} \right) \frac{1 - Q_x^i}{1 - \frac{Q_x^i}{2}} \quad (29)$$

pour l'effectif des actifs et celui des invalides.

A titre de remarque examinons le cas de l'égalité des mortalités  $Q_x^a$  et  $Q_x^i$ . Posons

$$Q_x^a = Q_x^i = Q.$$

Les formules (28) et (29) conduisent alors à

$$\Lambda_{x+1}^a + \Lambda_{x+1}^i = (\Lambda_x^a + \Lambda_x^i)(1 - Q),$$

ce qui montre que  $Q$  est également la mortalité  $Q_x$  des  $\Lambda_x^a + \Lambda_x^i$  vivants d'âge  $x$ .

## 6. Passage d'un modèle à l'autre

Le modèle pratique, qui laisse de côté la réactivité, correspond moins bien à la réalité que le modèle rationnel. Par contre il rend possible une technique actuarielle simple. Une question vient à l'esprit: à quelles conditions peut-on obtenir que la variation de l'ordre  $l_x^a$  des actifs dans le modèle pratique corresponde à celle de l'effectif  $\Lambda_x^a$  des actifs dans le modèle rationnel, et qu'il en aille de même pour les effectifs  $\lambda_x^i$  et  $\Lambda_x^i$  des invalides? Posons pour cela

$$l_x^a = \Lambda_x^a \quad l_{x+1}^a = \Lambda_{x+1}^a \quad (30)$$

$$\lambda_x^i = \Lambda_x^i \quad \lambda_{x+1}^i = \Lambda_{x+1}^i \quad (31)$$

avec

$$q_x^a = Q_x^a \quad q_x^i = Q_x^i. \quad (32)$$

Les formules (7), (28), (30), (31) et (32) conduisent à la relation

$$i_x = I_x - \frac{\lambda_x^i}{l_x^a} R_x \frac{1 - \frac{q_x^i}{2}}{1 - \frac{q_x^a}{2}}. \quad (33)$$

On obtient le même résultat avec les formules (13), (29), (30), (31) et (32).

Si, faisant intervenir des probabilités dépendantes, on tient compte des relations (2), (4), (6) et (32), la formule (33) devient

$$*i_x = *I_x - \frac{\lambda_x^i}{l_x^a} *R_x. \quad (34)$$

Les relations (33) et (34) répondent à la question posée. Le résultat obtenu est conforme à ce que l'intuition suggère: si l'on néglige la réactivité, il faut réduire les probabilités d'invalidité.

Le lecteur qui désire une illustration numérique des développements qui précèdent pourra consulter les *tableaux 1 et 2* publiés à la fin de cette étude. Ils contiennent un extrait des résultats obtenus

- à partir des probabilités  $*q_x^{aa}$ ,  $*i_x$  et  $q_x^i$  indiquées, pour les âges  $x$  de 20 à 64, dans les tables EVK 1970<sup>6</sup>,
- en faisant intervenir des probabilités de réactivité  $R_x$  définies par

$$R_x = 0,975 - 0,015 x,$$

– en posant  $l_{20}^a = 100000$ ,  $\lambda_{20}^i = 0$

et  $l_{65}^i = l_{65}$ .

Les probabilités indépendantes  $q_x^a$  et  $i_x$  indiquées dans les tableaux 1 et 2 sont calculées au moyen des probabilités dépendantes  $*q_x^{aa}$  et  $*i_x$  des tables EVK 1970. La formule pour les probabilités de réactivité  $R_x$  est un ajustement simplifié de valeurs obtenues à partir de celles qui sont mentionnées dans les tables VZ 1960<sup>7</sup>.

A titre de remarque on peut indiquer d'autres relations qui résultent des conditions (30), (31) et (32). Tout d'abord la formule (34), compte tenu de (9), (22) et (23), conduit à

$$b_x = B_x - \Gamma_x; \quad (35)$$

il est intéressant d'examiner cette relation en se reportant aux schémas des deux modèles.

En outre ces schémas montrent que

$$\begin{aligned} l_{x+1}^a &= l_x^a - d_x^{aa} - b_x \\ A_{x+1}^a &= A_x^a - \Delta_x^{aa} - B_x + \Gamma_x - \Delta_x^{ia}; \end{aligned}$$

compte tenu de (30) et (35), on a alors

$$d_x^{aa} = \Delta_x^{aa} + \Delta_x^{ia}. \quad (36)$$

On peut également constater que

$$d_x^{aa} + d_x^{ai} + \delta_x^i = \Delta_x^{aa} + \Delta_x^{ai} + \Delta_x^{ia} + \Delta_x^{ii}$$

d'où, en tenant compte de (36),

$$d_x^{ai} + \delta_x^i = \Delta_x^{ai} + \Delta_x^{ii}. \quad (37)$$

<sup>6</sup> Bibliographie citée [2], colonnes 6, 7 et 8.

<sup>7</sup> Bibliographie citée [3], pages 22 et 23.

## 7. Valeurs actuelles

### 7.1. Remarque préliminaire

Les développements qui précèdent montrent que l'évolution des  $A_x^a$  actifs et celle des  $A_x^i$  invalides du modèle rationnel, reposant sur les probabilités  $Q_x^a$ ,  $I_x$ ,  $Q_x^i$  et  $R_x$ , correspondent exactement à l'évolution des  $l_x^a$  actifs et à celle des  $\lambda_x^i$  invalides du modèle pratique si

- on pose  $q_x^a = Q_x^a$ ,  $q_x^i = Q_x^i$ ,
- on lie  $i_x$  à  $I_x$  et  $R_x$  par (33),
- on part de  $l_{20}^a = A_{20}^a$ ,  $\lambda_{20}^i = A_{20}^i = 0$ ,

en admettant que 20 ans est l'âge à partir duquel on a les valeurs des probabilités.

Cette correspondance n'implique cependant pas celle des valeurs actuelles calculées sur la base de l'un ou de l'autre modèle. Or, pour l'actuaire, ce sont avant tout les valeurs actuelles qui importent. La substitution du modèle pratique au modèle rationnel ne se justifie donc que si son influence sur les valeurs actuelles est faible. Pour étudier cette question il faut proposer une technique actuarielle pour le calcul de valeurs actuelles dans le modèle rationnel. Puis des valeurs numériques permettront des comparaisons.

Les développements qui suivent sont limités aux valeurs actuelles des rentes de retraite et d'invalidité, ainsi qu'à celle pour l'escompte des cotisations. Ils s'étendraient sans difficulté aux rentes de survivants, dont les formules de valeurs actuelles dépendent également de l'invalidité.

### 7.2. Valeurs actuelles dans le cas du modèle pratique

Rappelons brièvement la méthode et les formules permettant d'obtenir les valeurs numériques désirées.

Disposant des probabilités  $q_x^a$ ,  $i_x$  et  $q_x^i$

pour des âges  $x$  à partir de 20, par exemple,

on établit les ordres

$$l_x, l_x^a \text{ et } l_x^i$$

au moyen des formules (7) et (13) ainsi que de

$$l_x = l_x^a + \lambda_x^i$$

$$l_{x+1}^i = l_x^i (1 - q_x^i)$$

et en partant, par exemple, de

$$l_{20}^a = 100000, \quad \lambda_{20}^i = 0$$

$$l_{20}^i = 100000 \text{ ou } l_{65}^i = l_{65}.$$

Puis, avec les nombres de commutation

$$D_x = v^x l_x$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \dots$$

$$D_x^a = v^x l_x^a$$

$$N_x^a = D_x^a + D_{x+1}^a + \dots$$

$$D_x^i = v^x l_x^i$$

$$N_x^i = D_x^i + D_{x+1}^i + \dots$$

on calcule les valeurs actuelles pour la

rente reposant sur la tête d'un *vivant* d'âge  $x$  (actif ou invalide) et payable s'il est *vivant*

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \quad \ddot{a}_{x:\bar{n}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad {}_n|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

rente reposant sur la tête d'un *actif* d'âge  $x$  et payable s'il est *actif*

$$\ddot{a}_x^{aa} = \frac{N_x^a}{D_x^a} \quad \ddot{a}_{x:\bar{n}}^{aa} = \frac{N_x^a - N_{x+n}^a}{D_x^a} \quad {}_n|\ddot{a}_x^{aa} = \frac{N_{x+n}^a}{D_x^a}$$

rente reposant sur la tête d'un *invalide* d'âge  $x$  et payable s'il est *invalide*

$$\ddot{a}_x^i = \frac{N_x^i}{D_x^i} \quad \ddot{a}_{x:\bar{n}}^i = \frac{N_x^i - N_{x+n}^i}{D_x^i} \quad {}_n|\ddot{a}_x^i = \frac{N_{x+n}^i}{D_x^i}.$$

On obtient ensuite les valeurs actuelles pour la rente reposant sur la tête d'un *actif* d'âge  $x$  et payable s'il est *vivant* (actif ou invalide)

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^a &= \ddot{a}_x + \frac{\lambda_x^i}{l_x^a} (\ddot{a}_x - \ddot{a}_x^i) \\ \ddot{a}_{x:\bar{n}}^a &= \ddot{a}_{x:\bar{n}} + \frac{\lambda_x^i}{l_x^a} (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{n}}^i) \\ {}_{n|}\ddot{a}_x^a &= {}_{n|}\ddot{a}_x + \frac{\lambda_x^i}{l_x^a} ({}_{n|}\ddot{a}_x - {}_{n|}\ddot{a}_x^i)\end{aligned}$$

ainsi que les valeurs actuelles pour la rente future d'invalidité, reposant sur la tête d'un *actif* d'âge  $x$  et payable s'il est *invalide*

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{ai} &= \ddot{a}_x^a - \ddot{a}_x^{aa} \\ \ddot{a}_{x:\bar{n}}^{ai} &= \ddot{a}_{x:\bar{n}}^a - \ddot{a}_{x:\bar{n}}^{aa}.\end{aligned}$$

Désignons enfin par  $\ddot{a}_x^{a+i}$  la valeur actuelle de la rente de retraite et de la rente d'invalidité de même montant. Cette valeur peut être obtenue de deux manières différentes :

$$\ddot{a}_x^{a+i} = {}_{n|}\ddot{a}_x^{aa} + \ddot{a}_x^{ai} = {}_{n|}\ddot{a}_x^a + \ddot{a}_{x:\bar{n}}^{ai}.$$

Le *tableau 3*, à la fin de cette étude, donne, pour des âges de 5 ans en 5 ans, des nombres de commutation calculés avec

- les données auxquelles se rapporte le tableau 2,
- les probabilités de décès  $q_x$  de la table EVK 1970 pour les âges  $x$  à partir de 65 ans, et en adoptant les conventions de la table pour ces âges<sup>8</sup>,
- le taux d'intérêt de 4%.

Signalons que  $N_{x:\bar{65-x}}^a = D_x^a + D_{x+1}^a + \dots + D_{64}^a$ .

Le *tableau 4* indique des valeurs actuelles.

### 7.3. Valeurs actuelles dans le cas du modèle rationnel

Un actif d'âge  $x$ , si l'on envisage le modèle rationnel, peut, lorsque le temps s'écoule, passer à l'état d'invalidé, puis redevenir actif et ainsi de suite. Le calcul de valeurs actuelles, dans cette situation, nécessite une technique inhabi-

<sup>8</sup>  $i_x = 0$  et  $q_x^a = q_x^i = q_x$  pour  $x \geq 65$ .

tuelle. Celle que nous proposons fait intervenir un changement de l'âge initial à partir duquel sont construits ordres et effectifs.

Si, comme on l'a admis précédemment, on dispose des valeurs des probabilités pour les âges dès 20 ans, et qu'on respecte les conditions pour que l'évolution du nombre des actifs et celle du nombre des invalides soient les mêmes dans les deux modèles, les valeurs actuelles, à l'âge de 20 ans, sont également les mêmes dans les deux modèles. Cela découle de ce qu'à cet âge l'effectif des invalides est nul.

Retenant alors, pour chaque âge  $x$ , le même processus de calcul en admettant qu'à cet âge l'effectif des invalides est nul, on obtient les valeurs actuelles, pour l'âge  $x$ , dans le cas du modèle rationnel.

Désignons par  $x_0$  l'âge initial à partir duquel, au moyen des probabilités  $Q_x^a$ ,  $I_x$ ,  $Q_x^i$  et  $R_x$ , on construit, dans le cas du modèle rationnel

l'effectif  $\Lambda_{[x_0]x}^a$  des actifs et

l'effectif  $\Lambda_{[x_0]x}^i$  des invalides

en partant de  $\Lambda_{[x_0]x_0}^i = 0$ .

Les valeurs obtenues correspondent à celles d'un modèle pratique dans lequel

$$q_x^a = Q_x^a$$

$$q_x^i = Q_x^i$$

$$i_{[x_0]x} = I_x - \frac{\Lambda_{[x_0]x}^i}{\Lambda_{[x_0]x}^a} R_x \frac{1 - \frac{Q_x^i}{2}}{1 - \frac{Q_x^a}{2}}$$

et l'on peut écrire

$$l_{[x_0]x}^a = \Lambda_{[x_0]x}^a \quad \lambda_{[x_0]x}^i = \Lambda_{[x_0]x}^i.$$

Dès lors, avec la technique actuarielle traditionnelle rappelée au titre 7.2., on peut calculer des valeurs actuelles telles que

$$\ddot{a}_{[x_0]\overline{x:n}}^{aa}$$

$$\ddot{a}_{[x_0]x}^{a+i} = {}_n|\ddot{a}_{[x_0]x}^{aa} + \ddot{a}_{[x_0]x}^{ai} = {}_n|\ddot{a}_{[x_0]x}^a + \ddot{a}_{[x_0]\overline{x:n}}^{ai}.$$

Parmi ces valeurs celles pour lesquelles  $x = x_0$  sont valables pour le modèle rationnel.

Il suffit donc de renouveler le procédé pour tous les âges  $x$  de manière à obtenir les valeurs actuelles du modèle rationnel :

$$\ddot{a}_{[x]\overline{x:n}}^{aa}$$

$$\ddot{a}_{[x]x}^{a+i} = {}_{n|}\ddot{a}_{[x]x}^{aa} + \ddot{a}_{[x]x}^{ai} = {}_{n|}\ddot{a}_{[x]x}^a + \ddot{a}_{[x]\overline{x:n}}^{ai}.$$

Remarquons en passant que  ${}_{n|}\ddot{a}_{[x]x}^a = {}_{n|}\ddot{a}_{[x]x}$ .

Pour illustrer les développements précédents au moyen de valeurs numériques, considérons par exemple le cas  $x_0 = 40$ .

Partant de  $l_{[40]40}^a = l_{40}^a = 97\,901$  et  $\lambda_{[40]40}^i = 0$

ainsi que des probabilités  $Q_x^a$ ,  $Q_x^i$ ,  $I_x$ ,  $R_x$  à partir de  $x = 40$  (tableau 1), on obtient les probabilités, ordres et effectifs du tableau 5.

Les ordres  $l_{[40]x}^a$  et  $l_{[40]x}^i$  (tableau 5) ainsi que les  $q_x$  pour  $x \geq 65$  conduisent, pour le taux d'intérêt de 4%, aux nombres de commutation du tableau 6.

On obtient ensuite les valeurs actuelles du tableau 7. Celles de la première ligne ( $x = 40$ ) correspondent à l'emploi du modèle rationnel.

Pour avoir les valeurs actuelles dans le cas du modèle rationnel, il suffit de répéter, pour tous les âges  $x_0$ , le procédé indiqué. Le tableau 8 fournit quelques-unes de ces valeurs.

## 8. Conclusions

Les développements qui précèdent montrent que si l'on dispose de probabilités

- $q_x^a$  de décès d'actif,
- $q_x^i$  de décès d'invalidité,
- $I_x$  d'invalidité,
- $R_x$  de réactivité,

on peut remplacer  $I_x$  et  $R_x$  par une probabilité  $i_x$  d'invalidité et, sur la base de  $q_x^a$ ,  $q_x^i$  et  $i_x$ , construire un ordre d'actifs  $l_x^a$  et un effectif d'invalides  $\lambda_x^i$  (mo-

dèle pratique) qui évoluent exactement comme les nombres d'actifs et d'invalides dépendant de  $q_x^a$ ,  $q_x^i$ ,  $I_x$  et  $R_x$  (modèle rationnel). Cette possibilité de substitution offre en outre un moyen de calculer des valeurs actuelles dans le cas du modèle rationnel.

Pour apprécier l'influence que peut avoir, sur des valeurs actuelles, le remplacement du modèle rationnel (dans lequel interviennent  $I_x$  et  $R_x$ ) par le modèle pratique (qui dépend de  $i_x$  mais pas de la réactivité), il est utile de considérer des valeurs numériques. Celles des tableaux 4 et 8 se rapportent aux rentes de retraite et d'invalidité ainsi qu'à l'escompte des cotisations (rente temporaire d'actif) et sont calculées sur des bases plausibles.

Le tableau 9 indique les différences entre les valeurs actuelles calculées selon les deux modèles. On constate que ces différences sont petites. Pour la valeur actuelle de la rente de retraite et de la rente d'invalidité ( $\ddot{a}_x^{a+i}$ ), la différence relative, rapportée au montant calculé pour la méthode rationnelle, n'atteint pas 0,7%. Pour la valeur actuelle des cotisations ( $\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{aa}$ ), la différence relative n'atteint pas 1,2%.

Le remplacement de la méthode rationnelle par la méthode pratique conduit donc à des différences de valeurs actuelles que l'on peut considérer comme minimes.

Philippe Chuard, actuaire  
 Professeur ordinaire  
 à l'Université de Lausanne  
 Avenue de Lavaux 93  
 CH-1009 Pully

### Bibliographie citée

- [1] Chuard, Ph.: La formule de récurrence pour l'effectif des invalides dans le modèle pratique.  
     Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 76<sup>e</sup> volume, Berne 1976.
- [2] Eidgenössische Versicherungskasse: Technische Grundlagen EVK 1970, Bern 1970.
- [3] Versicherungskasse der Stadt Zürich: Technische Grundlagen VZ 1960, Zürich 1959.

## Tableaux

1	$x$	$q_x^a = Q_x^a$	$q_x^i = Q_x^i$	$I_x$	$R_x$		
	20	0,00075	0,03000	0,00010	0,67500		
	25	0,00080	0,03513	0,00037	0,60000		
	30	0,00085	0,03950	0,00053	0,52500		
	35	0,00105	0,04313	0,00069	0,45000		
	40	0,00150	0,04600	0,00106	0,37500		
	45	0,00230	0,04813	0,00218	0,30000		
	50	0,00396	0,04950	0,00549	0,22500		
	55	0,00693	0,05013	0,01348	0,15000		
	60	0,01060	0,05024	0,03539	0,07500		
2	$x$	$i_x$	$l_x^a$	$\lambda_x^i$	$l_x$		
	20	0,00010	100000	0	100000		
	25	0,00010	99566	46	99612		
	30	0,00010	99109	83	99192		
	35	0,00015	98599	121	98721		
	40	0,00035	97901	190	98091		
	45	0,00100	96771	388	97158		
	50	0,00311	94603	1025	95628		
	55	0,00889	90010	2812	92822		
	60	0,02820	80138	7838	87976		
	65		58507	21256	80063		
3	$x$	$D_x$	$N_x$	$D_x^a$	$N_{x: \overline{65-x}}^a$	$D_x^i$	$N_x^i$
	20	100000,0	2248722,7	100000,0	2080899,5	620941,1	8186672,9
	25	81873,6	1786412,7	81835,8	1618674,2	433517,6	5478089,4
	30	67010,5	1407951,4	66954,2	1240444,9	295195,3	3605031,6
	35	54816,0	1098243,4	54748,7	931039,6	196791,9	2339906,9
	40	44767,7	845027,7	44680,8	678190,4	128932,2	1502120,1
	45	36445,7	638448,8	36300,3	472138,7	83341,1	956090,9
	50	29484,0	470614,5	29167,9	305305,7	53357,2	604478,3
	55	23522,5	335457,7	22810,0	172403,5	33968,3	379896,6
	60	18324,5	228513,5	16691,9	70560,8	21583,3	237057,3
	65	13706,6	146316,0	10067,7		13706,6	146316,0
4	$x$	$\ddot{a}_{x: \overline{65-x}}^{aa}$	${}_{65-x} \ddot{a}_x^{aa}$	$\ddot{a}_x^{ai}$	${}_{65-x} \ddot{a}_x^a$	$\ddot{a}_{x: \overline{65-x}}^{ai}$	$\ddot{a}_x^{a+i}$
	20	20,809	1,075	0,604	1,463	0,215	1,678
	25	19,780	1,313	0,731	1,788	0,256	2,044
	30	18,527	1,605	0,886	2,185	0,307	2,492
	35	17,006	1,963	1,076	2,672	0,368	3,039
	40	15,179	2,405	1,306	3,272	0,439	3,711
	45	13,006	2,961	1,575	4,024	0,512	4,536
	50	10,467	3,685	1,860	4,987	0,558	5,545
	55	7,558	4,712	2,087	6,280	0,519	6,799
	60	4,227	6,439	1,950	8,103	0,286	8,389
	65		10,675		10,675		10,675

5	$x$	$i_{[40]x}$	$l_{[40]x}^{\mu}$	$\lambda_{[40]x}^{\mu}$	$l_{[40]x}$	$q_{[40]x}$
	40	0,00106	97901	0	97901	0,00152
	45	0,00106	96617	369	96986	0,00250
	50	0,00311	94440	1020	95460	0,00451
	55	0,00889	89853	2806	92659	0,00843
	60	0,02820	79998	7824	87822	0,01465
6	$x$	$D_{[40]x}$	$N_{[40]x}$	$D_{[40]x}^{\mu}$	$N_{[40]x:\overline{65-x}}$	
	40	44680,8	843526,1	44680,8	677194,2	
	45	36381,1	637328,9	36242,6	471329,9	
	50	29432,2	469790,6	29117,6	304774,3	
	55	23481,3	334870,7	22770,2	172102,5	
	60	18292,4	228113,7	16662,7	70437,6	
7	$x$	$\ddot{a}_{[40]x:\overline{65-x}}^{aa}$	$65-x \ddot{a}_{[40]x}^{aa}$	$\ddot{a}_{[40]x}^{ai}$	$65-x \ddot{a}_{[40]x}^{ai}$	$\ddot{a}_{[40]x:\overline{65-x}}^{ai}$
	40	15,156	2,401	1,322	3,269	0,454
	45	13,005	2,960	1,576	4,023	0,513
	50	10,467	3,684	1,860	4,987	0,558
	55	7,558	4,712	2,087	6,280	0,519
	60	4,227	6,439	1,950	8,103	0,286
8	$x$	$\ddot{a}_{[x]x:\overline{65-x}}^{aa}$	$65-x \ddot{a}_{[x]x}^{aa}$	$\ddot{a}_{[x]x}^{ai}$	$65-x \ddot{a}_{[x]x}^{ai}$	$\ddot{a}_{[x]x}^{a+i}$
	20	20,809	1,075	0,604	1,463	0,215
	25	19,771	1,313	0,735	1,787	0,261
	30	18,514	1,604	0,894	2,184	0,315
	35	16,989	1,961	1,087	2,669	0,379
	40	15,156	2,401	1,322	3,269	0,454
	45	12,972	2,950	1,603	4,017	0,537
	50	10,407	3,655	1,922	4,972	0,605
	55	7,481	4,633	2,209	6,256	0,586
	60	4,184	6,308	2,104	8,086	0,327
	65		10,675		10,675	10,675
9	$x$	$\ddot{a}_{x:\overline{65-x}}^{aa} -$	$65-x \ddot{a}_x^{aa} -$	$\ddot{a}_x^{ai} -$	$65-x \ddot{a}_x^a -$	$\ddot{a}_{x:\overline{65-x}}^{ai} -$
		$\ddot{a}_{[x]x:\overline{65-x}}^{aa}$	$65-x \ddot{a}_{[x]x}^{aa}$	$\ddot{a}_{[x]x}^{ai}$	$65-x \ddot{a}_{[x]x}^{ai}$	$\ddot{a}_{[x]x}^{a+i}$
	20	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	25	0,008	0,001	-0,005	0,001	-0,005
	30	0,013	0,001	-0,008	0,001	-0,008
	35	0,017	0,002	-0,011	0,002	-0,011
	40	0,022	0,004	-0,016	0,004	-0,015
	45	0,035	0,010	-0,028	0,007	-0,025
	50	0,060	0,030	-0,062	0,015	-0,047
	55	0,077	0,078	-0,121	0,024	-0,067
	60	0,044	0,130	-0,154	0,017	-0,041
	65		0,000		0,000	0,000

Calculées avec le nombre de chiffres significatifs que permet l'emploi de l'ordinateur, les valeurs des tableaux ci-dessus n'ont été arrondies que pour l'impression.

Le lecteur désirant des tableaux qui ne sont pas limités à des âges  $x$  de 5 ans en 5 ans peut les obtenir en écrivant à l'auteur.

## **Zusammenfassung**

Der Autor beschreibt einen Zusammenhang zwischen den traditionellen aktuariellen Methode der Pensionsversicherung und einem neuen Verfahren, das die Reaktivierung von Invaliden berücksichtigt.

## **Résumé**

L'auteur établit la liaison entre la technique actuarielle traditionnelle pour assurances de pensions et un procédé, qu'il développe, dans lequel intervient la réactivité des invalides.

## **Riassunto**

L'autore presenta la relazione tra la tecnica attuariale tradizionale per le casse di pensione e un nuovo metodo nel quale si tiene conto anche della riattivazione degli invalidi.

## **Summary**

The author describes the relation between the traditional actuarial method for pension-funds and a new procedure which also takes into account the rehabilitation of the disabled.