

Die Reservenbildung bei Pensionskassen in der Aufbauphase

Autor(en): **Letsch, Walter**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **78 (1978)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555036>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Reservenbildung bei Pensionskassen in der Aufbauphase

Von Walter Letsch, Zürich

1. Einleitung

Im folgenden wird der Vorgang der Reservenbildung bei neugegründeten Pensionskassen untersucht. Dabei wird angenommen, dass die Pensionskassen über kein Startkapital verfügen, d.h. die versicherten Leistungen sollten ausschliesslich durch Prämienzahlung finanziert werden. Wir können uns dabei auf das Deckungskapitalverfahren (DKV) oder Anwartschaftsdeckungsverfahren beschränken; die Reserven des Rentenwertumlageverfahrens (RUV) entsprechen den Reserven des DKV für die Rentner, die jeweils separat betrachtet werden sollen. Da beim Ausgabenumlageverfahren keine Reserven gebildet werden, kann bei diesem Finanzierungsverfahren auch nicht von einer Aufbauphase gesprochen werden.

Wir wählen die diskontinuierliche Darstellung und bezeichnen die individuellen Deckungskapitalien mit ${}_tV_x$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, es sei eine Altersrente in Höhe des Lohnes versichert; die übrigen Leistungen werden ausser acht gelassen.

Es ist zweckmässig, die individuellen Deckungskapitalien der Aktiven retrospektiv zu schreiben. Bei individueller Äquivalenz haben wir beim reinen Leistungsprimat

$${}_tV_x = P_{x:\overline{s-x}|} \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \quad \text{für Aktive und}$$

$$V_x = \ddot{a}_x \quad \text{für Rentner.}$$

Liegt jedoch ein Beitragsprimat vor, so gehen wir aus von

$${}_tV'_x = P_{x_0:\overline{s-x_0}|} \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \quad \text{für Aktive und}$$

$$V'_x = \ddot{a}_x \frac{{}_zV_{s-z}}{{}_{s-x_0}V_{x_0}} \quad \text{für Rentner,}$$

wobei $s - z$ das Alter beim Start der Pensionskasse bezeichnet.

In der Praxis wird oft eine Lösung gewählt, die zwischen Beitragsprimat und reinem Leistungsprimat liegt, indem für die jüngeren Jahrgänge der Eintrittsgeneration noch das volle Leistungsziel, für die älteren jedoch nur noch gekürzte Leistungen vorgesehen werden.

2. Die Reserven in der Aufbauphase

Die totale Reserve γ_t der Pensionskasse setzt sich zu einem beliebigen Zeitpunkt t zusammen aus:

γ_t^A : Reserve der aktiven Normalgeneration ($x \leq x_0$ bei $t = 0$)

γ_t^B : Reserve der aktiven Eintrittsgeneration ($x_0 < x < s$ bei $t = 0$)

γ_t^C : Reserve der Rentner der Eintrittsgeneration

γ_t^D : Reserve der Rentner der Normalgeneration (ab $t = s - x_0$)

Wir gehen im folgenden von einer Verteilung $\{l_x\}$ der Pensionskassenmitglieder aus, die der Absterbeordnung entsprechen soll. Die Neueintritte in die Pensionskasse erfolgen ausschliesslich im Alter x_0 , Pensionierungen im Alter s . Der Bestand der Aktiven soll jederzeit durch Neueintritte auf konstanter Höhe gehalten werden.

Am Ende des t . Jahres ($t \leq s - x_0$) nach dem Start der Pensionskasse hat beim Leistungsprimat die totale Reserve die Form

$$\gamma_{t \leq s - x_0} = \underbrace{\sum_{z=1}^t l_{x_0+z} \cdot {}_zV_{x_0}}_{\gamma_t^A} + \underbrace{\sum_{x=x_0+1}^{s-t} l_{x+t} \cdot {}_tV_x}_{\gamma_t^B} + \underbrace{\sum_{z=1}^{t-1} l_{s+t-z} \cdot \ddot{a}_{s+t-z}}_{\gamma_t^C}$$

Im ersten Jahr sind noch keine Rentner vorhanden, nach $s - x_0$ Jahren werden die ersten Rentner der Normalgeneration rentenberechtigt, nach $\omega - x_0$ Jahren ist die Eintrittsgeneration ausgestorben.

Für $t > s - x_0$ lautet die Formel für die totale Reserve am Ende des t . Jahres

$$\gamma_{t > s - x_0} = \underbrace{\sum_{z=1}^{s-x_0} l_{x_0+z} \cdot {}_zV_{x_0}}_{\gamma_t^A} + \underbrace{\sum_{z=1}^{s-x_0-1} l_{s+t-z} \ddot{a}_{s+t-z}}_{\gamma_t^B} + \underbrace{\sum_{z=1}^{t-s+x_0} l_{s+z} \ddot{a}_{s+z}}_{\gamma_t^D}$$

γ_t^A bleibt konstant, γ_t^B ist verschwunden; γ_t^C liefert letztmals einen Beitrag bei $\omega - x_0$.

Zur Beschreibung des Beitragsprimats sind in γ_t^B und γ_t^C lediglich ${}_tV_x$ und V_x durch ${}_tV'_x$ und V'_x zu ersetzen, was eine Reduktion der Reserven der Eintrittsgeneration bewirkt.

Beim Leistungsprimat steigt die totale Reserve der Kasse in den ersten Jahren wesentlich stärker an als beim Beitragsprimat, verflacht sich aber wieder allmählich. Der durchschnittliche Beitragssatz ist anfänglich sehr hoch, er fällt jedoch rasch und nähert sich dem Wert $P_{x_0:\overline{s-x_0}|}$, der nach $s-x_0-1$ Jahren erreicht wird.

Zur Illustration sei die totale Reserve für $x_0 = 25$ und $s = 65$ für das Ende des 2. Jahres und das Ende des 40. Jahres angegeben (Leistungsprimat), vgl. Tabelle 1 und Graphiken 3 und 4:

$$\gamma_2 = (l_{26} \cdot {}_1V_{25} + l_{27} \cdot {}_2V_{25}) + (l_{28} \cdot {}_2V_{26} + \dots + l_{65} \cdot {}_2V_{63}) + l_{66} \ddot{a}_{66}$$

$$\gamma_2 = \sum_{z=1}^2 l_{25+z} \cdot {}_zV_{25} + \sum_{x=26}^{63} l_{x+2} \cdot {}_2V_x + l_{66} \ddot{a}_{66}$$

$$\gamma_{40} = (l_{26} \cdot {}_1V_{25} + \dots + l_{65} \cdot {}_{40}V_{25}) + l_{66} \ddot{a}_{66} + \dots + l_{104} \ddot{a}_{104}$$

$$\gamma_{40} = \sum_{z=1}^{40} l_{25+z} \cdot {}_zV_{25} + \sum_{z=1}^{39} l_{105-z} \ddot{a}_{105-z}$$

Für die Reserven des RUV ist die Unterscheidung in die Perioden $t \leq s-x_0$ und $t > s-x_0$, die beim DKV von Interesse war, nicht mehr wesentlich. Die Reserven des RUV sind

$$\gamma_t = \sum_{z=1}^{t-1} l_{s+t-z} \cdot \ddot{a}_{s+t-z} \quad \text{für } t \leq \omega - s.$$

Mit $t = \omega - s$ ist der Beharrungszustand erreicht. Die beim DKV vorgenommene Unterscheidung in die Reservekomponenten der Normal- und Eintrittsgeneration ist hier ebenfalls nicht mehr von Bedeutung.

3. Rekursive Berechnung der Reserven

3.1. Reserven der aktiven Normalgeneration

Bei der Ableitung von Rekursionsformeln behalten wir die unter Ziffer 2 getroffene Einteilung der totalen Reserve bei. Wir betrachten zuerst die

Komponente γ_t^A , wobei wir uns auf die Aufbauphase, also $t \leq s - x_0$, beschränken.

Aus der Definition von γ_t^A erhält man unmittelbar

$$\gamma_t^A = \gamma_{t-1}^A + l_{x_0+t} \cdot {}_tV_{x_0}.$$

Diese Beziehung zeigt auf einfache Weise die Zunahme der Reserve der Normalgeneration, ohne allerdings den der Reservenerhöhung zugrunde liegende Mechanismus aufzuzeigen. Wir stellen daher noch eine weitere Rekursionsformel auf, bei der beim Übergang $t-1 \rightarrow t$ die Reserven nicht auf die nächstjüngere Generation übertragen werden, sondern bei den betreffenden Versicherten verbleiben und dort weiter erhöht werden.

Ausgehend von der Definition von ${}_zV_{x_0}$ ergibt sich

$${}_zV_{x_0} = ({}_{z-1}V_{x_0} + P) \frac{D_{x_0+z-1}}{D_{x_0+z}}$$

und damit, für $z \geq 2$:

$$l_{x_0+z} \cdot {}_zV_{x_0} = r l_{x_0+z-1} ({}_{z-1}V_{x_0} + P).$$

Daraus folgt durch Einsetzen in die Definitionsgleichung von γ_t^A :

$$\gamma_t^A = l_{x_0+1} \cdot {}_1V_{x_0} + r \gamma_{t-1}^A + rP \sum_{z=1}^{t-1} l_{x_0+z}.$$

Aus dieser Beziehung geht klar hervor, welche Faktoren zur Erhöhung der Reserve beitragen:

- + Reserve der neu eingetretenen x_0 -jährigen (Ende Jahr)
- + Aufzinsung der vorhandenen Reserve γ_{t-1}^A
- + Prämienzahlung der bisher Versicherten.

3.2. Reserven der aktiven Eintrittsgeneration

In Analogie zu den bei der aktiven Normalgeneration angestellten Überlegungen können wir

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_x = r l_{x+t-1} ({}_{t-1}V_x + P) \quad \text{für } x+t \leq s$$

in der Definitionsgleichung von γ_t^B einsetzen. Dies führt auf die Rekursionsformel

$$\gamma_t^B = r(\gamma_{t-1}^B + P \sum_{x=x_0+1}^{s-t} l_{x+t-1} - l_s \cdot {}_{t-1}V_{s-t+1}).$$

Die Höhe der Reserve ergibt sich also wie folgt:

- + Aufzinsung der vorhandenen Reserve γ_{t-1}^B
- + Prämienzahlung der bisher Versicherten ($x \leq s-1$)
- Übergang der s -jährigen in den Rentnerbestand

3.3. Reserven der Rentnerbestände

Die Rekursionsformeln für die Reserven der Rentner lassen sich im gleichen Sinne aufstellen, indem man von der Beziehung

$$l_x \ddot{a}_x = r l_{x-1} (\ddot{a}_{x-1} - 1)$$

ausgeht, und die Reserven für die Jahre $t-1$ und t geeignet umformt.

Für die Rentner der Eintrittsgeneration ergibt sich

$$\gamma_t^C = r(\gamma_{t-1}^C + l_s \ddot{a}_s - \sum_{z=1}^{t-1} l_{s+t-z-1})$$

und für die Rentner der Normalgeneration:

$$\gamma_t^D = r(\gamma_{t-1}^D + l_s \ddot{a}_s - \sum_{z=1}^{t+x_0-s} l_{s+z-1}).$$

Zu den Reserven tragen also bei:

- + Aufzinsung der vorhandenen Reserve γ_{t-1}^C bzw. γ_{t-1}^D
- + Reserve der Neurentner
- Rentenzahlungen (Höhe der Rente = 1) jährlich vorschüssig.

4. Beitragsbelastung in der Aufbauphase

Wie bereits erwähnt, ist die anfängliche Beitragsbelastung beim DKV für das reine Leistungsprimat sehr hoch. Sie beträgt

$$\beta_0 = \sum_{x=x_0}^{s-1} l_x P_{x:\overline{s-x}|}.$$

Dies ist etwa das 9fache der im statischen Beharrungszustand sich ergebenden Belastung (Grundlagen: GRM 1970 4%). Nach t Jahren sinkt die Belastung auf

$$\beta_t = \sum_{x=x_0+t}^{s-1} l_x P_{x-t:\overline{s-x+t}|} + P_{x_0:\overline{s-x_0}|} \sum_{x=x_0}^{x_0+t-1} l_x. \quad (\text{Graphik 1})$$

Die sich beim DKV für das Leistungsprimat ergebenden anfänglichen Aufwendungen sind so gross, dass für die älteren Mitglieder der Eintrittsgeneration normalerweise nur reduzierte Leistungen versichert werden können, oder aber, dass andere Wege für die Finanzierung gesucht werden müssen. Eine naheliegende Möglichkeit ist der Übergang von den individuellen Prämien zu technischen Durchschnittsprämien.

Technische Durchschnittsprämien führen zu einer anfänglich wesentlich geringeren Beitragsbelastung als individuelle Prämien. Nach 5–6 Jahren ist – bei den erwähnten Rechnungsgrundlagen – etwa die gleiche Belastung vorhanden, später wird die Belastung bei individuellen Prämien deutlich geringer. Dies bewirkt natürlich auch eine geringere Reservenbildung für die aktive Eintrittsgeneration.

Die technische Durchschnittsprämie \bar{P} ergibt sich durch Gleichsetzen des Barwertes dieser Durchschnittsprämien mit dem Barwert aller Anwartschaften auf Leistungen, wobei \bar{P} über die ganze Dauer der Versicherung konstant sein soll. Der Übergang von den individuellen Prämien $P_{x:\overline{s-x}|}$ zur Durchschnittsprämie \bar{P} bedeutet gleichzeitig den Übergang von der individuellen zu einer kollektiven Äquivalenz. Die jüngeren Personen ($x < \xi$) zahlen eine höhere Prämie als bei individueller Äquivalenz, während die älteren Personen bevorzugt werden. Beim kritischen Alter ξ gilt $P_{\xi:\overline{s-\xi}|} = \bar{P}$.

Bezeichnen wir mit $\bar{P}^{(0)}$ die Durchschnittsprämie für die geschlossene Gesamtheit (Erneuerung während 0 Jahren), so können wir schreiben

$$\bar{P}^{(0)} = \frac{\sum_{x=x_0}^{s-1} l_x P_{x:\overline{s-x}|} \ddot{a}_{x:\overline{s-x}|}}{\sum_{x=x_0}^{s-1} l_x \ddot{a}_{x:\overline{s-x}|}}.$$

Für $x_0 = 25$ und $s = 65$ ergibt dies bei der kollektiven Finanzierung mit den Grundlagen GRM 70 4%: $\bar{\beta}_0^{(0)} = 0.3779$ für die anfängliche Belastung einer neu gegründeten Pensionskasse, verglichen mit $\beta_0 = 0.8861$ bei Anwendung individueller Prämien. Das kritische Alter ist $\xi \simeq 47$. Das durchschnittliche Beitragsaufkommen $\bar{\beta}_t^{(0)}$ senkt sich im Laufe der Zeit und erreicht nach

39 Jahren das Niveau von β_{s-x_0} , da dann die anfänglich aktiven Personen pensioniert sind. Die im Alter 25 neu eintretenden Personen zahlen stets die individuelle Prämie $P_{\overline{25:40}} | P_{\overline{25:40}} = 0.0978$. Das durchschnittliche Prämienaufkommen nach t Jahren ergibt sich aus

$$\bar{\beta}_t^{(0)} = \bar{P}^{(0)} \sum_{x=x_0+t}^{s-1} l_x + P_{x_0:\overline{s-x_0}} \sum_{x=x_0}^{x_0+t-1} l_x. \quad (\text{Graphik 1})$$

Der Anstieg der totalen Reserve der Pensionskasse erfolgt anfänglich wesentlich weniger steil als bei Anwendung der individuellen Prämien, erreicht jedoch im Beharrungszustand, d.h. nach Verschwinden der aktiven Eintrittsgeneration, denselben Wert $\gamma(\text{BZ}) = 6.372$ wie bei der individuellen Methode.

Beim Zugrundelegen einer offenen Gesamtheit wird die Äquivalenzgleichung nochmals erweitert, indem angenommen wird, die Äquivalenz der Prämien und Leistungen beziehe sich auf die ganze künftige Dauer der Pensionskasse als Ganzes, unter Einbezug der später neu in die Pensionskasse eintretenden Personen.

Wir nehmen im folgenden einen Planungshorizont von T Jahren an, d.h. wir nehmen an, dass während T Jahren regelmässig ein jährlicher Neuzugang von l_{x_0} Personen stattfindet. Dies führt zu einem zusätzlichen Leistungsbarwert der Höhe

$$a_{\overline{T}|} l_{x_0} P_{x_0:\overline{s-x_0}} \ddot{a}_{x_0:\overline{s-x_0}}$$

und einem Prämienbarwert

$$a_{\overline{T}|} l_{x_0} \bar{P}^{(T)} \ddot{a}_{x_0:\overline{s-x_0}}.$$

Die technische Durchschnittsprämie $\bar{P}^{(T)}$ sinkt mit zunehmendem Planungshorizont T und ergibt sich direkt aus der Äquivalenzgleichung:

$$\bar{P}^{(T)} = P_{x_0:\overline{s-x_0}} + \frac{\sum_{x=x_0}^{s-1} l_x (P_{x:\overline{s-x}} - P_{x_0:\overline{s-x_0}}) \ddot{a}_{x:\overline{s-x}}}{\sum_{x=x_0}^{s-1} l_x \ddot{a}_{x:\overline{s-x}} + a_{\overline{T}|} l_{x_0} \ddot{a}_{x_0:\overline{s-x_0}}}.$$

Wir erkennen, dass $\bar{P}^{(T)}$ mit wachsendem T bzw. $a_{\overline{T}|}$ abnimmt.

In Abhängigkeit von T ergibt sich folgendes Bild (vgl. Graphik 2):

T	$\bar{P}^{(T)}$	ξ_T
0	0.3779	46.82
5	0.3350	45.28
10	0.3084	44.18
20	0.2782	42.75
50	0.2473	41.05
100	0.2381	40.47
∞	0.2367	40.39

$\bar{P}^{(0)}$ entspricht der geschlossenen Kasse, $\bar{P}^{(\infty)}$ der Kasse mit «ewigem» Zugang, d.h. mit Perennität. Ist Perennität vorhanden, so bleibt – bei Zutreffen der Rechnungsannahmen – der Beitragssatz langfristig gleich, d.h. die Beitragsbelastung ist während der Aufbauphase nicht grösser als im Beharungszustand.

5. Reserven bei Bilanzierung in offener Kasse

Die bei der Anwendung von technischen Durchschnittsprämien sich ergebenden Deckungskapitalien haben bekanntlich einige besondere Eigenschaften. Da für alle Alter $x \leq \xi$ die Prämie $\bar{P}^{(T)} \leq P_{x:\overline{s-x}|}$ ist, ergeben sich sowohl nach prospektiver als auch nach retrospektiver Methode andere Deckungskapitalien als bei Anwendung der individuell richtigen Prämien. Für $x < \xi$ resultieren Eintrittsgewinne der Höhe

$$(\bar{P}^{(T)} - P_{x:\overline{s-x}|}) \ddot{a}_{x:\overline{s-x}|}, \quad (\text{vgl. Tabelle 2})$$

für $x > \xi$ entsprechende Eintrittsverluste, wobei $\xi = \xi(T)$ ist.

Dies führt bei den technischen Durchschnittsprämien zu einem Auseinanderklaffen der prospektiven und retrospektiven Deckungskapitalien, vgl. Graphiken 7 und 8.

Bei Berücksichtigung der künftigen Neuzugänge ($T > 0$) wird $\bar{P}^{(T)}$ reduziert, indem die Finanzierung teilweise in die Zukunft verschoben wird. Zur Deckung aller Leistungen für den im Zeitpunkt t vorhandenen Bestand der Pensions-

kasse wird die gesamte prospektive Reserve $\gamma_t^p(T)$ benötigt. Zur Verfügung steht jedoch nur die gesamte retrospektive Reserve $\gamma_t^r(T)$. Diese Differenz heisst der latente Fehlbetrag der Pensionskasse und ist gleich dem Barwert der Entlastungen aus dem Neuzugang (Barwert der Eintrittsgewinne):

$$\Delta_t(T) = \gamma_t^p(T) - \gamma_t^r(T) = (\bar{P}^{(T)} - P_{x_0:\overline{s-x_0}}) \ddot{a}_{x_0:\overline{s-x_0}} | l_{x_0} a_{\overline{T-t}}.$$

Bei Ausbleiben des Neuzugangs in der erwarteten Höhe (Neuzugang $< l_{x_0}$) wird der latente Fehlbetrag voll oder teilweise manifest. Dabei ist der Fehlbetrag umso grösser, je höher T festgesetzt worden ist. Es ist daher sehr gefährlich, $T = \infty$ zu setzen; $T = 10$ sollte nicht überschritten werden. Es ist näherungsweise (vgl. Tabelle 2 und Graphik 10):

$$\Delta_0(10) \simeq 0.5 \Delta_0(\infty) \quad \text{und} \quad \Delta_0(5) \simeq 0.3 \Delta_0(\infty).$$

Die Bedeutung des latenten Fehlbetrages wird erst klar, wenn dieser mit der Gesamtreserve der Pensionskasse in Beziehung gebracht wird. Bei $T = 0$ (geschlossene Gesamtheit) wird im Beharrungszustand (BZ) die gleiche Gesamtreserve erreicht, wie bei Anwendung individueller Prämien, nämlich $\gamma(\text{BZ}, 0) = 6.372$. Für $T > 0$ wird dieser Beharrungszustand erst T Jahre später erreicht, doch ergibt diese nichts grundsätzlich neues.

Demgegenüber führt $\bar{P}^{(\infty)}$ im Beharrungszustand zu einer tieferen Reserve $\gamma(\text{BZ}, \infty) = 4.552$. Der Fehlbetrag $\Delta(\infty) = 1.820$ beträgt also fast 30% der ohne Berücksichtigung des Neuzugangs erforderlichen Gesamtreserve $\gamma(\text{BZ}, 0)$. Die prospektive Gesamtreserve der offenen Kasse setzt sich wie folgt zusammen (Grundlagen GRM 1970 4%; $x_0 = 25$, $s = 65$; Darstellung in Graphik 6):

$$\text{Rentner:} \quad R_{\gamma_t^p}(\infty) = \sum_{x=65}^{\omega} l_x \ddot{a}_x = 2.760$$

$$\text{Aktive:} \quad A_{\gamma_t^p}(\infty) = \sum_{x=25}^{64} l_x (s-x) \ddot{a}_x - \bar{p}^{(\infty)} \ddot{a}_{x:\overline{s-x}} = 1.792$$

$$\text{Neueintritte:} \quad \Delta_t(\infty) = (\bar{P}^{(\infty)} - P_{25:\overline{40}}) \ddot{a}_{25:\overline{40}} | l_{25} a_{\infty} = 1.820$$

6.372

Bleibt der Neuzugang aus, so muss die Prämie $\bar{P}^{(\infty)} = 0.2367$ um 0.0730 auf $*\bar{P}^{(\infty)} = 0.3097$ erhöht werden, um wenigstens die Verzinsung des Fehlbetrages zu gewährleisten, damit dieser nicht anwächst. Um eine volle Deckung

in geschlossener Kasse zu erreichen, muss die Prämie um 0.1412 auf $\bar{P}^{(0)} = 0.3779$ angehoben werden.

Bei der Reservestellung für Pensionskassen mit technischen Durchschnittsprämien spielt auch noch der Umstand eine Rolle, dass bei der verantwortungsbewussten Bilanzierung in geschlossener Kasse die negativen Deckungskapitalien durch die Freizügigkeitsleistungen gemäss Reglement (bzw. gemäss OR Art. 331 b) ersetzt oder mindestens $= 0$ gesetzt werden sollten. In offener Kasse ist dies natürlich nicht mehr möglich; um so mehr sollte dies zu entsprechender Vorsicht bei der Beitragsfestsetzung mahnen.

6. Numerische Ergebnisse

Die bisher erörterten Zusammenhänge werden im folgenden noch anhand einiger numerischer Beispiele illustriert, wobei besonderes Gewicht auf graphische Darstellungen gelegt wird.

Allen Berechnungen liegen die Grundlagen GRM 1970 4% zugrunde. Versichert ist eine ab Alter $s = 65$ jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente der Höhe 1. Die Altersverteilung $\{l\}$ der Pensionskasse entspricht der Absterbeordnung. Der Bestand der Aktiven wird durch Neueintritte im Alter $x_0 = 25$ auf konstanter Höhe gehalten. Es werden einheitliche, unveränderliche Löhne angenommen; auch die laufenden Altersrenten werden als konstant vorausgesetzt. Die Zahlwerte für Beiträge und Reserven beziehen sich jeweils auf den Einheitslohn pro Versicherten, resp. auf die Lohnsumme aller Aktiven.

In Graphik 1 ist der zeitliche Verlauf der Beitragsbelastung in der Aufbauphase dargestellt. Man erkennt klar, dass die totale Beitragsbelastung β_t bei individueller Äquivalenz nach 5–6 Jahren die totale Beitragsbelastung $\bar{\beta}_t^{(0)}$ bei technischen Durchschnittsprämien (geschlossene Kasse) unterschreitet. Nach 9–10 Jahren wird sie sogar tiefer als die bei Bilanzierung in offener Kasse sich ergebende Beitragsbelastung $\bar{\beta}^{(\infty)}$.

Graphik 2 zeigt die Abhängigkeit der technischen Durchschnittsprämie $\bar{P}(T)$ und des kritischen Alters ξ_T vom Planungshorizont T .

Die Graphiken 3–6 illustrieren die in den Ziffern 2 und 5. erläuterten Zusammenhänge über die Reserven einer Pensionskasse in der Aufbauphase. Für das Prämien- und Leistungsprimat mit individuellen Prämien (Graphiken 3 und 4) sind die Zahlenwerte in der Tabelle 1 aufgeführt.

In den Graphiken 7 und 8 sind für zwei verschiedene Eintrittsalter die bei technischen Durchschnittsprämien sich ergebenden prospektiven und retro-

spektiven Deckungskapitalen aufgezeichnet, wobei angenommen wurde, es werde in geschlossener Kasse bilanziert ($T = 0$).

Die Eintrittsgewinne bzw. Eintrittsverluste sowie der latente Fehlbetrag bei Bilanzierung in offener Kasse sind aus der Tabelle 2 und den Graphiken 9 und 10 ersichtlich. $T = 0$ charakterisiert die geschlossene Kasse, $T = \infty$ die Kasse mit Perennität. Die Eintrittsgewinne und -verluste sind in Einheiten des individuellen Lohnes, bzw. der versicherten Altersrente, gemessen. Der latente Fehlbetrag $\Delta_0(T)$ – der sich natürlich auf die Pensionskasse als ganzes bezieht – ist in Einheiten der totalen Lohnsumme aller Aktiven angegeben.

Wird eine Pensionskasse untersucht, deren Altersverteilung nicht der Absterbeordnung entspricht, so ergeben sich für die Beitragsbelastung und die Reservenbildung auch nach $s - x_0$ Jahren mehr oder weniger grosse Abweichungen vom hier untersuchten Modell. Die Abweichungen bei den Reserven sind in erster Linie auf die im Laufe der Zeit schwankende Zahl der Rentner zurückzuführen. Wird die Zahl der Aktiven durch Neueintritte von x_0 -jährigen auf konstanter Höhe gehalten, so ergeben sich langfristig auch entsprechende Schwankungen in den Erneuerungszahlen der Aktiven und der Rentner. Die daraus resultierenden Schwankungen der Reserve halten sehr lange an, wie Berechnungen für unterschiedliche Altersversicherungen gezeigt haben.

Walter Letsch
VITA Lebensversicherungs-AG
Mythenquai 10
8022 Zürich

Tabelle 1

Reservensätze während der Aufbauphase (individuelle Prämien)

Rechnungsgrundlagen:

GRM 70 4% netto, Altersrenten 1/1 vorsch., $x_0 = 25$, $s = 65$

t	Prämienprimat					Leistungsprimat		
	γ_t^B	γ_t^C	γ_t^C	γ_t^D	γ_t^{PP}	γ_t^B	γ_t^{C+D}	γ_t^{LP}
1	0.0027	0.0990	–	–	0.1017	0.9188	–	0.9215
2	0.0081	0.1971	0.0117	–	0.2169	1.3657	0.2336	1.6074
3	0.0165	0.2939	0.0339	–	0.3443	1.7059	0.4546	2.1770
4	0.0278	0.3893	0.0654	–	0.4825	1.9780	0.6629	2.6687
5	0.0423	0.4832	0.1051	–	0.6306	2.2008	0.8584	3.1015
6	0.0600	0.5753	0.1521	–	0.7874	2.3855	1.0412	3.4867
7	0.0811	0.6654	0.2053	–	0.9518	2.5392	1.2114	3.8317
8	0.1056	0.7534	0.2639	–	1.1229	2.6669	1.3691	4.1416
9	0.1338	0.8388	0.3271	–	1.2997	2.7721	1.5143	4.4202
10	0.1658	0.9216	0.3941	–	1.4815	2.8576	1.6474	4.6708
15	0.3877	1.2849	0.7626	–	2.4352	3.0497	2.1412	5.5786
20	0.7285	1.5326	1.1389	–	3.4000	2.9357	2.3942	6.0584
25	1.2132	1.6108	1.4820	–	4.3060	2.5695	2.4893	6.2721
30	1.8713	1.4483	1.7769	–	5.0965	1.9656	2.5114	6.3483
35	2.7386	0.9519	2.0246	–	5.7151	1.1165	2.5138	6.3689
40	3.8575	–	2.2318	–	6.0893	–	2.5138	6.3713
45	3.8575	–	1.3406	1.0412	6.2393	–		
50	3.8575	–	0.6928	1.7685	6.3188	–		
55	3.8575	–	0.2885	2.2087	6.3547	–		
60	3.8575	–	0.0872	2.4229	6.3676	–		
65	3.8575	–	0.0161	2.4973	6.3709	–		
70	3.8575	–	0.0013	2.5125	6.3713	–		
75	3.8575	–	0.0000	2.5138	6.3713	–		
80	3.8575	–	–	2.5138	6.3713	–	2.5138	6.3713

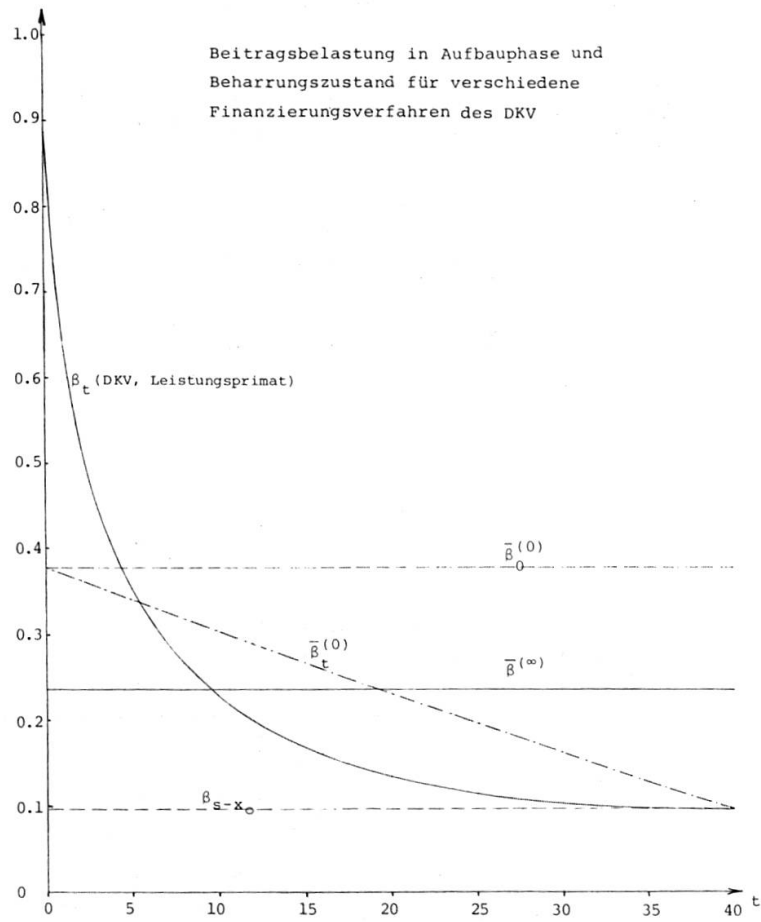
Anmerkung: $\gamma_t^A(LP) = \gamma_t^A(PP)$

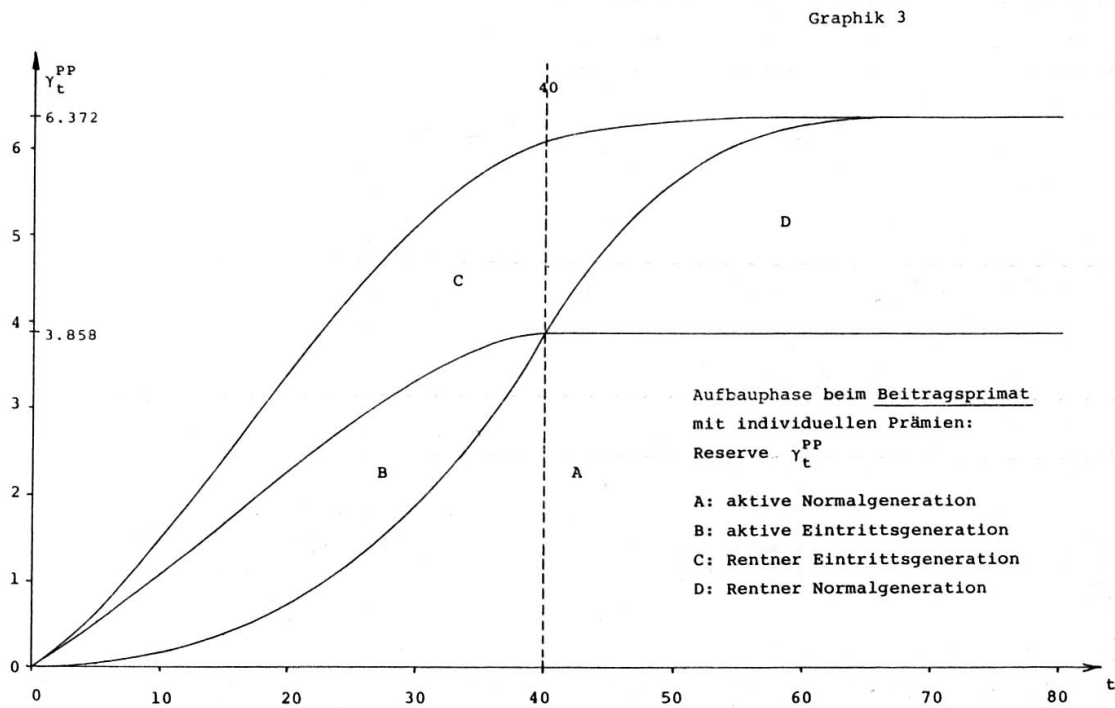
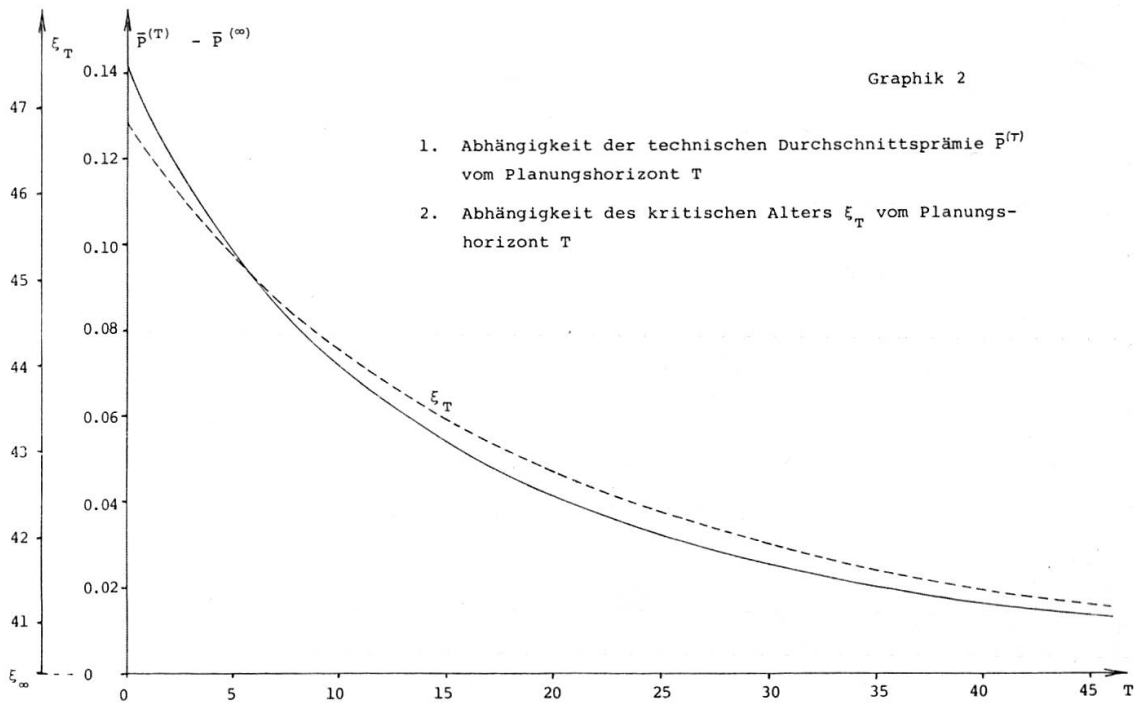
Eintrittsgewinn/-verluste und latenter Fehlbetrag als Funktion des Planungshorizontes T

Eintrittsgewinn/-verlust												
T	$\bar{p}(T)$	ξ_T	$x_0 = 20$	$x_0 = 25$	$x_0 = 30$	$x_0 = 35$	$x_0 = 40$	$x_0 = 45$	$x_0 = 50$	$x_0 = 55$	$x_0 = 60$	$\Delta_0^{25}(T)$
0	0.3779	46.82	6.3098	5.5804	4.6925	3.6104	2.2917	0.6792	-1.3143	-3.8162	-7.0460	-
1	0.3673	46.46	6.0881	5.3692	4.4940	3.4272	2.1268	0.5361	-1.4315	-3.9022	-7.0939	0.1358
3	0.3495	45.84	5.7158	5.0147	4.1607	3.1196	1.8498	0.2957	-1.6283	-4.0466	-7.1744	0.3661
5	0.3350	45.28	5.4125	4.7258	3.8892	2.8690	1.6243	0.0999	-1.7885	-4.1642	-7.2399	0.5535
10	0.3084	44.18	4.8562	4.1959	3.3911	2.4093	1.2104	-0.2593	-2.0826	-4.3799	-7.3601	0.8953
15	0.2907	43.36	4.4861	3.8432	3.0597	2.1033	0.9350	-0.4983	-2.2782	-4.5235	-7.4401	1.1241
20	0.2782	42.75	4.2246	3.5942	2.8256	1.8873	0.7406	-0.6670	-2.4164	-4.6249	-7.4966	1.2850
25	0.2691	42.28	4.0343	3.4129	2.6552	1.7300	0.5990	-0.7899	-2.5170	-4.6987	-7.5377	1.4026
30	0.2623	41.91	3.8921	3.2774	2.5279	1.6125	0.4932	-0.8817	-2.5922	-4.7539	-7.5684	1.4909
35	0.2570	41.61	3.7813	3.1718	2.4286	1.5209	0.4107	-0.9533	-2.6507	-4.7968	-7.5924	1.5574
40	0.2530	41.38	3.6976	3.0921	2.3537	1.5418	0.3485	-1.0073	-2.6950	-4.8293	-7.6104	1.6100
45	0.2498	41.20	3.6307	3.0284	2.2938	1.3965	0.2987	-1.0505	-2.7303	-4.8552	-7.6249	1.6507
50	0.2473	41.05	3.5784	2.9785	2.2470	1.3533	0.2598	-1.0843	-2.7580	-4.8755	-7.6362	1.6833
100	0.2381	40.47	3.3860	2.7953	2.0747	1.1943	0.1167	-1.2085	-2.8597	-4.9501	-7.6778	1.8019
∞	0.2367	40.39	3.3567	2.7674	2.0485	1.1701	0.0949	-1.2274	-2.8751	-4.9615	-7.6841	1.8200
$P_{x_0; s-x_0}$	=		0.0762	0.0978	0.1273	0.1690	0.2306	0.3276	0.4968	0.8484	1.9371	

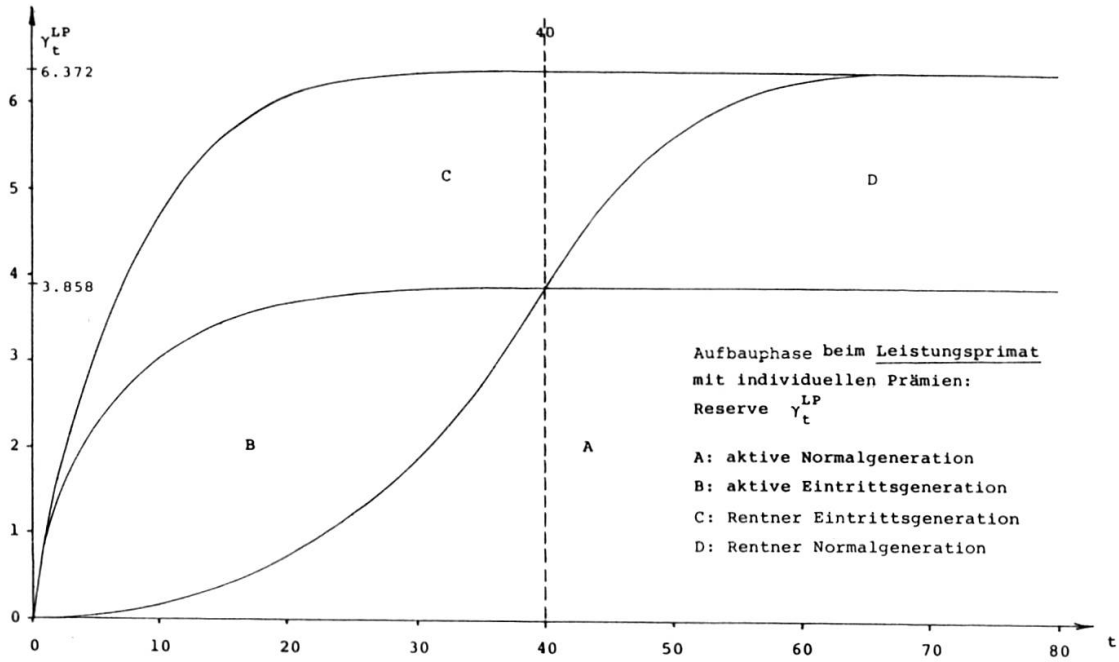
Der latente Fehlbetrag $\Delta_0^{25}(T)$ bezieht sich auf das Eintrittsalter $x_0 = 25$.

Graphik 1

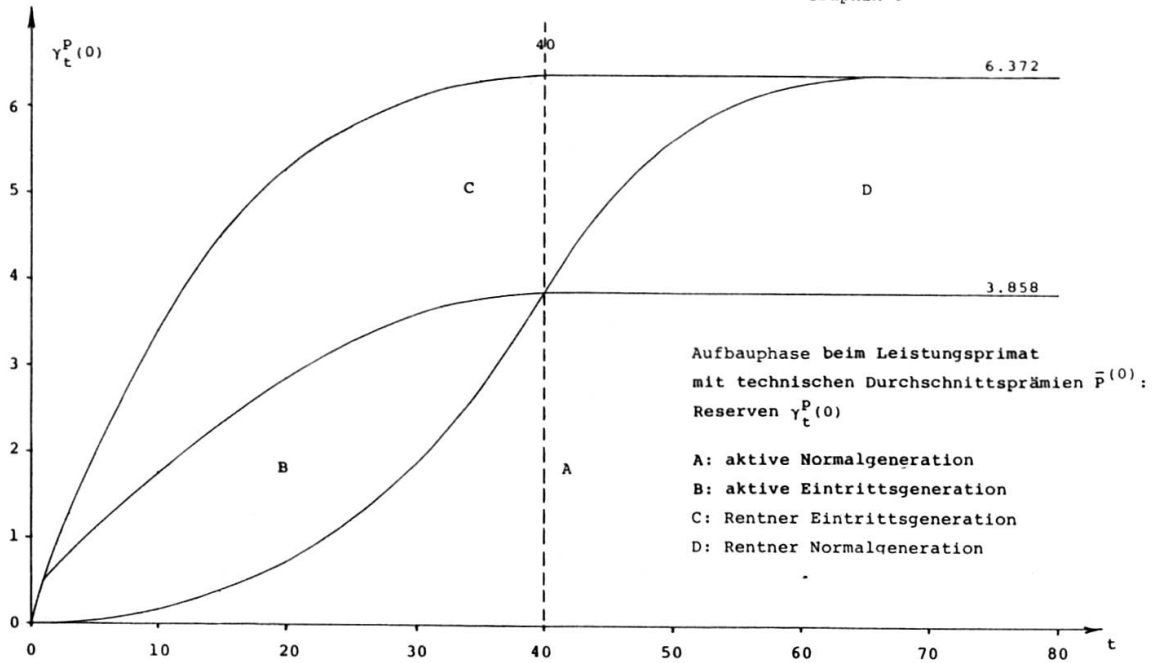




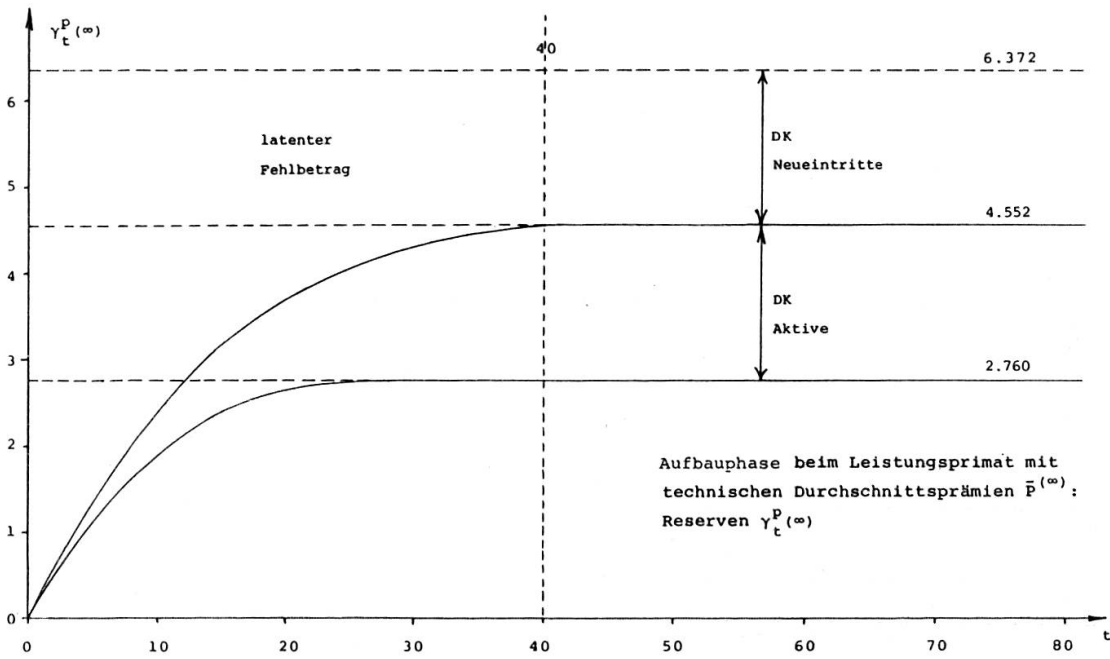
Graphik 4



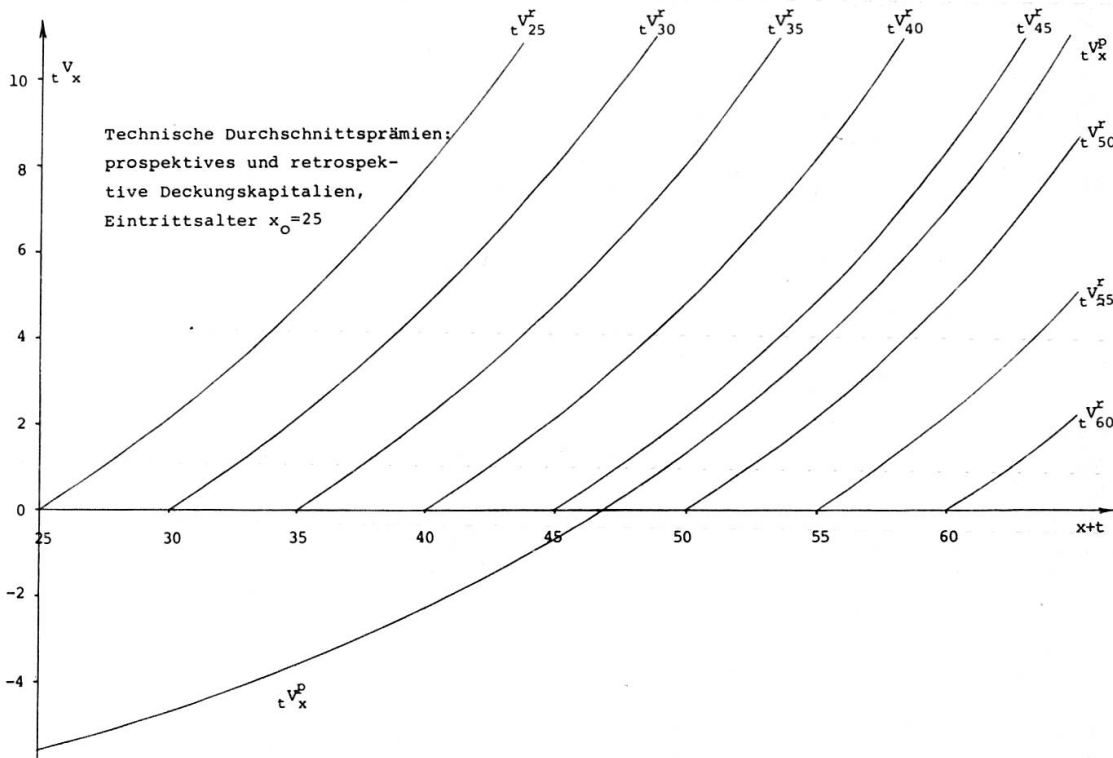
Graphik 5



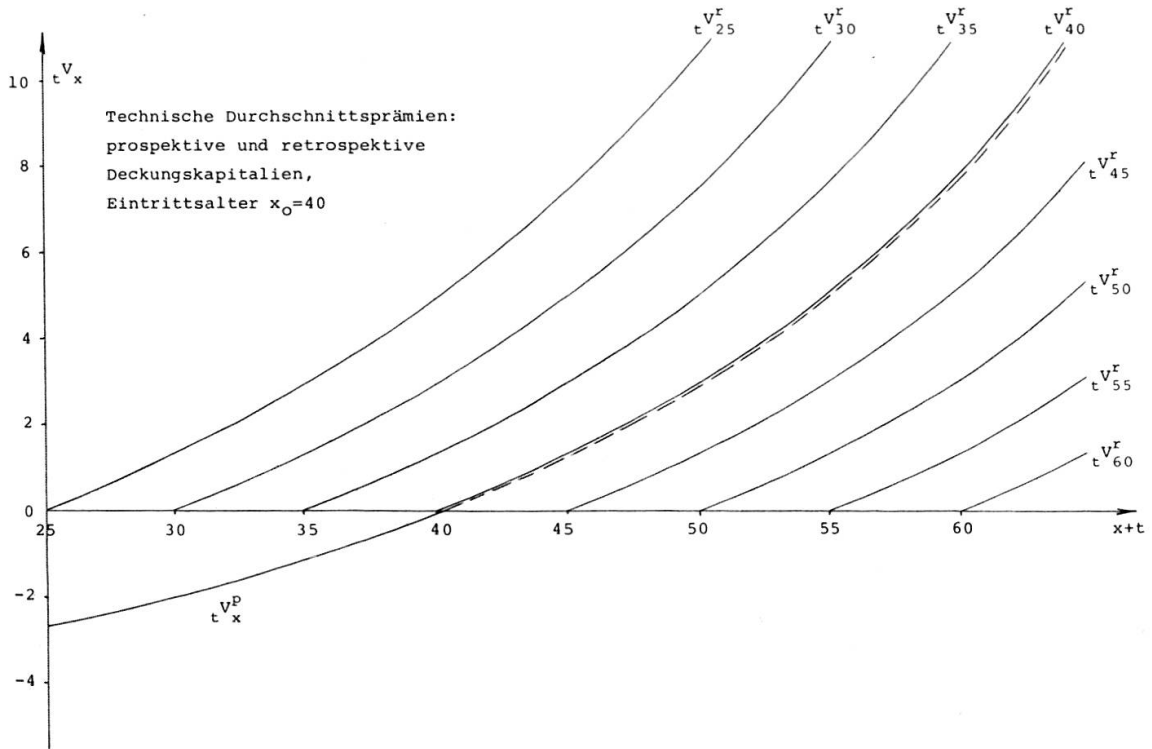
Graphik 6



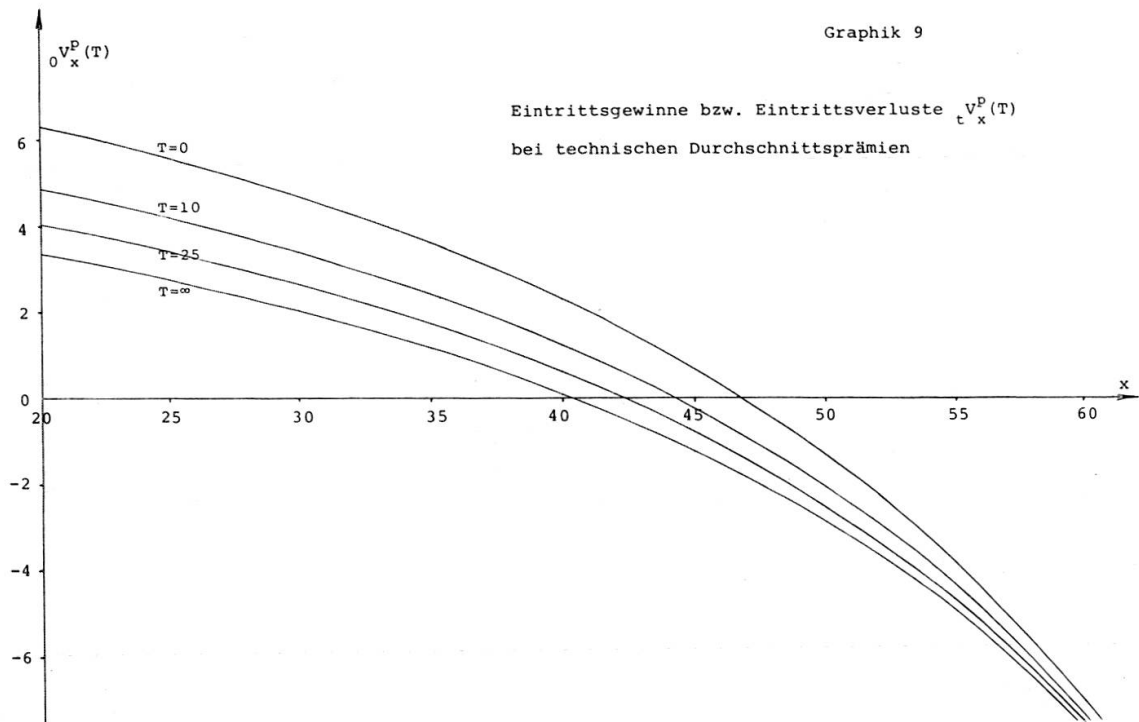
Graphik 7

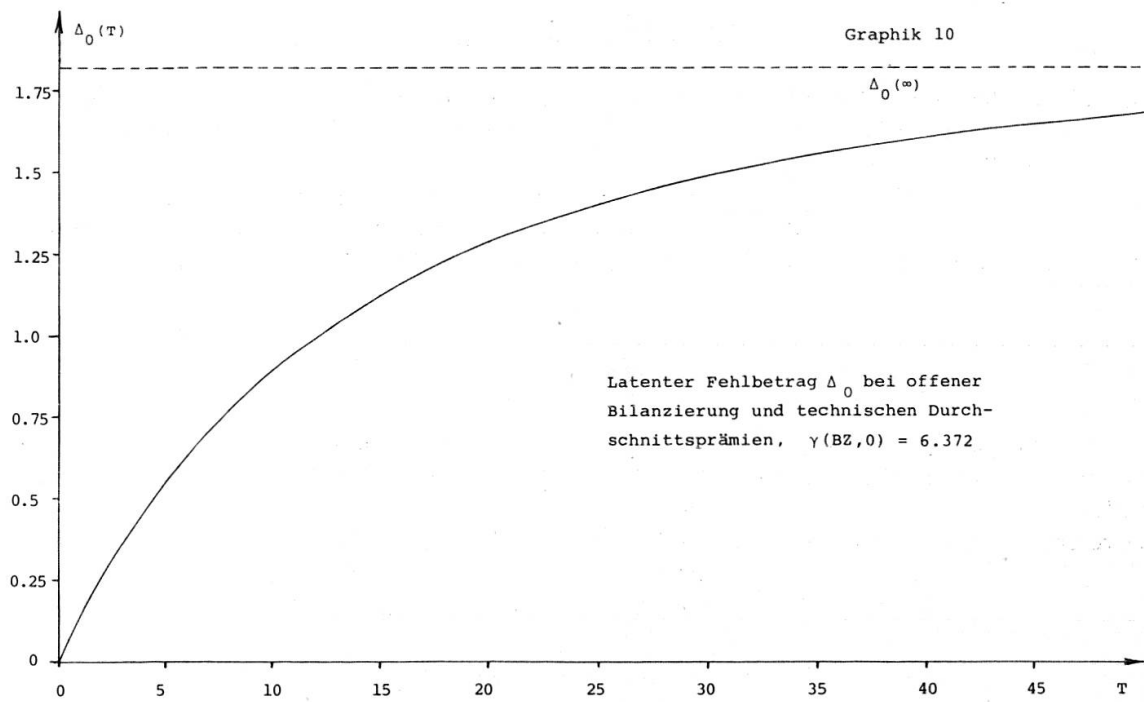


Graphik 8



Graphik 9





Zusammenfassung

Für individuelle und kollektive Finanzierungsmethoden innerhalb des Deckungskapital-Verfahrens werden Beitragsbelastung und Reservenbildung in der Aufbauphase und im Beharrungszustand einer Pensionskasse untersucht.

Die Reserven werden für Aktive und Rentner sowie für Normal- und Eintrittsgeneration getrennt betrachtet, und es werden auch Rekursionsformeln für die Reservenbildung hergeleitet. Schliesslich werden auch noch einige Probleme im Zusammenhang mit der Bilanzierung in offener Kasse erörtert.

Résumé

L'auteur analyse les charges et les réserves propres à une caisse de pensions dans sa phase de développement ainsi qu'en état stationnaire. L'étude porte sur les méthodes de financement individuelle et collective en système de capitalisation.

Les réserves sont ventilées selon qu'il s'agit d'actifs ou de rentiers, de génération normale ou de génération d'entrée. Les formules permettant de calculer les réserves sont aussi déterminées par récurrence. La fin de l'exposé est consacrée à certains aspects de l'établissement d'un bilan en caisse ouverte.

Riassunto

L'autore analizza le cariche e le riserve di una cassa di pensione nella sua fase di sviluppo e anche nel suo stato stazionario. Lo studio tratta i metodi di finanziamento individuali e collettivi nel quadro del sistema di capitalizzazione. Le riserve sono esaminate per gli attivi e i pensionati, per la generazione normale e la generazione d'entrata. Delle formule che permettono di calcolare le riserve sono determinate da ricorso. Alla fine dell'articolo si discutono problemi del bilancio di una cassa aperta.

Summary

Contributions and reserves are investigated during the developing phase as well as the steady state of a pension fund. Both, individual and collective financing methods in the framework of the funded system are considered. Reserves for actives and pensioners for the normal and the entering generation are treated separately, and recursion formulae for the building-up of reserves are derived. Finally, there are some comments on problems connected with the balance sheet of an open pension fund.