

# Note sur les valeurs actuelles de base pour des prestations variant en progression géométrique

Autor(en): **Chuard, Philippe**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **76 (1976)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967186>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Note sur les valeurs actuelles de base pour des prestations variant en progression géométrique

Par Philippe Chuard, Pully

## 1. Introduction

La mise au point de combinaisons d'assurances individuelles permettant de corriger les effets de la dépréciation monétaire, de même que la prise en considération, dans les caisses de pensions, de la croissance des salaires, attirent l'attention sur l'utilité des valeurs actuelles de base pour des prestations variant en progression géométrique. S'agissant de la loi que suivent les prestations, la notation actuarielle internationale, adoptée en 1898 et modifiée en 1954, prévoit quatre séries de symboles selon que les termes de rente ou les capitaux

- sont constants et égaux à 1,  
par exemple  $a_{\overline{n}|}$ ,  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ ,  ${}_nA_x$ ,
- croissent en progression arithmétique dont la raison et le premier terme sont égaux à 1,  
par exemple  $(Ia)_n$ ,  $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ ,  ${}_n(IA)_x$ ,
- décroissent en progression arithmétique dont la raison et le dernier terme sont égaux à 1,  
par exemple  $(Da)_{\overline{n}|}$ ,  $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ ,  ${}_n(DA)_x$ ,
- sont variables (sans autre précision),  
par exemple  $(va)_{\overline{n}|}$ ,  $(v\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ ,  ${}_n(vA)_x$ .

Le cas des prestations variant en progression géométrique n'est donc pas expressément prévu dans la notation actuarielle internationale. Pour ce cas nous nous permettrons, dans la présente note, d'introduire des notations indiquant au moyen de la lettre  $G$  que les prestations suivent une progression géométrique,

par exemple,  $(Ga)_{\overline{n}|}$ ,  $(G\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ ,  ${}_n(GA)_x$ .

## 2. Convention usuelle

Pour des valeurs actuelles de base on admet usuellement que si les prestations (termes de rente ou capitaux) varient en progression géométrique de raison  $q$ , le premier montant est égal à 1, le deuxième, à  $q$ , le troisième, à  $q^2$ , etc., le dernier, à  $q^{n-1}$  si le nombre de termes est limité à  $n$ .

Situons l'époque de calcul à l'instant 0 et rappelons que la période est la durée de référence du taux d'intérêt. Selon la convention usuelle le terme de rente échu à l'instant  $t$ , ou le capital exigible à la fin de la période de rang  $t$  (pour  $t > 0$ ), est égal à

$$\begin{aligned}
 & q^{t-1}, \quad \text{où } t = 1, 2, \dots, n, \quad \text{pour } (Ga)_{\overline{n}|}, \\
 & q^t, \quad \text{où } t = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{pour } (G\ddot{a})_x, \\
 & q^{t-n}, \quad \text{où } t = n, n+1, \dots, \quad \text{pour } {}_n|(G\ddot{a})_x, \\
 & q^{t-1}, \quad \text{où } t = 1, 2, \dots, n, \quad \text{pour } {}_{|n}(GA)_x,
 \end{aligned}$$

par exemple, ce qui peut être illustré par le schéma suivant:

valeur actuelle	prestations successives						
$(Ga)_{\overline{n} }$	1	$q$	...	$q^{n-2}$	$q^{n-1}$		
$(G\ddot{a})_x$	1	$q$	$q^2$	...	$q^{n-1}$	$q^n$	$q^{n+1}$ ...
${}_n (G\ddot{a})_x$						1	$q$ ...
${}_{ n}(GA)_x$	1	$q$	...	$q^{n-2}$	$q^{n-1}$		
instant $t$	0*	1	2	...	$n-1$	$n$	$n+1$ ...
période de rang $t$	1	2	...		$n$	$n+1$	...

\* époque de calcul.

### 3. Convention simplificatrice

Il est possible de faire une autre convention, que nous appellerons simplifi-  
catrice et dont nous montrerons les avantages, selon laquelle le terme de rente  
échu à l'instant  $t$ , ou le capital exigible à la fin de la période de rang  $t$  (pour  
 $t > 0$ ), est égal à  $q^t$  dans tous les cas (l'époque de calcul est située à l'instant 0).  
Les prestations prennent alors successivement les valeurs

$$\begin{aligned}
 & q, q^2, \dots, q^n \quad \text{pour } (Ga)_{\overline{n}|}, \\
 & 1, q, q^2, \dots \quad \text{pour } (G\ddot{a})_x, \\
 & q^n, q^{n+1}, \dots \quad \text{pour } {}_n|(G\ddot{a})_x, \\
 & q, q^2, \dots, q^n \quad \text{pour } {}_{|n}(GA)_x,
 \end{aligned}$$

par exemple, ce qui peut être illustré par le schéma suivant :

valeur actuelle	prestations successives								
$(Ga)_{\overline{n}}$		$q$	$q^2$	...	$q^{n-1}$	$q^n$			
$(G\ddot{a})_x$	1	$q$	$q^2$	...	$q^{n-1}$	$q^n$	$q^{n+1}$	...	
${}_n  (G\ddot{a})_x$						$q^n$	$q^{n+1}$	...	
${}_n  (GA)_x$		$q$	$q^2$	...	$q^{n-1}$	$q^n$			
instant $t$	0*	1	2	...	$n-1$	$n$	$n+1$	...	
période de rang $t$		1	2	...		$n$	$n+1$	...	

\* époque de calcul.

La convention simplificatrice revient donc à considérer une progression géométrique standard, de raison  $q$  et commençant par 1 à l'époque de calcul, dans laquelle on prend, aux échéances convenables, les termes relatifs à la valeur actuelle considérée.

#### 4. Propriété de la convention simplificatrice

Les montants des prestations variant en progression géométrique, et fixés selon la convention simplificatrice, agissent algébriquement, dans les valeurs actuelles, comme les facteurs d'escompte  $v^t$ . Considérons une prestation échue ou exigible au moment  $t$ . Son montant, selon la convention simplificatrice, vaut  $q^t$ . A l'époque de calcul (instant 0) sa valeur escomptée, sans mortalité, est  $q^t v^t$ . Si l'on introduit un taux d'intérêt fictif  $\underline{i}$  en posant

$$q v = \frac{1}{1 + \underline{i}},$$

on peut écrire

$$q^t v^t = \underline{v}^t, \quad \text{où} \quad \underline{v} = \frac{1}{1 + \underline{i}}.$$

Par conséquent, pour des prestations variant en progression géométrique, il est possible, avec la convention simplificatrice, d'utiliser les formules qui sont relatives aux prestations constantes, et dans lesquelles on fait intervenir un taux d'intérêt fictif tenant compte du taux d'intérêt réel et de la raison de la progression géométrique. Cette particularité facilite l'établissement des for-

mules et le calcul des valeurs numériques; elle constitue l'avantage de la convention simplificatrice par rapport à la convention usuelle.

Si, d'une manière générale, on désigne par  $\alpha$  une valeur actuelle pour des prestations unitaires constantes (par exemple  $a_{\overline{n}|}$ ,  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ ,  $\ddot{a}_{r:\overline{n}|}$ ,  ${}_nA_x$ ) et par  $(G\alpha)$  la valeur actuelle correspondante pour des prestations variant en progression géométrique selon la convention simplificatrice, on peut écrire

$$(G\alpha)(i) = \alpha(i)$$

ou, plus simplement,

$$(G\alpha) = \alpha.$$

La convention simplificatrice déploie ses effets non seulement sur les valeurs actuelles, mais encore sur les relations liant ces valeurs.

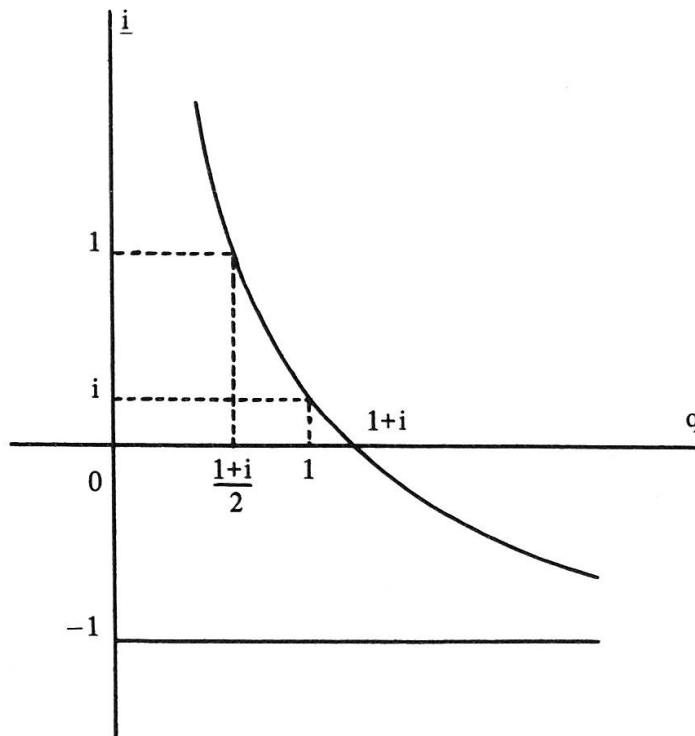
### 5. Variation de $\underline{i}$

Le taux d'intérêt  $\underline{i}$  étant défini par

$$\underline{i} = \frac{1+i}{q} - 1 \quad \text{où } q > 0,$$

il varie, en fonction de  $q$ , selon une branche d'hyperbole équilatère dont les asymptotes sont données par

$$\underline{i} + 1 = 0 \quad \text{et} \quad q = 0.$$



On peut constater que

$$\begin{aligned} \underline{i} &= 1, & i, & 0, \\ \text{pour } q &= \frac{1+i}{2}, & 1, & 1+i, \end{aligned}$$

et en outre que

$$\underline{i} > 1 \quad \text{pour} \quad 0 < q < \frac{1+i}{2}, \quad -1 < i < 0 \quad \text{pour} \quad q > 1+i.$$

### 6. Opérations certaines

Si l'on considère des termes variant en progression géométrique de raison  $q$ , et que l'on adopte la convention simplificatrice, on peut écrire, pour les valeurs actuelles de rentes certaines,

$$(G\ddot{a})_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-(qv)^n}{1-qv}$$

$$(Ga)_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} = \frac{1-(qv)^n}{1-qv} qv$$

$$(G\ddot{s})_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{\left(\frac{1}{qv}\right)^n - 1}{\frac{1}{qv} - 1} \frac{1}{qv}$$

$$(Gs)_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} = \frac{\left(\frac{1}{qv}\right)^n - 1}{\frac{1}{qv} - 1}$$

Ces formules s'établissent facilement compte tenu que

$$\underline{v} = qv, \quad \underline{r} = \frac{1}{qv}, \quad \underline{d} = 1 - qv, \quad \underline{i} = \frac{1}{qv} - 1.$$

Il convient de rappeler que le premier et le dernier termes sont

$$\begin{aligned}
 &1 \quad \text{et} \quad q^{n-1} \quad \text{pour} \quad (G\ddot{a})_{\overline{n}|}, \\
 &q \quad \text{et} \quad q^n \quad \text{pour} \quad (Ga)_{\overline{n}|}, \\
 &q^{-n} \quad \text{et} \quad q^{-1} \quad \text{pour} \quad (G\mathcal{S})_{\overline{n}|}, \\
 &q^{-(n-1)} \quad \text{et} \quad 1 \quad \text{pour} \quad (Gs)_{\overline{n}|};
 \end{aligned}$$

le schéma suivant, relatif à  $(Gs)_{\overline{n}|}$ , illustre un cas de valeur finale :

prestations successives							valeur actuelle
convention usuelle	1	$q$	...	$q^{n-3}$	$q^{n-2}$	$q^{n-1}$	} $(Gs)_{\overline{n} }$
convention simplificatrice	$q^{-(n-1)}$	$q^{-(n-2)}$	...	$q^{-2}$	$q^{-1}$	1	
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 100px; height: 10px;"></div> <div style="width: 100px; height: 10px;"></div> <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 100px; height: 10px;"></div> <div style="width: 100px; height: 10px;"></div> <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 100px; height: 10px;"></div> <div style="width: 100px; height: 10px;"></div> <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 100px; height: 10px;"></div> </div>							instant $t$
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span><math>-n</math></span> <span><math>-(n-1)</math></span> <span><math>-(n-2)</math></span> <span>...</span> <span><math>-2</math></span> <span><math>-1</math></span> <span><math>0^*</math></span> </div>							

\* époque de calcul.

Parmi les formules qu'on peut établir citons, à titre d'exemples,

$$(Ga)_{\overline{n}|} = qv(G\ddot{a})_{\overline{n}|} \quad , \quad \text{tiré de} \quad \underline{a}_{\overline{n}|} = v \underline{\ddot{a}}_{\overline{n}|} \quad ,$$

$$(Gs)_{\overline{n}|} = \left(\frac{1}{qv}\right)^n (Ga)_{\overline{n}|} \quad , \quad \text{tiré de} \quad \underline{s}_{\overline{n}|} = \underline{r}^n \underline{a}_{\overline{n}|} \quad .$$

Dans le cas particulier où  $q = 1 + i$  on a

$$(G\ddot{a})_{\overline{n}|} = (Ga)_{\overline{n}|} = (G\mathcal{S})_{\overline{n}|} = (Gs)_{\overline{n}|} = n \quad .$$

### 7. Opérations viagères

Partant de

$$\begin{aligned}
 (GD)_x &= \underline{D}_x = v^x 1_x = v^x q^x 1_x \\
 (GN)_x &= \underline{N}_x = \underline{D}_x + \underline{D}_{x+1} + \dots \\
 (GC)_x &= \underline{C}_x = v^{x+1} d_x = v^{x+1} q^{x+1} d_x \\
 (GM)_x &= \underline{M}_x = \underline{C}_x + \underline{C}_{x+1} + \dots
 \end{aligned}$$

on établit, en particulier,

$$\begin{aligned} (G\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\ {}_1|_n(GA)_x &= {}_1|_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \\ {}_n(GE)_x &= {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \\ (GA)_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} = {}_1|_nA_x + {}_nE_x \\ &= 1 - d \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 - (1 - qv) (G\ddot{a})_{x:\overline{n}|} \\ (GP)_{x:\overline{n}|} &= \frac{(GA)_{x:\overline{n}|}}{(G\ddot{a})_{x:\overline{n}|}} \end{aligned}$$

L'assurance temporaire au décès, dont la prime unique est  ${}_1|_n(GA)_x$  garantit le paiement, en fin d'année, de

$$\begin{aligned} q & \text{ si le décès a lieu pendant la 1}^{\text{re}} \text{ année,} \\ q^2 & \text{ si le décès a lieu pendant la 2}^{\text{e}} \text{ année,} \\ \dots & \\ q^n & \text{ si le décès a lieu pendant la } n^{\text{e}} \text{ année.} \end{aligned}$$

Pour le capital différé, dont la prime unique est  ${}_n(GE)_x$ , la prestation exigible en cas de vie à l'échéance s'élève à  $q^n$ .

Quant à  $(GP)_{x:\overline{n}|}$  c'est la première prime annuelle de l'assurance mixte, les suivantes étant

$$q(GP)_{x:\overline{n}|}, q^2(GP)_{x:\overline{n}|}, \dots, q^{n-1}(GP)_{x:\overline{n}|}.$$

Dans le cas particulier  $q = 1 + i$  on a

$$\begin{aligned} (GD)_x &= 1_x \quad (GN)_x = L_x \quad \text{en posant} \quad L_x = 1_x + 1_{x+1} + \dots \\ (GC)_x &= d_x \quad (GM)_x = 1_x \\ (G\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{L_x - L_{x+n}}{1_x} = \ddot{e}_{x:\overline{n}|} \\ {}_1|_n(GA)_x &= 1 - \frac{1_{x+n}}{1_x} \quad {}_n(GE)_x = \frac{1_{x+n}}{1_x} \\ (GA)_{x:\overline{n}|} &= 1 \quad (GP)_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{e}_{x:\overline{n}|}} \end{aligned}$$



### 8. Rentes à termes fractionnés

Les prestations variant en progression géométrique, et considérées jusqu'ici, prennent place dans la suite

$$1, q, q^2, q^3, \dots;$$

entre les échéances de deux prestations consécutives s'écoule une période, c'est-à-dire la durée de référence du taux d'intérêt. Les rentes qui suivent ce schéma sont à termes entiers. On peut envisager des rentes à termes fractionnés, telles que l'intervalle de temps entre les échéances de deux termes fractionnés consécutifs soit égal à une fraction de  $\frac{1}{m}$  de période. Il est plausible, en adoptant la convention simplificatrice, de fixer que les  $m$  termes fractionnés échus entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + 1$  sont tous égaux à  $\frac{q^t}{m}$  si la rente est payable postnumerando, ou à  $\frac{q^{t-1}}{m}$  si la rente est payable praenumerando. Cependant on ne peut alors pas utiliser les formules relatives aux prestations constantes, avec un taux d'intérêt fictif qui tient compte du taux d'intérêt réel et de la raison de la progression géométrique. La convention simplificatrice n'agit pas ici comme dans le cas des termes entiers. Nous n'examinerons pas cette question dans la présente note.

Observons cependant que si les termes payés tous les  $\frac{1}{m}$  de période suivent une progression géométrique de raison  $q^{\frac{1}{m}}$  et prennent donc place dans la suite

$$\frac{1}{m}, \frac{q^{\frac{1}{m}}}{m}, \frac{q^{\frac{2}{m}}}{m}, \dots, \frac{q^{\frac{m-1}{m}}}{m}, \frac{q}{m}, \frac{q^{\frac{m+1}{m}}}{m}, \dots,$$

la convention simplificatrice déploie ses effets dans le cas de la rente certaine, quand on fait usage de la méthode rationnelle. Il est alors possible d'écrire, par exemple,

$$(Ga)_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{a_{\overline{n}|}^{(m)}}{\underline{i}^{(m)}} = \frac{\underline{i}}{\underline{i}^{(m)}} a_{\overline{n}|} \quad \text{où } \underline{i}^{(m)} = m(\underline{r}^{\frac{1}{m}} - 1) \text{ avec } \underline{r} = 1 + \underline{i} \text{ et } \underline{i} = \frac{1 + i}{q} - 1.$$

## 9. Conclusions

Dans le cas de prestations qui varient en progression géométrique, les formules des valeurs actuelles de base, et les relations qui les lient, s'établissent d'une façon particulièrement simple si l'on convient que la prestation échue ou exigible au moment  $t$  s'élève à  $q^t$  (le moment 0 est placé à l'époque de calcul;  $q$  est la raison de la progression;  $t$  est un nombre entier de périodes). Cette situation, que nous caractérisons sous le nom de convention simplificatrice, permet en effet d'utiliser la technique actuarielle habituelle pour prestations constantes, dans laquelle on fait intervenir un taux d'intérêt fictif tenant compte du taux d'intérêt réel et de la raison de la progression géométrique.

Pour les opérations certaines, comme pour les opérations viagères, la convention simplificatrice offre donc un avantage important auquel ne conduit pas la convention, que l'on fait usuellement, d'attribuer le montant 1 à la première des prestations échues ou exigibles variant en progression géométrique.

Philippe Chuard, actuaire  
Professeur ordinaire  
à l'Université de Lausanne  
Avenue de Lavaux 93  
CH- 1009 Pully

## Zusammenfassung

Bei variablen Leistungen, die sich wie eine geometrische Progression verändern, lassen sich grundlegende Formeln der Lebensversicherungsmathematik einfach darstellen.

## Résumé

Dans le cas de prestations variant en progression géométrique, une convention permet de simplifier l'établissement des formules de valeurs actuelles et des relations qui lient ces valeurs.

## Riassunto

Nel caso di prestazioni variabili che cambiano come una progressione geometrica, le formule fondamentali attuariali possono essere rappresentate da una forma semplice.

## Summary

In the case of variable benefits varying like a geometrical progression, fundamental actuarial formulae can be put down in a simple form.

