

# Über die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung : zum 400. Todestag von Girolamo Cardano, 1501-1576

Autor(en): **Loeffel, Hans**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **76 (1976)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967183>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen

### Über die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung

(Zum 400. Todestag von Girolamo Cardano, 1501–1576)

Von Hans Loeffel, St. Gallen

#### 1. Einleitung

Die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist untrennbar mit der Frage nach dem Wesen des *Zufalls* verknüpft. *Padrot Nolfi* [1] hat sich in einer seiner letzten Publikationen mit dieser bis heute ungelösten Problematik auseinandergesetzt. Seit Urzeiten fühlten sich die Menschen vom *Glücksspiel* in seinen vielfachen Variationen angezogen, wenn nicht gar fasziniert. Welchen Platz im gesellschaftlichen Leben noch im 18. Jahrhundert das Spiel eingenommen hat, wird durch die Tatsache erhärtet, dass im 3. Teil des berühmten *Dictionnaire Encyclopédique des Mathématiques* von D'Alembert und Diderot auf fast 400 Seiten sämtliche damals bekannten Spiele in aller Gründlichkeit vorgestellt werden.

Auch in der Gegenwart blüht das Geschäft mit Roulette, Lotto und Toto. In der Antike wurde als Vorläufer des Würfels der sog. *Astragalus* verwendet, der lediglich auf vier Seiten fällt und aus dem Sprungbein der Ferse von Lämmern angefertigt wurde. Näheres in diesem Zusammenhang findet man im ausgezeichnet dokumentierten Buch von *F. N. David*, «Games, Gods and Gambling» [2], S. 1 ff.

Wie ist allgemein die Attraktivität des Glücksspiels zu erklären? Viele Vorgänge im menschlichen Leben sind wesentlich von Ungewissheit geprägt. Glück, Zufall, Chance oder Schicksal beherrschen nicht selten die Szenerie. Ist es deshalb so überraschend, dass der Mensch immer wieder versucht war, im Spiel mit dem Zufall konfrontiert zu werden? In der Antike dürften auch pseudoreligiöse Motive und orakelhafte Vorstellungen eine gewisse Rolle gespielt haben. Im Mittelalter und vor allem in der Renaissance standen allerdings handfestere Absichten im Vordergrund, nämlich die Hoffnung auf grossen Gewinn und die Freude am Risiko schlechthin. Sehr oft wurden Glücksspiele in direktem Zusammenhang mit dem Abschluss von Wetten getätigt.

Erwähnenswert ist der Umstand, dass in der Frühzeit die Beschäftigung mit dem Glücksspiel die Entwicklung des *abstrakten Zahlbegriffs* wesentlich gefördert hat.

Erstaunlich ist die Tatsache, dass mehrere Jahrhunderte verstreichen mussten, bis der Mensch auf die Idee kam, im scheinbar regellosen Zufallsgeschehen nach Gesetzmässigkeiten zu forschen und sie in mathematische Form zu bringen. Dazu wäre aber eine systematische Auszählung vieler Spielresultate notwendig gewesen, die zu jener Zeit als pietätloses Eindringen in die göttliche Ordnung unbewusst vermieden wurde. Cardano, zeitlebens ein leidenschaftlicher Hasardeur, kannte solche Hemmungen nicht. Frühzeitig machte er sich über die beobachteten Spielresultate Notizen, die ihm als empirische Grundlage für die spätere Formulierung von Hypothesen dienlich sein konnten. Aber auch andere italienische Mathematiker wie *Fra Luca Paccioli* (etwa 1445 bis etwa 1514) und *Galileo Galilei* (1564–1642) haben sich mit gewissen Glücksspielen auseinandergesetzt. Näheres darüber findet man bei *H. Bühlmann* in [3], «Die Geburtsstunde der mathematischen Statistik».

## 2. Lebensbeschreibung von Girolamo Cardano

Am 21. September 1976 sind 400 Jahre vergangen, seit *Girolamo Cardano* im Alter von fast 75 Jahren in Rom starb. Ausser im Kreise einiger Mathematiker dürfte der Erwähnte heutzutage wenig bekannt sein. Der abenteuerliche Lebenslauf des skandalumwitterten Universalgelehrten der italienischen Renaissance ist aber spannend genug, um ihn hier kurz zu schildern. Wir stützen uns dabei teilweise auf Cardanos Autobiographie *De propria Vita*, die von H. Hefele ins Deutsche übersetzt wurde [4]. Allerdings wird man deren Inhalt mit einiger Vorsicht aufnehmen müssen, wenn man den sprunghaften Charakter des Autors in Rechnung stellt. Trotzdem bietet die Lektüre einen unerhört lebendigen Einblick in die Höhen und Tiefen einer menschlichen Existenz, die in vielem charakteristische Züge ihres Jahrhunderts in sich trägt.

Girolamo Cardano wurde als unehelicher Sohn des *Fazio Cardano* (Rechtsanwalt und Mathematiker) und der *Chiara Micheria* am 24. September 1501 in Pavia geboren. Der kränkliche Girolamo, universell begabt wie sein Vater, begann mit 19 Jahren das Medizinstudium an der Universität Pavia, von wo er infolge Kriegswirren bald nach Padua übersiedeln musste. Noch als Student wurde er hier für ein Jahr zum Rektor der Universität gewählt und beteiligte sich leidenschaftlich an den – damals üblichen – öffentlichen Diskussionen.

Nach Abschluss seiner Studien führte er im kleinen Städtchen Sacco und später in Mailand eine ärztliche Praxis.

1531 verheiratete sich Cardano mit *Lucia Bandarini*, die ihm zwei Söhne und eine Tochter schenkte. Einen geheimnisvollen Traum deutete er als schlechtes Omen für diese Verbindung [4]. In der Tat brachten ihm seine beiden Söhne viel Ärger und Verdruss. Gianbattista, der ältere, den er besonders zu fördern versuchte, wurde des Giftmords an seiner Frau angeklagt und mit dem Schwert hingerichtet. Der jüngere, Aldo, führte ein liederliches Leben in schlechter Gesellschaft und liess sich sogar zur Bestehlung seines Vaters hinreissen.

Obschon Cardanos fachliche Qualitäten ausser Zweifel standen, musste er jahrelang um die Aufnahme in die Mailänder Ärztekammer kämpfen, nicht zuletzt deshalb, weil er durch allzu massive Angriffe die herrschende Ärztepraxis unter Beschuss nahm, aber auch seiner unehelichen Herkunft wegen. Doch mit der Zeit wurde Cardano zu einem der angesehensten Ärzte Europas. Kirchliche und weltliche Würdenträger wandten sich hilfesuchend an ihn. John Hamilton, Erzbischof von Edinburgh, lud ihn sogar nach Schottland ein zwecks Behandlung eines chronischen Asthmaleidens. 1543 erhielt er durch Vermittlung einflussreicher Freunde eine Professur für Medizin an der Universität Pavia, von wo er rund 20 Jahre später seiner unglücklichen Familienverhältnisse wegen nach Bologna ziehen musste.

Neben seiner Haupttätigkeit als Arzt fand Cardano immer wieder Zeit für zahlreiche Veröffentlichungen (es dürften im ganzen über 200 gewesen sein) auf den verschiedensten Gebieten wie: Medizin, Mathematik, Physik, Astronomie, Musik, Astrologie, Schach, Fragen der Moral und Unsterblichkeit der Seele, das Leben Jesu, die heilige Jungfrau usw. 1536 wurde sein erstes Werk über Medizin publiziert mit dem Titel *De Malo Recentiorum Medicorum Medendi Usu*. Besondere Aufmerksamkeit und Verbreitung fand sein populärwissenschaftliches Werk philosophischen Inhalts mit dem Titel *De Subtilitate Rerum*. Es wurde 1551 veröffentlicht und ist eine Mischung wissenschaftlicher Betrachtungen einerseits und von abergläubischen Vorstellungen getragener Berichte andererseits.

Das Leben von Cardano ist gekennzeichnet durch einen sprunghaften Wechsel zwischen Erfolg und Niederlage, zwischen naiver Leichtgläubigkeit und abergläubischem Argwohn sowie zwischen christlicher Frömmigkeit und quälendem Skeptizismus. Auch seine letzten Lebensjahre waren von Bedrängnis überschattet. 1570 wurde er der Häresie bezichtigt und ins Gefängnis gesteckt. Vielleicht war es die Abfassung eines Horoskops von Jesus Christus, die den direkten Anlass dazu gab. Doch Cardano – im Grunde seines Herzens ein treuer

Anhänger der Kirche, gegen die er nie öffentlich aufgetreten war – fand milde Richter. Der damalige Papst Pius V. gewährte ihm sogar eine Rente mit der Auflage, auf jegliche öffentliche Lehrtätigkeit und Publikationen zu verzichten. Auf die astrologischen Gutachten des prominenten «Schutzbefohlenen» dürfte der Vatikan dagegen kaum verzichtet haben! Sozusagen als Vermächtnis an die Nachwelt schrieb Cardano in jenen letzten Monaten seines Lebens die bereits erwähnte Autobiographie, in der er auch vor den peinlichsten Enthüllungen nicht zurückschreckte. Am 21. September 1576 fand der unruhige Geist seine letzte Ruhe.

### 3. Das mathematische Werk von Cardano, insbesondere auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bei den Mathematikern hinlänglich bekannt ist die sog. *Cardanosche Formel* für die Auflösung der kubischen Gleichung

$$x^3 + px + q = 0.$$

Der eigentliche Erfinder ist *Niccolò Fontana*, genannt *Tartaglia* (der Stotterer), ein Zeitgenosse von Cardano. Wir wollen aber auf den diesbezüglichen Prioritätsstreit hier nicht weiter eintreten. Immerhin kommt Cardano das Verdienst zu, als einer der ersten die Gleichungen von höherem Grad als zwei systematisch untersucht zu haben. Neben approximativen Lösungsmethoden hat er auch Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer Gleichung und ihren Wurzeln gefunden. Sein mathematisches Hauptwerk, die *Artis magna sive de regulis algebraicis liber unus*, kurz *Ars magna* genannt, wurde 1545 in Nürnberg gedruckt. Sie stellt eine grossartige wissenschaftliche Leistung dar, besonders wenn man bedenkt, dass zu jener Zeit die uns geläufigen mathematischen Symbole teilweise noch unbekannt waren, was die Entwicklung der Gedanken ungemein erschwerte.

Erst in jüngster Zeit haben geschichtlich interessierte Mathematiker die Forschung Cardanos über *Wahrscheinlichkeitsrechnung* näher unter die Lupe genommen. Es handelt sich um sein Werk *Liber de Ludo Aleae*, das nach seinem Tode als Manuskript zurückblieb und erst im Jahre 1663 in Lyon innerhalb des zehnbändigen Gesamtwerkes publiziert wurde. Es hatte deshalb (leider) keinen Einfluss auf die französische Schule von *Blaise Pascal* (1623–1662) und *Pierre Fermat* (1601–1665). Lange Zeit wurden Cardanos Verdienste um die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung verkannt oder doch zumindest verzerrt

dargestellt. Nur wenige Autoren, wie *Todhunter* [5] und vor allem *Moritz Cantor* [6], bemühen sich um eine sachliche Auseinandersetzung. Eine besonders sorgfältige und kritische Würdigung leistet *Oystein Ore* in seinem Buch *Cardano the gambling Scholar* [7]. Der unsystematische Aufbau sowie die parallele Verwendung von z. T. falschen Methoden sind Gründe dafür, dass das Originalwerk von Cardano streckenweise recht mühsam zu lesen ist. In [7] findet man u. a. einen vorzüglichen Kommentar zur englischen Übersetzung des Liber de Ludo Aleae.

Neben allgemeinen Exkursen über die Psychologie des Glücksspiels finden sich im genannten Werk *erstmalig Ansätze zu einer mathematischen Bewältigung der Gesetze des Zufalls*. Folgende Punkte seien speziell hervorgehoben:

*a) Untersuchung gewisser Würfelspiele*

Als Beispiel sei das Werfen zweier homogener Würfel erwähnt, ein Spiel, das damals sehr beliebt war. Cardano stellt fest, dass sämtliche Kombinationen  $(i, j)$  [ $i$  bzw.  $j$  sei die Augenzahl auf dem 1. bzw. 2. Würfel] gleichwahrscheinlich sind. Alsdann berechnet er mit Hilfe des kombinatorischen Abzählens die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Summen  $s = i + j$  [ $s = 2, 3, \dots, 12$ ] auf korrekte Weise. Diese Leistung ist um so höher einzuschätzen, wenn man bedenkt, dass selbst *G. W. Leibniz* (1646–1716) an diesem konkreten Problem gescheitert ist.

*b) Cardano hat als erster die üblicherweise nach Laplace benannte «klassische» Wahrscheinlichkeitsdefinition verwendet.*

$$\text{I) } p = \frac{g}{m} \quad \begin{array}{l} g = \text{Anzahl günstiger Fälle} \\ m = \text{Anzahl (gleichwahrscheinlicher)} \\ \quad \text{möglicher Fälle} \end{array}$$

*c) Das «problème des dés» und der Additionssatz*

Cardano betrachtete zwei homogene Würfel und fragte nach der kleinsten Anzahl  $n_0$  von Doppelwürfen, bei der die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Doppelsechs (6, 6) zu werfen, 0,5 oder mehr ist. Dieses im 11. Kapitel des Liber

de ludo aleae aufgeworfene Problem wurde rund hundert Jahre später von *Chevalier de Méré* seinem Freund Pascal unterbreitet, der eine exakte Lösung fand. De Méré, noch fest im Proportionaldenken verhaftet, geriet in Widersprüche. Auch Cardano war ausserstande, die Schwierigkeiten zu überwinden; wir wollen seinen Gedankengängen kurz folgen.

Sei  $p = p(A_i)$  die Wahrscheinlichkeit, beim  $i$ -ten Doppelwurf eine (6, 6) zu werfen. Cardano geht nun offensichtlich von der irrtümlichen Annahme aus, dass

$$\text{II) } p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$$

allgemein gilt und schliesst dann mit

$$n \cdot \frac{1}{36} = 0,5 \quad \text{auf } n = n_0 = 18,$$

was offenbar falsch ist, denn II) gilt ja nur für

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Wir vermerken noch die korrekte Lösung  $n_0 = 25$ , denn

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{n_0} > 0,5 \quad \text{und} \quad 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n < 0,5 \quad \text{für } n < n_0.$$

#### d) Das «Potenzgesetz» für unabhängige Ereignisse

Wir beziehen uns erneut auf die Situation unter c). Cardano gelingt es – nach anfänglichen Fehlversuchen –, das Potenzgesetz

$$\text{III) } p\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = [p(A_i)]^n$$

zumindst für spezielle  $n$  zu erkennen und richtig anzuwenden. Mit Hilfe von III) und durch Betrachten des komplementären Ereignisses

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

hätte Cardano im Prinzip über die Möglichkeiten zur Lösung des «problème des dés» verfügt.

e) Erwartungswert einer Zufallsvariablen

In Kapitel 32 wird nach der *mittleren Augenzahl* beim Werfen eines Würfels gefragt und mit 3,5 richtig beantwortet.

f) Erste Vorstellungen vom «Gesetz der grossen Zahlen»

Cardano deutet zum erstenmal – noch in verbaler Form – das berühmte Gesetz an, das durch *Jakob Bernoulli* (1654–1705) seine endgültige Form fand [8]. In freier deutscher Übersetzung sagt Cardano etwa: «Wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis  $p$  ist, dann tritt es in einer langen Serie von  $n$  unabhängigen Versuchen in einer Anzahl auf, die sich von  $np$  nur um wenig unterscheidet.» (Vgl. [3], S. 169.)

Zum Schlusse möchte ich noch auf ein zweites berühmtes Problem eingehen, nämlich das *Teilungsproblem* («problème des partis»), das Cardano schon in seinem mathematischen Erstlingswerk *Practica Arithmeticae generalis* (1539 erschienen) erwähnt, aber nicht zu lösen imstande ist.

Zwei Spieler A und B leisten einen gleichen Einsatz und vereinbaren folgendes: Fällt eine symmetrische Münze auf «Kopf», so erhält A einen Punkt zugesprochen, andernfalls B. Wer zum erstenmal  $k$  Punkte erreicht, erhält den gesamten Einsatz. Nun muss das Spiel vorzeitig abgebrochen werden, nachdem A über  $m$  und B über  $n$  Punkte verfügt. In welchem Verhältnis ist der Gesamtgewinn unter die beiden Spieler aufzuteilen?

Erst 1654 fanden Pascal und Fermat fast gleichzeitig und auf verschiedenen Wegen die korrekte Lösung. Näheres zu dieser spannenden Angelegenheit findet sich in [9], wo auch gezeigt wird, wie man mit Hilfe von *Markovketten* eine computerfreundliche und verallgemeinerungsfähige Lösung finden kann.

#### 4. Versuch einer abschliessenden Würdigung

Jahrhundertlang haben sich Menschen mit Glücksspielen verschiedenster Art (Astragalus, Primero, Fritillus, Würfeln, Spielkarten usw.) auseinandergesetzt, wobei okkulte und pseudoreligiöse Vorstellungen nicht selten eine Rolle spielten. Cardano hat als erster – wenn auch in noch unvollkommener Form – die mathematischen Gesetzmässigkeiten des Zufalls systematisch zu erforschen versucht. Damit hat er eine *Pionierleistung* vollbracht, wenn auch festgehalten



werden muss, dass das Ideengut von Cardano erst um die Mitte des 17. Jahrhunderts zur vollen Reife gelangte.

Cardano war ein Mensch von universaler Gelehrsamkeit, der sich im *Liber de Ludo Aleae* auch mit psychologischen und erkenntnistheoretischen Fragen des Zufalls befasst hat. Wenn auch durch *A. N. Kolmogoroff* im Jahre 1933 die Wahrscheinlichkeitsrechnung einen offenbar unanfechtbaren Platz in der mathematischen Arena gefunden hat, so sind doch seit Cardano bis in unsere Tage die Kontroversen über die *Interpretation* von Wahrscheinlichkeiten (Schule der «Subjektivisten» um L. J. Savage) sowie über mögliche *Erweiterungen der Wahrscheinlichkeitstheorie*, wie sie *P. Nolfi* in [1], S. 346 vorgeschlagen hat, nicht verstummt.

### Literaturverzeichnis

- [1] *Nolfi, Padrot*: Zufall und Wahrscheinlichkeit, in: *Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 71. Band, Heft 2, 1971.
- [2] *David, F. N.*: *Games, Gods and Gambling*, Charles Griffin, London 1962.
- [3] *Bühlmann, Hans*: Die «Geburtsstunde» der mathematischen Statistik, in: *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich*, Jahrgang 109, Heft 3, 1964.
- [4] *Cardano, Girolamo*: *De propria Vita*, übersetzt ins Deutsche von H. Hefele, Verlag Diederichs, Jena 1914.
- [5] *Todhunter, I.*: *History of the Theory of Probability*, Chelsea Publishing Company, Reprint, New York 1965.
- [6] *Cantor, Moritz*: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2. Band, Verlag Teubner, Leipzig 1892, S. 494.
- [7] *Oystein, Ore*: *Cardano the gambling scholar*, Princeton University Press, 1953.
- [8] *Bernoulli, Jakob*: *Ars conjectandi* (1713), *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 107, Verlag W. Engelmann, Leipzig 1899.
- [9] *Loeffel, Hans*: *Glücksspiel und Markovketten*, in: *Elemente der Mathematik*, Vol. 29/6, Verlag Birkhäuser, Basel 1974.

Prof. Dr. Hans Loeffel  
Goethestrasse 25  
9008 St. Gallen

## Zusammenfassung

Seit Jahrhunderten beschäftigen sich Menschen mit dem Glücksspiel in seinen mannigfachen Formen. *Girolamo Cardano* (1501–1576), selber ein leidenschaftlicher Hasardeur, hat als erster versucht, die mathematischen Gesetzmässigkeiten des Zufalls zu erforschen. Er hat mit seinem Werk *Liber de Ludo Aleae* eine eigentliche Pionierleistung vollbracht. Das abenteuerliche Leben des gleichermassen genialen wie exzentrischen Arztes, Naturwissenschaftlers, Philosophen und Mathematikers vermittelt einen lebendigen Einblick in die Verhältnisse seiner Zeit.

## Résumé

Depuis des siècles l'homme s'est occupé volontiers aux jeux de hasard dans diverses formes. *Girolamo Cardano* (1501–1576), lui-même un joueur passionné, a fait comme premier des recherches mathématiques au sujet de certains phénomènes aléatoires. La vie aventureuse du médecin, physicien, philosophe et mathématicien aussi génial qu'excentrique, nous donne une image vivante de son époque.

## Riassunto

Da più di duemila anni l'uomo è attratto dal gioco d'azzardo. *Girolamo Gardano* (1501–1576) – lui stesso giocatore appassionato – con la sua opera «*Liber de Ludo Aleae*» ha formulato la prima teoria sul calcolo delle probabilità. La vita avventurosa di Gardano ci da un'illustrazione molto eloquente della sua epoca.

## Summary

Since more than two thousand years men liked to play different games of chance. *Girolamo Cardano* (1501–1576) – a passionate gambler himself – presented in his work *Liber de Ludo Aleae* a first attempt to a theory of probability. Cardano's history of life is characterized by several enigmatic events and can be considered as representative for that period.

