**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of

**Swiss Actuaries** 

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 76 (1976)

**Artikel:** La formule de récurrence pour l'effectif des invalides dans le modèle

pratique

Autor: Chuard, Philippe

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-967179

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

## Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 01.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# La formule de récurrence pour l'effectif des invalides dans le modèle pratique

Par Philippe Chuard, Pully

#### 1. Introduction

La technique actuarielle qui est utilisée d'ordinaire lorsqu'on doit tenir compte de l'invalidité, notamment pour les caisses de pensions, comprend des formules dont la construction nécessite des choix entre diverses possibilités. C'est le cas, en particulier, pour la formule de récurrence relative à l'effectif des invalides. La question se pose d'inventorier les partis que l'on peut prendre pour cette formule et d'en examiner les caractéristiques.

Rappelons préalablement deux définitions.

L'effectif est un groupe de personnes de même âge dont le nombre, en fonction de l'écoulement du temps, varie sous l'action d'une ou de plusieurs causes de sortie et d'entrée.

L'ordre est un groupe de personnes de même âge dont le nombre, en fonction de l'écoulement du temps, varie sous l'action d'une ou de plusieurs causes de sortie uniquement; si une seule cause agit, l'ordre est *simple*; si plusieurs causes agissent, l'ordre est *composé*.

Pour la technique actuarielle envisagée ici on sépare les actifs des invalides dans l'ordre  $l_x$  des vivants. Considérons les deux cas suivants:

$$l_x = \Lambda_x^a + \Lambda_x^i \tag{1}$$

$$l_x = l_x^{aa} + \lambda_x^i \tag{2}$$

avec

$l_x$	ordre simple	des vivants
$\Lambda_x^a$	effectif	des actifs
	effectif	des invalides
$l_x^{aa}$	ordre composé	des actifs
$\lambda_x^i$	effectif	des invalides

causes		
de sortie	d'entrée	
décès décès, invalidité décès, réactivité décès, invalidité	réactivité invalidité	
décès	invalidité	

Nous disons que la relation (1) caractérise le modèle rationnel et que la relation (2) caractérise le modèle pratique. Seul le modèle pratique sera envisagé dans la suite.

# 2. Relations de base du modèle pratique

Désignant par des lettres latines (l, d, b) les ordres ainsi que les nombres de personnes qui en dépendent, et par des lettres grecques  $(\lambda, \delta)$  les effectifs ainsi que les nombres de personnes qui en dépendent, nous adoptons les notations suivantes:

 $l_x$  vivants d'âge x

 $l_x^{aa}$  actifs d'âge x

 $\lambda_x^i$  invalides d'âge x

 $b_x$  actifs d'âge x devenus invalides avant l'âge x + 1

 $d_x^{aa}$  actifs d'âge x décédés à l'état d'actif avant l'âge x+1

 $d_x^{ai}$  actifs d'âge x devenus invalides puis décédés à l'état d'invalide avant l'âge x+1

 $\delta_x^i$  invalides d'âge x décédés avant l'âge x + 1

 $l_{x+1}^{ai}$  actifs d'âge x devenus invalides avant l'âge x + 1, en vie à l'âge x + 1

 $\lambda_{x+1}^{ii}$  invalides d'âge x, en vie à l'âge x+1

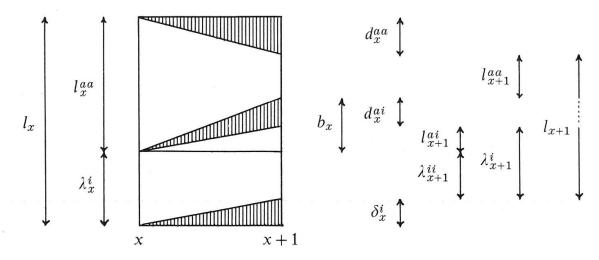
 $l_{x+1}^{aa}$  actifs d'âge x, en vie à l'état d'actif à l'âge x + 1

 $\lambda_{x+1}^i$  invalides d'âge x et actifs d'âge x devenus invalides avant l'âge x+1, en vie à l'âge x+1

 $l_{x+1}$  vivants d'âge x, en vie à l'âge x+1

 $d_x$  vivants d'âge x décédés avant l'âge x + 1

On peut observer que les nombres l et  $\lambda$  sont des *états* attachés à un *instant*, qui est celui de l'âge indiqué en indice. Par contre les nombres d, b et  $\delta$  sont des *cumuls* attachés à une *durée*, qui est de un an dès l'âge indiqué en indice. Le passage de  $l_x$  à  $l_{x+1}$  est illustré par le schéma qui suit, dans lequel apparaissent les notations introduites:



Ce schéma permet d'établir immédiatement les relations ci-dessous.

$$l_x = l_x^{aa} + \lambda_x^i \tag{2}$$

$$l_{x+1}^{ai} = b_x - d_x^{ai} (3)$$

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} - d_x^{aa} - b_x (4)$$

$$\lambda_{x+1}^{ii} = \lambda_x^i - \delta_x^i \tag{5}$$

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x+1}^{ii} + l_{x+1}^{ai} \tag{6}$$

$$l_{x+1} = l_{x+1}^{aa} + \lambda_{x+1}^{i} \tag{7}$$

$$d_x = d_x^{aa} + d_x^{ai} + \delta_x^i \tag{8}$$

$$l_{x+1} = l_x - d_x \tag{9}$$

Constatons que le trait commun de ces relations est de ne pas faire intervenir de probabilités.

Eliminant  $\lambda_{x+1}^{ii}$  entre (5) et (6) on obtient une formule de récurrence pour l'effectif des invalides:

$$\lambda_{x+1}^i = \lambda_x^i - \delta_x^i + l_{x+1}^{ai}. \tag{10}$$

## 3. Probabilités

## 3.1. Probabilités indépendantes

# Partant des ordres simples

 $l_x$  pour les vivants

 $l_x^{(a)}$  pour les actifs vivants

 $l_x^{(b)}$  pour les non invalides

 $l_x^i$  pour les invalides vivants

causes de sortie

décès décès d'actif invalidité décès d'invalide

on définit les probabilités indépendantes

$$q_{x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_{x}} \qquad q_{x}^{a} = 1 - \frac{l_{x+1}^{(a)}}{l_{x}^{(a)}}$$

$$i_{x} = 1 - \frac{l_{x+1}^{(b)}}{l_{x}^{(b)}} \qquad q_{x}^{i} = 1 - \frac{l_{x+1}^{i}}{l_{x}^{i}}$$

$$(11)$$

qui permettent d'écrire les relations

$$l_{x+1} = l_x (1 - q_x) (12)$$

$$\lambda_{x+1}^{ii} = \lambda_x^i (1 - q_x^i) \tag{13}$$

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} (1 - q_x^a) (1 - i_x)$$
(14)

$$d_x = l_x q_x \tag{15}$$

$$\delta_x^i = \lambda_x^i q_x^i \tag{16}$$

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x}^{i} (1 - q_{x}^{i}) + l_{x+1}^{ai}. \tag{17}$$

La relation (14) correspond à la situation caractérisée par l'indépendance des événements qui agissent sur  $q_x^a$  et  $i_x$ .

La formule de récurrence (17) s'obtient en tenant compte de (16) dans (10), ou de (13) dans (6). L'élément  $l_{x+1}^{ai}$ , dont elle dépend, sera examiné ultérieurement.

# 3.2. Probabilités dépendantes

Définissant les probabilités dépendantes par

$$*q_x^a = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}} \qquad *i_x = \frac{b_x}{l_x^{aa}}$$
 (18)

on a les relations

$$d_x^{aa} = l_x^{aa} * q_x^a \tag{19}$$

$$b_x = l_x^{aa} * i_x \tag{20}$$

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} (1 - *q_x^a - *i_x). (21)$$

La formule (21) est obtenue en tenant compte, dans (4), de (19) et de (20).

## 4. Problème

Les probabilités indépendantes (11) doivent permettre le passage de  $l_x$ , décomposé selon (2), à  $l_{x+1}$ , décomposé selon (7). Ce passage implique une liaison entre les probabilités dépendantes (18) et les probabilités indépendantes (11), ainsi que le choix d'une formule de récurrence, découlant de (17), pour l'effectif des invalides.

Nous examinerons diverses solutions en les soumettant à trois conditions et en envisageant deux possibilités pour l'expression de  $l_{x+1}^{ai}$ .

## 5. Conditions

#### 5.1. Première condition

Dans l'ordre  $l_x^{aa}$  deux causes de sortie, le décès et l'invalidité, agissent de manière symétrique. L'influence de  $i_x$  sur  $q_x^a$ , dans  $q_x^a$ , doit être la même que celle de  $q_x^a$  sur  $i_x$ , dans  $i_x$ :

$$*q_x^a = f(q_x^a, i_x) \implies *i_x = f(i_x, q_x^a),$$
 (22)

f étant, dans les deux cas, la même fonction.

#### 5.2. Deuxième condition

Compte tenu des formules (14) et (21) on doit avoir:

$$1 - q_x^a - i_x = (1 - q_x^a)(1 - i_x). (23)$$

## 5.3. Troisième condition

Il est évident que les trois probabilités indépendantes de décès  $q_x$ ,  $q_x^a$  et  $q_x^i$  doivent être égales si deux d'entre elles le sont:

$$q_x = q_x^a \quad \text{ou} \quad q_x = q_x^i \quad \text{ou} \quad q_x^a = q_x^i$$

$$\Rightarrow \quad q_x = q_x^a = q_x^i$$
(24)

## 6. Cas No 1

## 6.1. Caractéristiques

Au titre 2. a été introduit le nombre  $l_{x+1}^{ai}$  des actifs d'âge x devenus invalides avant l'âge x+1 et étant en vie à l'âge x+1. Nous caractérisons le cas No 1 par la relation suivante

$$l_{x+1}^{ai} = b_{x\frac{1}{2}} p_x^i (25)$$

qui, en vertu de (3), entraîne

$$d_x^{ai} = b_{x \frac{1}{2}} q_x^i. (26)$$

Sachant que

$${}_{\frac{1}{2}}p_x^i = \frac{l_{x+\frac{1}{2}}^i}{l_x^i}, \qquad {}_{\frac{1}{2}}q_x^i = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_x^i,$$

posant en outre

$$l_{x+\frac{1}{2}}^{i} = \frac{1}{2}(l_{x}^{i} + l_{x+1}^{i})$$

et remplaçant  $b_x$  par sa valeur tirée de (20), on transforme (25) et (26) en

$$l_{x+1}^{ai} = l_x^{aa} * i_x \left( 1 - \frac{q_x^i}{2} \right)$$
 (27)

$$d_x^{ai} = l_x^{aa} * i_x \frac{q_x^i}{2}. (28)$$

La formule de récurrence (17) pour l'effectif des invalides devient, compte tenu de (27),

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x}^{i} \left(1 - q_{x}^{i}\right) + l_{x}^{aa} * i_{x} \left(1 - \frac{q_{x}^{i}}{2}\right). \tag{29}$$

Cette formule est une caractéristique du cas Nº 1. Appliquée par Schaertlin¹, elle est, depuis lors, couramment utilisée. Citons, par exemple, son emploi dans les Tables EVK 1970².

Dans la suite, pour l'examen de la troisième condition (24) dans le cas N° 1, nous utiliserons la relation

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i) q_x = l_x^{aa} * q_x^a + l_x^{aa} * i_x \frac{q_x^i}{2} + \lambda_x^i q_x^i$$
(30)

obtenue en tenant compte, dans (8), de (15), (2), (19), (28) et (16).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Bibliographie citée [4]; page 47.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Bibliographie citée [1]; page 7, formule (11).

#### 6.2. Solution A

Si, pour exprimer les probabilités dépendantes  $*q_x^a$  et  $*i_x$  au moyen des probabilités indépendantes  $q_x^a$  et  $i_x$  on prend pour point de départ

$$q_x^a = \frac{d_x^{aa} + \frac{1}{2}b_x q_x^a}{l_x^a}, \qquad i_x = \frac{b_x + \frac{1}{2}d_x^{aa} i_x}{l_x^a}$$

et qu'on tient compte des relations (18), on obtient les formules

$$*q_x^a = q_x^a \frac{1 - \frac{i_x}{2}}{1 - \frac{q_x^a i_x}{4}}, \qquad *i_x = i_x \frac{1 - \frac{q_x^a}{2}}{1 - \frac{i_x q_x^a}{4}}$$
(31)

indiquées notamment par Saxer3.

Lorsqu'on remplace  $i_x$  par son expression (31), la formule de récurrence (29) devient

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x}^{i} (1 - q_{x}^{i}) + l_{x}^{aa} i_{x} \frac{1 - \frac{q_{x}^{a}}{2}}{1 - \frac{i_{x} q_{x}^{a}}{4}} \left(1 - \frac{q_{x}^{i}}{2}\right).$$
 (32)

Les relations (31) de la solution A remplissent la première condition (22); elles ne remplissent pas la deuxième (23) puisqu'elles conduisent à

$$1 - *q_x^a - *i_x = \frac{(1 - q_x^a)(1 - i_x) - \frac{q_x^a i_x}{4}}{1 - \frac{q_x^a i_x}{4}}.$$

Bibliographie citée [3]; page 25, formules (2. 4. 9.).

Quant à la troisième condition (24) elle est satisfaite puisque la relation

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i) \, q_x = l_x^{aa} \, q_x^a \frac{1 - \frac{i_x}{2}}{1 - \frac{q_x^a \, i_x}{4}} + l_x^{aa} \, i_x \frac{1 - \frac{q_x^a}{2}}{1 - \frac{i_x \, q_x^a}{4}} \frac{q_x^i}{2} + \lambda_x^i \, q_x^i,$$

obtenue en tenant compte de (31) dans (30), est vérifiée identiquement pour  $q_x = q_x^a = q_x^i$ .

## 6.3. Solution B

Pour exprimer  $*q_x^a$  et  $*i_x$  en fonction de  $q_x^a$  et  $i_x$  on peut tenir le raisonnement suivant. Si  $i_x$  agit seul entre les âges x et x+1, alors  $l_x^{aa}$  diminue de  $l_x^{aa}$   $i_x$  et le nombre moyen des personnes pendant l'année est  $l_x^{aa}$   $\left(1-\frac{i_x}{2}\right)$ . Par conséquent on peut écrire

$$d_x^{aa} = l_x^{aa} \left( 1 - \frac{i_x}{2} \right) q_x^a$$

et, par un raisonnement analogue,

$$b_x = l_x^{aa} \left( 1 - \frac{q_x^a}{2} \right) i_x.$$

Compte tenu des relations (18) on obtient les formules

$$*q_x^a = q_x^a \left(1 - \frac{i_x}{2}\right), \quad *i_x = i_x \left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right),$$
 (33)

indiquées notamment par Zwinggi4.

Lorsqu'on remplace  $i_x$  par son expression (33), la formule de récurrence (29) devient

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x}^{i} \left(1 - q_{x}^{i}\right) + l_{x}^{aa} i_{x} \left(1 - \frac{q_{x}^{a}}{2}\right) \left(1 - \frac{q_{x}^{i}}{2}\right). \tag{34}$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Bibliographie citée [5]; page 31, formules (1.49).

Les relations (33) de la solution B remplissent la première condition (22) et la deuxième (23). La troisième condition (24) n'est pas remplie car la relation

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i) \, q_x = l_x^{aa} \, q_x^a \bigg( 1 - \frac{i_x}{2} \bigg) + l_x^{aa} \, i_x \bigg( 1 - \frac{q_x^a}{2} \bigg) \frac{q_x^i}{2} + \lambda_x^i \, q_x^i,$$

obtenue en tenant compte de (33) dans (30), n'est pas vérifiée identiquement pour  $q_x = q_x^a = q_x^i$ .

## 6.4. Solution C

Il est possible de satisfaire les deuxième (23) et troisième (24) conditions. On pose pour cela

$$*q_x^a = q_x^a \left( 1 - \frac{i_x}{2} \frac{1 - q_x^a}{1 - \frac{q_x^a}{2}} \right), \qquad *i_x = i_x \frac{1 - q_x^a}{1 - \frac{q_x^a}{2}}, \tag{35}$$

mais alors la première condition (22) n'est pas remplie. La formule de récurrence (29) devient dans ce cas

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x}^{i} \left(1 - q_{x}^{i}\right) + l_{x}^{aa} i_{x} \frac{1 - q_{x}^{a}}{1 - \frac{q_{x}^{a}}{2}} \left(1 - \frac{q_{x}^{i}}{2}\right). \tag{36}$$

Quant à la relation obtenue à partir de (30) et (35), et vérifiée identiquement pour  $q_x = q_x^a = q_x^i$ , elle s'écrit

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i) \, q_x = l_x^{aa} \, q_x^a \left( 1 - \frac{i_x}{2} \frac{1 - q_x^a}{1 - \frac{q_x^a}{2}} \right) + l_x^{aa} \, i_x \frac{1 - q_x^a}{1 - \frac{q_x^a}{2}} \frac{q_x^i}{2} + \lambda_x^i \, q_x^i.$$

## 7. Cas Nº 2

## 7.1. Caractéristiques

Nous caractérisons le cas Nº 2 par la relation suivante

$$l_{x+1}^{ai} = b_{x\frac{1}{2}} p_{x+\frac{1}{2}}^{i} \tag{37}$$

qui, en vertu de (3), entraîne

$$d_x^{ai} = b_{x\frac{1}{2}} q_{x+\frac{1}{2}}^i. (38)$$

Sachant que

$$\frac{1}{2}p_{x+\frac{1}{2}}^{i} = \frac{l_{x+1}^{i}}{l_{x+\frac{1}{2}}^{i}}, \qquad \frac{1}{2}q_{x+\frac{1}{2}}^{i} = 1 - \frac{1}{2}p_{x+\frac{1}{2}}^{i},$$

posant en outre

$$l_{x+\frac{1}{2}}^{i} = \frac{1}{2}(l_{x}^{i} + l_{x+1}^{i})$$

et remplaçant  $b_x$  par sa valeur tirée de (20), on transforme (37) et (38) en

$$l_{x+1}^{ai} = l_x^{aa} * i_x \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{q_x^i}{2}}$$
(39)

$$d_x^{ai} = l_x^{aa} * i_x \frac{\frac{q_x^i}{2}}{1 - \frac{q_x^i}{2}}.$$
(40)

La structure de la relation (39) se retrouve dans des développements dus à W. Küttner, antérieurs d'une vingtaine d'années à ceux de Schaertlin<sup>5</sup> et cités par Richard<sup>6</sup>.

La formule de récurrence (17) pour l'effectif des invalides devient, compte tenu de (39),

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x}^{i} (1 - q_{x}^{i}) + l_{x}^{aa} * i_{x} \frac{1 - q_{x}^{i}}{1 - \frac{q_{x}^{i}}{2}}.$$
(41)

Cette formule est une caractéristique du cas Nº 2.

Dans la suite, pour l'examen de la troisième condition (24) dans le cas Nº 2, nous utiliserons la relation

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i) q_x = l_x^{aa} * q_x^a + l_x^{aa} * i_x \frac{\frac{q_x^i}{2}}{1 - \frac{q_x^i}{2}} + \lambda_x^i q_x^i, \tag{42}$$

obtenue en tenant compte, dans (8), de (15), (2), (19), (40) et (16).

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Bibliographie citée [4].

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Bibliographie citée [2]; page 109, formule (64) et formule suivante.

## 7.2. Solution D

Reprenons les relations (33) de la solution B

$$*q_x^a = q_x^a \left(1 - \frac{i_x}{2}\right) \qquad *i_x = i_x \left(1 - \frac{q_x^a}{2}\right).$$
 (43)

La formule de récurrence (41) devient

$$\lambda_{x+1}^{i} = \lambda_{x}^{i} (1 - q_{x}^{i}) + l_{x}^{aa} i_{x} \left( 1 - \frac{q_{x}^{a}}{2} \right) \frac{1 - q_{x}^{i}}{1 - \frac{q_{x}^{i}}{2}}.$$
 (44)

Comme pour la solution B, les deux premières conditions (22) et (23) sont satisfaites. En outre la troisième condition (24) l'est également; en effet la relation

$$(l_x^{aa} + \lambda_x^i) \, q_x = \, l_x^{aa} \, q_x^a \bigg( 1 - \frac{i_x}{2} \bigg) + \, l_x^{aa} \, i_x \bigg( 1 - \frac{q_x^a}{2} \bigg) \frac{\frac{q_x^i}{2}}{1 - \frac{q_x^i}{2}} + \, \lambda_x^i \, q_x^i,$$

obtenue en tenant compte de (43) dans (42), est vérifiée identiquement pour  $q_x=q_x^a=q_x^i$ .

# 7.3. Condition supplémentaire

Les conventions qui sont à la base du cas Nº 2 satisfont à une condition que ne remplissent pas les solutions qui se rattachent au cas Nº 1.

Considérons les trois formules suivantes qui donnent la valeur initiale de la rente future d'invalidité:

$$\ddot{a}_{x}^{ai} = \ddot{a}_{x} - \ddot{a}_{x}^{aa} + \frac{\lambda_{x}^{i}}{l_{x}^{a}} (\ddot{a}_{x} - \ddot{a}_{x}^{i}) \tag{45}$$

$$\ddot{a}_x^{ai} = \frac{N_x^{ai}}{D_x^{aa}} \tag{46}$$

$$\ddot{a}_x^{ai} = \underline{\ddot{a}}_x^{ai} - \frac{1}{2} K_x^{ai}. \tag{47}$$

La formule (45) fait intervenir les valeurs actuelles

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad \ddot{a}_x^{aa} = \frac{N_x^{aa}}{D_x^{aa}} \qquad \ddot{a}_x^i = \frac{N_x^i}{D_x^i}$$

où les nombres de commutation

$$\begin{array}{lll} D_x &= \mathbf{v}^x \, l_x & & N_x &= \sum D_x \\ D_x^{aa} &= \mathbf{v}^x \, l_x^{aa} & & N_x^{aa} &= \sum D_x^{aa} \\ D_x^i &= \mathbf{v}^x \, l_x^i & & N_x^i &= \sum D_x^i \end{array}$$

dépendent des nombres de personnes  $l_x$ ,  $l_x^{aa}$ ,  $l_x^i$  que l'on établit au moyen des probabilités indépendantes (11). Laissons provisoirement en suspens la liaison entre  $\lambda_x^i$ , qui apparaît dans (45), et les probabilités indépendantes (11). La formule (46) dépend des nombres de commutation

$$D_x^{ai} = v^{x+1} l_{x+1}^{ai} \quad \ddot{a}_{x+1}^i \qquad N_x^{ai} = \sum D_x^{ai}. \tag{48}$$

Dans la formule (47) la valeur actuelle

$$\underline{\ddot{a}}_{x}^{ai} = \frac{\underline{N}_{x}^{ai}}{D_{x}^{aa}} \tag{49}$$

est celle de la rente future d'invalidité avec prorata initial, et

$$K_x^{ai} = \frac{M_x^{ai}}{D_x^{aa}} \tag{50}$$

est la valeur actuelle du capital en cas d'invalidité; ces deux valeurs actuelles dépendent des nombres de commutation

$$\underline{D}_{x}^{ai} = v^{x+\frac{1}{2}} b_{x} \ddot{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i} \qquad \underline{N}_{x}^{ai} = \sum \underline{D}_{x}^{ai}$$
 (51)

$$C_x^{ai} = v^{x+\frac{1}{2}}b_x$$
  $M_x^{ai} = \sum C_x^{ai}$ . (52)

Les trois formules (45), (46) et (47) doivent conduire au même résultat. L'équivalence entre (45) et (46) se démontre en tenant compte, dans (48), de

$$l_{x+1}^{ai} = \lambda_{x+1}^i - (1-q_x^i)\,\lambda_x^i$$

qui découle de (17); la démonstration ne dépend donc pas de la manière dont  $l_{x+1}^{ai}$  s'exprime en fonction des probabilités (11) ou (18).

L'équivalence entre (46) et (47) s'exprime, compte tenu des formules (48) à (52), par

$$l_{x+1}^{ai} \, \ddot{a}_{x+1}^i = r^{\frac{1}{2}} b_x \bigg( \ddot{a}_{x+\frac{1}{2}}^i - \frac{1}{2} \bigg).$$

Cette condition, si l'on pose

$$\ddot{a}_{x+\frac{1}{2}}^{i} = \frac{1}{2} + v^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} p_{x+\frac{1}{2}}^{i} \ddot{a}_{x+1}^{i},$$

devient

$$l_{x+1}^{ai} = b_{x\frac{1}{2}} p_{x+\frac{1}{2}}^{i}. (53)$$

C'est la relation (37) qui est à la base du cas N° 2.

La condition (53) impose, pour  $\lambda_x^i$  qui apparaît dans (45), la formule de récurrence (41) du cas N° 2. Si l'on admet en outre les relations (43) de la solution D, on doit adopter la formule (44).

## 8. Conclusion

La formule de récurrence pour l'effectif  $\lambda_x^i$  des invalides dépend de deux choix. L'un se rapporte à la formule de  $l_{x+1}^{ai}$ , l'autre, à l'expression des probabilités dépendantes  $q_x^a$  et  $i_x$  en fonction des probabilités indépendantes  $q_x^a$  et  $i_x$ . Très généralement, et depuis longtemps, il est usuel d'adopter la formule de récurrence (29). On se place ainsi dans le cas No 1 qui a été présenté au titre 6. de cette étude. Dans la formule (29) apparaît la probabilité dépendante  $i_x$ . Pour ne faire intervenir que des probabilités indépendantes, trois possibilités ont été examinées; elles ont conduit aux formules (32), (34) et (36).

Les développements qui précèdent montrent que la formule de  $l_{x+1}^{ai}$  qui est à la base du cas N° 2 permet d'établir une relation de récurrence (41) pour  $\lambda_x^i$  telle que trois conditions essentielles peuvent être simultanément remplies. Il n'en va pas de même pour la formule de  $l_{x+1}^{ai}$  qui est à la base du cas N° 1. En outre une condition supplémentaire ne peut être satisfaite que dans le cas N° 2. Enfin, à la réflexion, la formule (37) du cas N° 2 paraît être une expression plus correcte de  $l_{x+1}^{ai}$  que la formule (25) du cas N° 1.

La solution D, présentée au titre 7.2. et se rattachant au cas N° 2, avec en particulier sa formule de récurrence (44) pour l'effectif des invalides, devrait donc être préférée aux autres.

## Bibliographie citée

- [1] Eidgenössische Versicherungskasse: Technische Grundlagen EVK 1970, Text.
- [2] Richard, P.-J.: Théorie et pratique des opérations d'assurance, tome 2, 1946.
- [3] Saxer, W.: Versicherungsmathematik, 1. Teil, 1955.
- [4] Schaertlin, G.: Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1. Heft, 1906.
- [5] Zwinggi, E.: Versicherungsmathematik, 2. Auflage, 1958.

Philippe Chuard, actuaire Professeur ordinaire à l'Université de Lausanne Avenue de Lavaux 93 CH-1009 Pully

# Zusammenfassung

Die in der versicherungsmathematischen Technik der Pensionskassen für den Bestand der Invaliden gewöhnlich benützte Rekursionsformel führt zu Engpässen, welche eine andere vom Verfasser vorgeschlagene Formel vermeidet.

#### Résumé

La formule de récurrence ordinairement utilisée pour l'effectif des invalides dans la technique actuarielle destinée aux caisses de pensions conduit à des impasses qu'évite une autre formule, proposée par l'auteur.

#### Riassunto

Nella teoria delle casse pensioni si utilizza normalmente una formola di ricorrenza per descrivere la collettività degli invalidi. Questa formola può in certi casi creare qualche difficoltà che potrebbe essere evitata usando un'altra formola come propone l'autore.

# Summary

The recurrence formula commonly used by pension fund experts for the description of the collective of disabled persons gives rise to a few calculating difficulties. These can be avoided by taking an alternative formula as proposed by the author.