Selbstbehalt und Sicherheits-Reserve einer Pensionskasse

Autor(en): **Romer, Bernhard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **75 (1975)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967106

Selbstbehalt und Sicherheits-Reserve einer Pensionskasse

Von Bernhard Romer, Basel

1. Die Aufgabenstellung

1.1. Vorbemerkungen

Personalvorsorge-Einrichtungen mit niedrigem oder mittlerem Personenbestand stehen öfters vor der Frage, wieweit sie auf Teilung der Risiken, also auf Rückversicherung angewiesen sind, um die Erfüllbarkeit ihrer Verpflichtungen zu gewährleisten; oder aber, wenn sie autark sein möchten, welche Sicherheits- und Schwankungs-Reserve sie dauernd bereitzuhalten haben.
Lassen sich dafür theoretisch begründete Anhaltspunkte und Masszahlen gewinnen, die praktisch brauchbar sind? Vor allem wäre zu wünschen, dass man beim Vereinfachen der tatsächlichen Verhältnisse nicht allzu viele kennzeichnende Details eines Bestandes preisgeben müsste. Der Bestandesumfang allein besagt zu wenig.
Es sollen im folgenden zwei Verfahren besprochen werden, deren Gedankengänge unmittelbar nichts miteinander zu tun haben, die beide aber einen Blick in die Zusammenhänge gestatten und gewisse Lösungsansätze erlauben. Das erste reduziert die Hauptfrage auf die Rechnung mit der zu erwartenden Anzahl Versicherungsfälle, das zweite untersucht die Streuung des nächstjährigen Gesamtaufwandes für Versicherungsfälle.

1.2. Der Leistungsplan

Wir beschränken uns auf den besonders wichtigen Fall einer Pensionskasse, die Renten ausrichtet. An Rentenarten erfassen wir
eine Altersrente vom Rücktrittsalter an,
lebenslängliche Witwenrenten beim Tod eines verheirateten Mannes,
bis zum Rücktrittsalter laufende Invalidenrenten.
Waisenrenten, Invaliden-Kinderrenten und andere Renten werden hier also beiseite gelassen, in der Meinung, die wesentlichen Einsichten in die Risiko-Situation aus dem genannten Leistungsplan zu erhalten. Er lässt sich indessen ohne weiteres ergänzen. Eingetretene Invalidität sei dauernd (keine Reaktivierung). Die Renten seien in irgendeiner Weise bezogen auf den versicherten Lohn G.

1.3. Das Beitragsprogramm

Die Leistngen werden durch feste jährliche Beiträge gedeckt, welche sich wie die Rento als Bruchteil des versicherten Lohnes ausdrücken. Je nachdem werden sie egänzt durch Einmaleinlagen.
Nur die Ewerbsfähigen zahlen die laufenden Beiträge. Der Leistungsplan wird dadurch vom Beitragsprogramm her erweitert durch versteckte Renten bei Invalidit, welche die Altersvorsorge und die Todesfalldeckung nach dem Invalidwrden aufrechterhalten:
Wird die nvalidenrente nämlich nicht als eine lebenslängliche versichert, muss der Beitrgsteil, welcher dem Aufbau der Altersvorsorge des Invaliden dient, weiterhireingehen; desgleichen darf der Anspruch auf Witwenrente im Todesfall nicht verlorengehen, und daher ist der dazugehörige Beitrag weiter zu entrichten. Das übernimmt der Versicherungsträger. Je nach der Umschreibung der Risikn kann man diesen ergänzenden Deckungsschutz in verschiedener Weise aufgeteilt denken (Tod nach Altersrücktritt, mit allfälliger Witwenrente, wird entweder zur Altersvorsorge gezählt oder zur Deckung bei Tod).
Ein Beitagsprogramm, welches auf dem rein bankmässigen Sparen für das Alter fust, bedingt einen etwas anders zusammengesetzten Gesamtbeitrag als die obigereine Versicherungsvorsorge. Beim bankmässigen Sparen entstehen Kapitalin, welche, falls das versicherte Ereignis vor dem Rücktrittsalter eintritt, zustzlich zur ausgelösten Rente verfügbar sind. Dies im Gegensatz zur reinen Vrsicherungsvorsorge, wo das gebildete Deckungskapital in einem solchen Falzugunsten des Bestandes, also zweckgebunden, verfällt. Die Mischung aus Bankparen für das Alter und Versicherungssparen für das übrige benötigt somit urer diesen Umständen etwas höhere Beiträge, es sei denn, die Sparkapitalie lassen sich in bestgeeigneter Weise ebenfalls zum teilweisen Rentenersatz heanziehen.
Im folgeden benutzen wir die kollektive Prämienmethode für die Witwenrente. Wir gehn also davon aus, dass *jeder* männliche Versicherte des Alters x beim Tod einn Rentenbarwert auslöst in Höhe von $\vartheta_x\, a^w_{y_x}\, R^w$ mit

ϑ_x = Vahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes, verheiratet zu sein,

$a^w_{y_x}$ = Brwert der sofort beginnenden Witwenrente vom Jahresbetrag 1,

R^w = idividuelle jährliche Witwenrente je nach dem versicherten Gehalt G und dem Leistungsplan.

Die Wahl der kollektiven Methode hat hier ihre Bedeutung insofern, als man dann beim Todesfall *jedes* Mannes $\vartheta_x R^w$ als zugehörige Jahresleistung betrachtet und nicht nochmals individualisiert (was man zwar könnte), je nachdem der Versicherte verheiratet ist oder nicht, und wenn ja, welches Alter die Frau hat usw.
Die ausgelösten Renten-Barwerte sollen der Einfachheit halber mit Indes x (nicht $x + ½$) geschrieben werden.

1.4. Der Bestand und seine Merkmale

Die Verhältnisse werden nur während eines Jahres betrachtet, gelten somit nur kurzfristig, wobei jedoch die Aussagen wohl auf ein paar Jahre hinaus Hinweischarakter besitzen.
Zu Beginn eines Jahres seien in den Altersjahrgängen x der Männer bzw. y der Frauen L_x^a bzw. L_y^a Beitragspflichtige versichert. Da uns nur die anwartschaftlichen Leistungen beschäftigen, hat der Übertritt zu den Rentnern das Ausscheiden aus dem Bestand zur Folge.
x, y erstrecken sich vom tiefsten Beginnalter bis vor das Rücktrittsalter s_x, s_y. Ein Versicherungsfall trifft jeweils zufällig eine unter den L_x^a bzw. L_y^a Personen. Es sei

$$\sum_x L_x^a + \sum_y L_y^a = L^a. \tag{1}$$

Denken wir die Versicherten durchnumeriert mit der laufenden Nummer λ, so ist folglich die Wahl der Nummer durch das versicherte Ereignis zufallsgesteuert.
Zum betroffenen Versicherten gehört im Versicherungsfall folgender Aufwand:
- Beim Tod eines Mannes der Barwert einer sofort beginnenden (evtl. fiktiven) Witwenrente abzüglich das verfallende Einzel-Deckungskapital

$$K_\lambda^w = \vartheta_x R_\lambda^w a_{y_x}^w - {}_xV_\lambda \ ; \tag{2a}$$

- beim Invaliden der Barwert einer sofort beginnenden Invalidenrente, laufend bis zum Rücktrittsalter, also für einen Mann

$$K_\lambda^I = R_\lambda^I \, a_{x\ \overline{s_x - x}}^i - {}_xV_\lambda^I. \tag{2b}$$

Bemerkungen:
In (2a) verfällt das bis dahin gebildete Deckungskapital, weil nur noch die

Witwenrente verbleibt; der Ausdruck hängt somit auch von der bisherigen individuellen Dienst- bzw. Versicherungszeit t_λ ab.
(2b) enthält in der Jahresrente R^I_λ, je nach der einbezogenen Rentendauer, verschiedene Teile:
Ist die Invalidenrente wie üblich und oben angegeben bis s_x, s_y befristet, nimmt R^I_λ sowohl die bar zahlbare Rente als auch die Prämie für die Altersrente und bei Männern noch die Prämie der kollektivtarifierten Witwenrente auf. Dann bleibt das bisherige Dekungskapital voll erhalten ausser dem Teil, welcher zur anwartschaftlichen Invalidenrente gehört (nur dieser wird also verrechnet, weil er entfällt). Gewöhnlich wird ${}_xV^I_\lambda$ verhältnismässig gering, so dass man es vernachlässigen kann; d.h. das Abzugsglied in (2b) entfällt überhaupt.
Die begonnene Darstellungsweise lässt sich folgerichtig weiterführen:
Die Zufallsschwankungen, welche in (2a) und (2b) zum Ausdruck kommen könnten und die Grössen links selbst zur Zufallsvariablen machen, werden bewusst vernachlässigt. In (2a) handelt es sich um die Zufalls-Alternative «verheiratet – nichtverheiratet» beim Mann, die Zufallsvariable y_x «Alter der Ehefrau beim Tod des Mannes» und die künftige Lebensdauer der Witwe als weitere, den Wert K^w_λ bestimmende Zufallsvariable. Sinngemäss muss daher R^w_λ beim nichtverheirateten Mann diejenige Witwenrente sein, welche auch bei ihm versichert wäre, wenn er verheiratet wäre. In (2b) handelt es sich um Invaliditätsgrad und -dauer als bestimmende Zufallsvariable für den Wert von K^I_λ. Beide Werte K_λ des einzelnen Schadenaufwandes gelten hier aber als feste von den Rechnungsgrundlagen her gegebene Koeffizienten, nachdem λ selbst zufällig gewählt ist.
Anders gesagt: Die ausgelösten Barwerte werden als determinierte Grössen behandelt und ersetzen gewissermassen – als Erwartungswerte – die Unbestimmtheit ihrer Verteilungen. Dadurch sind sie nicht mehr risikobehaftet. (Gibt es im Bestand deutlich mehr verheiratete Männer als nach den Rechnungsgrundlagen, entgeht dieser die kollektive Tarifmethode gefährdende Umstand einer unmittelbaren Erfassung.)
Nach Rentenbeginn sollen diesen Annahmen gemäss keine Gewinne oder Verluste dadurch entstehen, dass die Abwicklung von der rechnungsmässigen abweicht. Aus Vorsichtsgründen bestimmen sich die K_λ daher nach Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung.
Nachdem das versicherte Ereignis eingetreten ist, bleiben Wahrscheinlichkeits-Verteilungen also unbeachtlich; das schränkt die Allgemeinheit deutlich ein. Auch hat dies zur Folge, dass in den Rentnerbeständen eine planmässige, den Rechnungsgrundlagen entsprechende Entwicklung vorausgesetzt wird. Alle

Untersuchungen konzentrieren sich auf die anwartschaftlichen Ansprüche der Beitragspflichtigen.
Altersrenten sind in diesem Sinn nicht risikobehaftet; ihr Beginn zählt nicht als Schadenfall.

2. Der Selbstbehalt auf der Grundlage des Einzelschaden-Exzedenten

2.1. Die Fragestellung

Im vorliegenden Zusammenhang könnte eine Frage lauten: Welche Beträge K_λ vermag im Schadenfall eine Pensionskasse noch aus eigener Kraft zu tragen, also bei sich selbst zu versichern?
Obwohl wir die Überlegungen bloss für Männer formulieren, gelten sie doch sinngemäss auch für Frauen. Wir beurteilen dabei die versicherten Ereignisse Tod und Invalidität je für sich allein. Eine allfällige Kumulation der Belastung aus beiden bleibt noch offen.
Macht man auf Grund gewisser Kriterien eine solche obere Schranke selbstbehaltenen Schadenaufwandes ausfindig, so kann man sich damit begnügen, diejenigen Versicherten, bei welchen sie überschritten wird, für den übersteigenden Teil individuell rückzuversichern; die übrigen bleiben ganz zu Lasten und in Rechnung der Pensionskasse.

2.2. Der verfügbare Jahresbetrag für neu entstehende Versicherungsfälle

Zunächst einmal steht für neu ausgelöste Schäden die Risikoprämie des Bestandes auf Grund des erwarteten Verlaufes (Grundlagen 2. Ordnung) zur Verfügung.
Altschäden sind nach unseren Annahmen planmässig aus früheren Beiträgen gedeckt und werden ohne risikobeschwerten Einsatz abgewickelt. Für neue wird zunächst mit einem rechnungsmässigen Aufwand eben in Höhe der Risikoprämie gerechnet.
Schreibt man für die Sterblichkeit q_x^a, für die Wahrscheinlichkeit des Invalidwerdens i_x, so werden die Risikoprämien im Bestand
für den Todesfall

$$RP^w = \sum_x q_x^a \sum_{\lambda=1}^{L_x^a} K_\lambda^w, \tag{3a}$$

für den Invaliditätsfall

$$RP^{I} = \sum_{x} i_x \sum_{\lambda=1}^{L_x^a} {}_xK_\lambda^I + \sum_{y} i_y \sum_{\lambda=1}^{L_y^a} {}_yK_\lambda^I. \tag{3b}$$

Die Risikoprämien werden besonders einfach, wenn keine Deckungskapitalien zu berücksichtigen sind, also z. B. bei der Rentenwert-Umlage der Beiträge. Ist die Risikoprämie so gerechnet, dass sie nicht den mutmasslichen Verlauf der Geschehnisse wiedergibt, sondern nach der vorsichtigen Seite verschoben ist (Grundlagen 1. Ordnung), steht der Sicherheitszuschlag selbst auch zur Verfügung. Der Sicherheitszuschlag als Differenz zwischen den Risikoprämien 1. und 2. Ordnung ist aber nichts anderes als der Erwartungswert des Gewinnes im Folgejahr. Für (3a) und (3b) wird damit die wirklich erhobene Risikoprämie massgebend.

Über diese Risikoprämie hinaus ist jedoch noch eine weitere Differenzgrösse verwendbar: der nächstjährige Zinsgewinn. Bezeichnet man mit V das derzeitige erforderliche Gesamt-Deckungskapital des Bestandes, mit V^* das derzeitige vorhandene (verzinsliche) Deckungsvermögen, mit i den benötigten technischen Zinsfuss auf V, mit i^* den tatsächlichen Ertragssatz auf V^*, so kann man greifen auf

$$Z = i^* V^* - iV = i^* (V^* - V) + (i^* - i) V. \tag{4}$$

Die Formel erkärt sich von selbst.

Ist tatsächlich $V^* > V$ und/oder lassen sich weitere offene und stille Reserven namhaft machen und beziffern, so wäre im Notfall der Rückgriff auf mindestens einen Bruchteil davon denkbar. Wieweit man darin gehen kann, hängt von den näheren Umständen ab und bedarf sorgfältigen und vorsichtigen Abwägens. Keinesfalls dürfen Reserven herangeholt werden, die für den ungestörten Versicherungsablauf erforderlich sind. Bezeichnen wir die verfügbaren freien Reserven mit F, den noch erlaubten für Risikoaufwand verzehrbaren Teil davon mit ϱ, so wird der insgesamt im nächsten Jahr bei ungünstigem Risikoverlauf höchstens heranziehbare Betrag

$$\Delta = RP^{w} + RP^{I} + Z + \varrho F. \tag{5}$$

Trennt man in Todesfall und Invalidität, steht jeder Ereignisart nur ein Teil davon zu, was sich schreiben lässt

$$\Delta^w = RP^w + \gamma^w (Z + \varrho F) \tag{5a}$$

$$\Delta^I = RP^I + \gamma^I (Z + \varrho F) \tag{5b}$$

mit $\gamma^w + \gamma^I = 1$.

Wie die beiden γ zu wählen sind, steht an sich frei, wird sich indessen am ehesten nach den Risikoprämien selbst richten, weil diese das Risikogewicht der beiden Arten versicherter Ereignisse wiedergeben. Man könnte somit das Verhältnis zwischen γ^w und γ^I gleich gross ansetzen wie das der beiden Risikoprämien. Zwingend ist dies jedoch nicht.
$(1-\varrho)\,F$ wird man einer später zu nennenden Eventualität reservieren.

2.3. Der Selbstbehalt im einzelnen Schadenfall

Der ermittelte Wert Δ^w bzw. Δ^I bezieht sich auf den zulässigen Gesamtaufwand für die verschiedenen versicherten Ereignisse. Wir greifen eine Art davon heraus. Zu dieser gehöre nun eine Wahrscheinlichkeit $W(\geq 1)$, dass mindestens *ein* derartiges Ereignis im Bestand während des nächsten Jahres stattfindet. Mit $W(l)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit für genau l derartige Ereignisse im Bestand, $l = 0, 1, 2, \ldots, L^a$ (bei Tod L^a der Männer allein), wobei wir voraussetzen, dass die Ereignisse einen einzelnen Versicherten im nächsten Jahr einmal oder keinmal treffen. Wir setzen nun den höchstzulässigen selbstgetragenen einzelnen Schadenaufwand $Mx\,K^*$ so an, dass er folgender «Aufbrauchs-Gleichung» genügt (K^* bedeutet den Selbstbehalt von K)

$$Mx\,K^* \cdot \sum_{l=1}^{L^a} l\,W(l) = \Delta \cdot W(\geq 1), \tag{6}$$

was sich auch schreiben lässt

$$\Delta = Mx\,K^* \sum_{l=1}^{L^a} \frac{l \cdot W(l)}{W(\geq 1)}. \tag{7}$$

In (7) erscheinen bedingte Wahrscheinlichkeiten, nämlich diejenigen nach Eintreten des versicherten Ereignisses. Das gestattet eine besonders einfache Interpretation: Treten versicherte Ereignisse der betreffenden Art wirklich ein, so darf der bedingte Erwartungswert der Anzahl, vervielfacht mit dem höchsttragbaren einzelnen Schadenaufwand, den insgesamt verfügbaren Betrag Δ gerade aufzehren. Daraus bestimmt sich mit $\bar{l} = \Sigma\, l\, W(l)$

$$Mx\, K^* = \frac{\Delta\, W(\geq 1)}{\bar{l}}. \tag{8}$$

(6) kann als Gleichheit von zwei Erwartungswerten gedeutet werden, indem man beidseits $0 \cdot W\,(0)$ hinzufügt.
$\bar{l}$ gewinnt man auch aus den Rechnungsgrundlagen als Erwartungswert der Anzahl versicherter Ereignisse.
Für Todesfälle hat man nämlich

$$\bar{l}^{w} = \sum_{x} L^a_x\, q^a_x, \tag{9}$$

für Invalidität

$$\bar{l}^{\,i} = \sum_{x} L^a_x\, i_x + \sum_{y} L^a_y\, i_y. \tag{10}$$

Noch zu bestimmen ist für den Bestand

$$W(\geq 1) = 1 - W(0). \tag{11}$$

Die Überlegungen müssen auch in Extremfällen sinnvoll bleiben:
- Ist $L^a = 1$, wird $\bar{l}$ sehr klein und $W(1) = W(\geq 1)$; Δ (das sehr klein sein wird, ausser es bestehe eine hohe überrechnungsmässige Reserve) und $Mx\, K^*$ stimmen überein, daher volle Rückversicherung.
- Ist $L^a \gg 1$, vergrössert sich auch $\bar{l}$ etwa verhältnismässig, desgleichen die zugehörige Risikoprämie. $W(0)$ wird kleiner und gestattet eine entsprechende Zunahme von $Mx\, K^*$.
- Ist alles bereits durch Einmaleinlagen bezahlt worden und werden keine Risikoprämien erhoben, wird das einzelne K_λ verhältnismässig kleiner wegen des grösseren abzuziehenden Deckungskapitals; Z nimmt zu und alles in allem steigt $Mx\, K^*$.
- Gibt es gar kein Deckungskapital, verschwindet es natürlich auch für den einzelnen Versicherten. Das Abzugsglied in K_λ wird Null, in Z der technische Zinsertrag ebenfalls; die Risikoprämie vergrössert sich. Überhaupt wird nur Δ betroffen. Dieser Fall realisiert sich beispielsweise beim reinen bankmässigen Alterssparen, das rundum gegen die versicherten Ereignisse Tod und Invalidität durch ein Rentenumlage-Verfahren abgeschirmt wird.

Negative K_λ würden zu einer Korrektur von $Mx\ K^*$ Anlass geben. Das lassen wir beiseite.
Sind $\bar{l}$ Versicherungsfälle wirklich eingetreten, wird der Gesamtaufwand der Pensionskasse abzüglich Δ (Aufwand-Überschuss)

$$l \cdot Mx\ K^* - \Delta = \frac{\Delta}{\bar{l}} [l(1-W(0)) - \bar{l}].$$

Seine Wahrscheinlichkeit ist $W(l)$ und sein Erwartungswert

$$\sum_{l=0}^{L^a} W(l) [l\ Mx\ K^* - \Delta] = \bar{l}\ Mx\ K^* - \Delta = -\Delta\ W(0) < 0.$$

Die schadenfreien Jahre liefern also zugunsten der Pensionskasse einen Überschuss. $Mx\ K^* \sqrt{\mathrm{Str}\,(l)}$ wird die mittlere Abweichung des Aufwand-Überschusses. Sie kann als Massstab der anzusammelnden Ausgleichsreserve dienen.
Nichtverbrauchte Δ sammeln sich als zweckgebundene Ergänzung von F an. Die Reserve $(1-\varrho)\,F$ sowie gesparte Δ werden der Eventualität vorbehalten, wo tatsächlich mehr als Δ verbraucht wird. Bestehen keine solchen oder nur geringe Reserven, oder sind sie anders zweckgebunden, so wird man den Selbstbehalt $Mx\ K^*$ aus Gleichung (8) noch herabsetzen.
Anders gesagt: Wäre rechts in (6) $\Delta \cdot W(0)$ miteinbezogen, würde der Selbstbehalt $Mx\ K^*$ grösser. Statt dessen wird das auch bei $l = 0$ entstehende, aber nicht einbezogene Δ zurückgestellt und dient als zusätzliche Deckung in den Schadenjahren. Gegen eigentliches Kumulrisiko ist natürlich das Verfahren – wie übrigens auch das nachstehende – nicht angelegt. Als besonderer Teil der Jahresrechnung erscheint die Rückversicherung auf Risikobasis.

2.4. *Näherungsverfahren*

Insbesondere bei Beständen, wo (9) und (10) eine erwartete jährliche Anzahl versicherter Ereignisse liefern, welche deutlich unter 0,5 liegt – also eher *kein* Versicherungsfall zu erwarten ist als einer oder mehr – dürfte ein so «seltenes» Ereignis die Poissonverteilung nahelegen, selbst wenn die sonstigen Voraussetzungen dafür nicht erfüllt erscheinen, ja sogar, bedingt durch die Endlichkeit von L^a, Widersprüche liefern.

Wir haben dann

$$W_P(l;\bar{l}) = e^{-\bar{l}}\frac{\bar{l}^l}{l!}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, L^a, \ldots \tag{12}$$

$\bar{l}$ ergibt sich nach den Gleichungen (9) bzw. (10), und man wird ausserdem $\bar{l}$ benutzen, um eine Durchschnitts-Wahrscheinlichkeit zu bilden:

$$\bar{l} = L^a \bar{w}. \tag{13a}$$

Die quadratische Streuung (Varianz) ist dann bekanntlich gleich gross wie $\bar{l}$,

$$\mathrm{Str}\,(l) = \bar{l}. \tag{13b}$$

Man hat überdies

$$W_P(1) = \bar{l} \cdot e^{-\bar{l}} \tag{14a}$$

$$W_P(0) = 1 - W_P(\geq 1) = e^{-\bar{l}}. \tag{14b}$$

Ist $\bar{l} < 1$ und klein genug, wird

$$W_P(0) \sim 1 - \bar{l}$$

$$W_P(1) \sim \bar{l}(1-\bar{l}) \sim \bar{l} \sim W_P(\geq 1).$$

Daraus bekommt man wiederum

$$Mx\,K^* \sim \Delta.$$

Die Wahrscheinlichkeit von zwei und mehr Versicherungsfällen gilt dabei als so gering, dass der Einzel-Selbstbehalt etwa gleich dem jährlich verfügbaren Aufbrauchsbetrag angesetzt werden darf. Für *einen* einzigen Versicherten trifft das wie erwähnt sowieso zu.

Elastischer, weil zweiparametrig, ist die negative Binomialverteilung in der Gestalt

$$W_{NB}(l) = \binom{a+l-1}{l}(1-\bar{w})^a\,\bar{w}^l \tag{15}$$

mit $a > 0$, $l = 0, 1, 2, \ldots,$ und $\bar{w}$ nach (13a).

Der Erwartungswert von l wird

$$\bar{l} = a \frac{\bar{w}}{1-\bar{w}} = L^a \bar{w}, \tag{16a}$$

die Streuung

$$\mathrm{Str}(l) = \frac{a\,\bar{w}}{(1-\bar{w})^2} = \frac{\bar{l}}{1-\bar{w}} > \bar{l}. \tag{16b}$$

Str (l) ist demnach um so grösser im Vergleich zum Erwartungswert, je grösser $\bar{w}$ wird. Man hat zudem

$$W_{NB}(0) = (1-\bar{w})^a, \tag{17a}$$

$$W_{NB}(1) = a(1-\bar{w})^a\,\bar{w} = \bar{l}\,(1-\bar{w})^{a+1} = \bar{l}\,(1-\bar{w})\,W_{NB}(0), \tag{17b}$$

$$W_{NB}(\geq 1) = 1 - (1-\bar{w})^a. \tag{17c}$$

Neben $\bar{l}$ ergibt sich aus den Gegebenheiten Str (l) als Schätzwert von selber. Wegen ihrer grösseren Allgemeinheit und der vorsichtigeren Beurteilung (grössere Streuung!) scheint die negative Binomialverteilung trotz der gleichen auftauchenden Widersprüche besser verwendbar als die Poisson-Verteilung. Der Parameter a wird nur benötigt, wenn bestimmte Wahrscheinlichkeiten gefragt sind. Aus dem errechneten $\bar{l}$ und aus $\bar{w}$ gelangt man zu $a = L^a(1-\bar{w}) = L^a - \bar{l}$.

3. Erwartungswert und Streuung der jährlichen Schadenlast und die Sicherheits- bzw. Schwankungsreserve

3.1. Die Grundbegriffe

Wir gehen aus von den bereits festgelegten Begriffen λ, K_λ und zerlegen einen versicherten Aktivenbestand in Teilbestände nach Alter und Geschlecht, um innerhalb dieser Jahrgänge eine einheitliche Ereignis-Wahrscheinlichkeit zugrunde legen zu können; dann betrachten wir zunächst allgemein ein versichertes Ereignis, das eine «Risikorente» auslöst. Wie bisher unterstellen wir, dass der dadurch fällige Betrag K_λ sofort fällig wird und danach keine Risikofragen mehr aufwirft, d. h. wie wenn er als Abgeltung in Erledigung aller Ansprü-

che ein für allemal in Gestalt einer Kapitalabfindung bezahlt würde, wobei verfallendes Deckungskapital verrechnet wird. Im Anschluss an die Lebensversicherung kann man von *Risikosumme* statt von Schadenlast sprechen.
Der einzelne Altersjahrgang der Männer weise bei seinen Versicherten im Folgejahr l_x Schadenfälle auf, $l_x = 0, 1, 2, \ldots, L_x^a$; es kommt die Schadenlast

$$_xQ = \sum_{\lambda=1}^{l_x} K_{i_\lambda}$$

zusammen, wobei i einer Nummer aus $1, 2, 3, \ldots, L_x^a$ entspricht. λ gibt an, dass die Auswahl für das Betroffenwerden durch ein Schadenereignis aus den Versicherten durch Zufall erfolgt ist. Sowohl l_x als auch die λ-Wahl bestimmen die Schadenlast des Jahrganges; die letztere ist also doppelt zufallsgesteuert. Jedes solche $_xQ$ tritt demnach mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf.
Die gesamte jährliche Schadenlast Q der Pensionskasse setzt sich aus denen der einzelnen Teilbestände durch einfache Summation zusammen; also – wir beschränken uns auf Männer –

$$Q = \sum_x \sum_{\lambda=1}^{l_x} {_xK_{i_\lambda}}. \tag{18}$$

Der Erwartungswert von Q ist dann bekanntlich nichts anderes als die Summe der Erwartungswerte der Schadenlasten in den Teilbeständen

$$E(Q) = \sum_x E(_xQ), \tag{19a}$$

was wir auch als $\sum_x E_x(Q)$ schreiben.
Die Streuung wird, unter der Annahme, dass die Schadenlasten der einzelnen Teilbestände voneinander unabhängig sind, zu

$$\mathrm{Str}(Q) = \sum_x \mathrm{Str}_x(Q). \tag{19b}$$

Es genügt somit, diese beiden Masszahlen in den einzelnen Teilbeständen kennenzulernen.
Str (Q) soll uns dann als Masszahl der Unsicherheit und Unbestimmtheit dienen, welche das Zufallsgeschehen im Bestand kennzeichnen. Nach ihr richtet sich demgemäss auch die erforderliche Sicherheits- und Schwankungsrücklage,

um gefährliche Einseitigkeiten des Versicherungsgeschehens, welche vom Zufall herrühren, aufzufangen und einzudämmen. Grössere Abweichungen vom Erwartungswert der Q im ungünstigen Sinn werden nach ihrer Wahrscheinlichkeit abgeschätzt, und zwar, wenn der Versichertenbestand in ausreichender Grössenordnung liegt, anhand des zentralen Grenzwertsatzes, der die Gausssche Normalverteilung heranzuziehen gestattet. Die Verteilung der K im Bestand wird dabei ebenfalls gewisse Regeln erfüllen müssen.

Wir fassen zusammen: Wie viele und wen das versicherte Ereignis heimsucht, ist ein Geschäft des Zufalls. Naheliegende Annahmen über die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sollen uns erlauben, die beiden wichtigsten Verteilungsfunktionale kennenzulernen.

3.2. Erwartungswert und Streuung der Schadenlast im einzelnen Altersjahrgang

Wir lassen, da wir nun x festhalten, diesen Index sowie ^{a} der Einfachheit halber weg. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau l Versicherte vom versicherten Ereignis betroffen werden, sei $W_L(l)$, wo L den Umfang der betrachteten Altersklasse angibt. Natürlich ist, da es sich um einander ausschliessende Fälle handelt,

$$\sum_{l=0}^{L} W_L(l) = 1 .$$

Die Auslese der betroffenen Versicherten geschehe unabhängig von ihrer Anzahl, d.h. jeder einzelne unter den L Versicherten habe die gleiche Wahrscheinlichkeit, unter den l Betroffenen zu sein. Diese Bedingung führt dazu, dass alle denkbaren Gruppen von je l herausgegriffenen Elementen aus L verfügbaren gleichberechtigt sind, d.h. die Elemente lassen sich auswechseln (Austauschbarkeit). Daraus folgt aber, dass jede derartige Zufallsauslese einem Entnahmevorgang aus einer Urne entspricht, und zwar, da wir unterstellen, jeder Versicherte könne nur einmal vom versicherten Ereignis betroffen werden, einer Entnahme von l Losen hintereinander ohne Zurücklegen (oder aber miteinander in einem Griff). Es gibt $\binom{L}{l}$ unterscheidbare Gruppen und daher für jede darunter eine bedingte Wahrscheinlichkeit

$$W(Q \mid l) = 1 \Big/ \binom{L}{l} . \tag{20}$$

Eine bestimmte Konstellation betroffener Versicherter und damit eines einzelnen solcherart zusammengesetzten Q in dieser Altersklasse hat also die Wahrscheinlichkeit

$$W(Q) = W_L(l) \Big/ \binom{L}{l}. \tag{21}$$

$W_L(l)$ brauchen wir noch nicht zu spezifizieren. Wir werden es nachholen, sobald der Erwartungswert von Q zu bestimmen ist.

Der Erwartungswert von Q pro Altersjahrgang

Mit Absicht geben wir hier und im folgenden der Anschaulichkeit halber etwas ausführlicher die Herleitungen an.

$$E(Q) = \sum_{l=1}^{L} W_L(l) \cdot \sum Q\, W(Q \mid l). \tag{22}$$

$l = 0$ entfällt ja.

Da Q selber darzustellen ist als

$$Q = \sum_{\lambda=1}^{l} K_{i_\lambda},\; l = 1, 2, \ldots, L,$$

kann man folgendermassen überlegen:
Man denkt sich alle Stichproben des Umfangs l aus den insgesamt L den einzelnen Versicherten zugehörigen Werten K_i niedergeschrieben. Da es $\binom{L}{l}$ sind, jede mit dem Umfang l, gibt es insgesamt $l\binom{L}{l}$ Werte K_i aufzuzeichnen. Wegen der Austauschbarkeit muss jedes K_i darunter gleich oft vorkommen, und zwar in $\binom{L-1}{l-1}$ Gruppen je einmal. Man kann sich wegen der gleichbleibenden Wahrscheinlichkeit $W(Q) \mid l)$ vorstellen, dass jedes einzelne $K_i \binom{L-1}{l-1}$-mal gezählt wird, und man erst dann durch $\binom{L}{l}$ dividiert. Das gibt $l/_L$ als Faktor beim einzelnen der L unterscheidbaren K_i, also insgesamt

$$E(Q) = \sum_{l=1}^{L} W_L(l) \sum_{i=1}^{L} \frac{l}{L} K_i = \sum_{l=1}^{L} l\, W_L(l) \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} K_i \right) = \bar{l}\, \bar{K} \tag{23}$$

wenn wir mit $\bar{l}$, $\bar{K}$ die entsprechenden Erwartungswerte bzw. Durchschnitte bezeichnen. Der bedingte Erwartungswert von Q bei genau l Summanden K_λ ergibt sich nebenher zu

$$E_l(Q) = l \cdot \bar{K}. \tag{23a}$$

Der Erwartungswert der Schadenlast ist somit das Produkt aus den Erwartungswerten von Schadenanzahl und Einzelschadenaufwand (Risikosumme). Legt man bei der Schadenanzahl l die Binomialverteilung zugrunde, mit einer Grund-Wahrscheinlichkeit w, so hat man

$$\bar{l} = L\, w \tag{24}$$

und daraus

$$E(Q) = L\, w\, \bar{K} = w \sum_{i=1}^{L} K_i. \tag{25}$$

Für Todesfälle wird w zu q_x^a, für Invalidität zu i_x, i_y (im Sinne von nichtbereinigten Wahrscheinlichkeiten).

Die Streuung von Q pro Altersjahrgang

Man hat

$$\mathrm{Str}(Q) = \sum_{l=0}^{L} W_L(l) \sum_{\binom{L}{l}} W(Q \mid l)\, D_l^2 \tag{26a}$$

mit

$$D_l = Q - \bar{l}\,\bar{K} = (K_{i_1} + K_{i_2} + \ldots + K_{i_l}) - l\,K + \bar{K}(l - \bar{l}). \tag{26b}$$

Hält man beim Durchrechnen vorerst l fest und denkt sich D_l aufgespalten in

$$S_1 = K_{i_1} + K_{i_2} + \ldots + K_{i_l} - l\,\bar{K}$$

und

$$S_2 = \bar{K}(l - \bar{l}),$$

so verschwindet in (26a) der Teil, welcher vom doppelten Produkt beider herrührt. Denn $(l-\bar{l})\,\overline{K}$ ist dabei ein konstanter Faktor und

$$\sum_{\binom{L}{l}} W(Q \mid l) \cdot S_1$$

verschwindet wegen (23a).
Somit ist als erstes zu bilden

$$\frac{1}{\binom{L}{l}} \sum_{\binom{L}{l}} (K_{i_1} + \ldots + K_{i_l} - l\,\overline{K})^2. \tag{26c}$$

Wir definieren

$$\operatorname{Str}(K) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} (K_i - \overline{K})^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} K_i^2 - \overline{K}^2. \tag{27}$$

Ferner hat man

$$\left(\sum_{i=1}^{L} K_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{L} K_i^2 + \frac{1}{L} \sum_{i \neq j} K_i K_j$$

und somit

$$(L-1)\,\overline{K}^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} K_i^2 + \frac{1}{L} \sum_{i \neq j} K_i K_j - \overline{K}^2$$

oder

$$\operatorname{Str}(K) = (L-1)\,\overline{K}^2 - \frac{1}{L} \sum_{i \neq j} K_i K_j. \tag{27a}$$

Bildet man nun (26c), kann man gedanklich in gleicher Weise vorgehen wie beim Bestimmen von Q; man erhält vorerst pro einzelne Stichprobe die Summe der einzelnen vorkommenden K_λ^2 sowie die Summen von Produkten vorkommender $K_\lambda\, K_\mu$; davon abzuziehen sind

$$2\,l\,\overline{K}\,\{K_{i_1} + \ldots + K_{i_l}\}.$$

Hinzuzufügen ist

$$l^2\,\overline{K}^2.$$

Fasst man wieder zusammen über alle Stichproben und berücksichtigt die Häufigkeit des Auftretens, so ergibt sich schliesslich

– bei den einzelnen Quadraten $\frac{l}{L}\sum_{i=1}^{L} K_i^2$,

– bei den doppelten Produkten, wovon dasselbe Paar jeweils insgesamt mit der Anzahl $\binom{L-2}{l-2}$ auftritt, $\frac{l(l-1)}{L(L-1)}\sum_{i\neq j} K_i K_j$,

– bei den Gliedern mit $\bar{K}$ durch Vereinigen $-\bar{K}^2 l^2$.
Zusammen also für ein festes l als bedingte Streuung

$$\mathrm{Str}_l(Q) = \frac{l}{L}\sum_{i=1}^{L} K_i^2 + \frac{l(l-1)}{L(L-1)}\sum_{i\neq j} K_i K_j - l^2 \bar{K}^2$$

oder wegen (27a)

$$\mathrm{Str}_l(Q) = l\left\{\left(\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} K_i^2 - \bar{K}^2\right) + \frac{l-1}{L-1}\left[\frac{1}{L}\sum_{i\neq j} K_i K_j - (L-1)\bar{K}^2\right]\right\} =$$
$$= l\left[1 - \frac{l-1}{L-1}\right]\mathrm{Str}(K).$$

Man hat folglich für den ersten Teil von Str (Q)

$$\mathrm{Str}(K)\sum_{l=1}^{L} W_L(l)\cdot l\left(1 - \frac{l-1}{L-1}\right) < \bar{l}\,\mathrm{Str}(K).$$

Der zweite Teil von Str (Q) wird

$$\bar{K}^2 \sum_{l=0}^{L} W_L(l)(l-\bar{l})^2 = \bar{K}^2\,\mathrm{Str}(l).$$

Bei Annahme der Binomialverteilung bekommt man mit der Grund-Wahrscheinlichkeit w

$$\mathrm{Str}(l) = Lw(1-w) < Lw = \bar{l},$$

d.h. die Varianz ist für $0 < w < 1$ kleiner als der Erwartungswert.

Man hat endlich im Teilbestand des Alters x

$$\mathrm{Str}_x(Q) = \mathrm{Str}_x(K) \sum_{l_x=1}^{L_x} l_x \cdot W_{L_x}(l_x)\left(1 - \frac{l_x-1}{L_x-1}\right) + \tag{28}$$

$$+ E_x^2(K)\,\mathrm{Str}_x(l_x) < \bar{l}_x\,\mathrm{Str}_x(K) + E_x^2(K)\,\mathrm{Str}_x(l_x).$$

Für den Gesamtbestand einer PK addieren sich einfach die Teilwerte in (25) und (28).

Man wird der rechnerischen Einfachheit halber $\mathrm{Str}_x(Q)$ gemäss der Ungleichung aufrunden und damit im Sinne der Vorsicht handeln. Als genauen Faktor bei $\mathrm{Str}_x(K)$ gibt die Binomialverteilung in (28) nochmals $\mathrm{Str}_x(l_x)$. Das lässt sich in beiden Summanden ersetzen durch das grössere $\bar{l}_x$. Man bekommt damit als obere Schranke

$$\mathrm{Str}_x^*(Q) = \bar{l}_x\left[\mathrm{Str}_x(K) + E_x^2(K)\right], \tag{29}$$

was schon – in anderer Darstellung – im bekannten Tafelwerk von Heubeck-Fischer[1] erwähnt worden ist. Die Summe rechts in der Klammer ist wegen (27) aber nichts anderes als der Durchschnitt der Quadrate aller K in der Altersklasse x. Aus (24) folgt somit, wenn wir die Grund-Wahrscheinlichkeit im Alter x mit w_x bezeichnen,

$$\mathrm{Str}_x^*(Q) = w_x \sum_{i=1}^{L_x} {}_xK_i^2. \tag{30}$$

(25) und (30) liefern sehr handliche, einfach gebaute Ausdrücke, sofern die K_i ohne allzu grosse Mühe bestimmbar sind. Die Zusammensetzung von getrennten Klassen nach Alter und Geschlecht zum Gesamtbestand geschieht durch Summation und ist leicht zu bewerkstelligen[2].

Bei einer Mischung von eigentlichem Sparbeitrag für das Alter und abschirmenden Risikoprämien fallen wie erwähnt die zu verrechnenden Deckungskapitalien in den K_λ weg. Es bleiben Ausdrücke, wo die versicherte Jahresrente mit einem festen altersabhängigen Faktor (Renten-Barwert) zu vervielfachen ist.

[1] Richttafeln für die Pensionsversicherung, von *G. Heubeck* und *K. Fischer*, Weissenburg/Bayern, 1959.

[2] Für das Potenzmoment dritter Ordnung von Q um den Erwartungswert innerhalb einer Altersklasse ergibt sich aus der genauen Formel ebenfalls eine obere Schranke gleicher Art, nämlich $w_x\,\Sigma_x\,K_i^3$, sofern das Potenzmoment dritter Ordnung der K um deren Durchschnitt nicht negativ ist.

Damit entspricht die Verteilung der K_λ der Verteilung der versicherten Löhne G_λ, sofern feste Rentenansätze vereinbart sind. $\mathrm{Str}_x^*\,(Q)$ ergibt sich dann aus $\mathrm{Str}_x^*\,(G)$, multipliziert mit dem Quadrat des festen Faktors.
Beim Witwenrenten-Kollektivtarif lässt sich K_λ verallgemeinern, indem man nicht für jeden Tod eines Mannes (gleichgültig welchen Zivilstandes) die gleiche Risikosumme nach (2a) verwendet denkt, sondern

$K'_\lambda = R^w_\lambda\, a^w_{y_x} - {}_xV_\lambda$ bei einem verheirateten Mann,

$K''_\lambda = -\,{}_xV_\lambda$ bei einem nichtverheirateten Mann.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, bei einem Versicherungsfall auf einen verheirateten bzw. nichtverheirateten Mann zu stossen, ist gleich der Wahrscheinlichkeit eines Mannes, beim Tod verheiratet bzw. nichtverheiratet zu sein; sie heisse ϑ_x bzw. $(1-\vartheta_x)$. Das ist auch die Wahrscheinlichkeit von K'_λ bzw. K''_λ. Deren Erwartungswert wiederum ist K_λ gemäss (2a). Der Gesamt-Erwartungswert nach (25) bleibt erhalten. Bezieht man die Ungewissheit des Zivilstandes im Todesfall in die Wahrscheinlichkeit mit ein, so vergrössert sich dagegen $\mathrm{Str}_x\,(Q)$ in (28) dergestalt, dass an die Stelle von $\mathrm{Str}_x\,(K)$ der Ausdruck

$$\mathrm{Str}_x\,(K) + \vartheta_x\,(1-\vartheta_x)\,\frac{1}{L_x}\sum_{i=1}^{L_x}(K'_i - K''_i)^2 \tag{31}$$

tritt.
Das Zusatzglied ist nichts anderes als die Streuung der durch die zusätzliche Ungewissheit des angetroffenen Zivilstandes aufgesetzten Wahrscheinlichkeits-Verteilung. Es gilt

$$K'_i - K''_i = R^w_i\, a^w_{y_x}. \tag{32}$$

Für die individuelle Berechnungsmethode bleibt es bei (28); denn die Zufallswahl des Zivilstandes geschieht hier bereits durch die Wahl von λ. Die Information ist dabei durch die Kenntnis des Zivilstandes beim einzelnen Versicherten grösser, also die Ungewissheit und damit die Streuung kleiner. K_λ wird bereits mit dem richtigen Wert angesetzt, der K''_λ sein kann oder K'_λ, dieses aber mit zutreffendem und nicht bloss durchschnittlichem Wert y_x.

3.3. Die erwünschte Sicherheits- und Schwankungsreserve auf Grund von Erwartungswert und Streuung der Risikosumme

Soll Überbelastung aus Zufallsschwankungen mit gewünschter Wahrscheinlichkeit durch eine zusätzliche Reserve abgefangen werden, lässt sich als Näherung bei nicht zu kleinem Bestandesumfang die Normalverteilung heranziehen. Ein bestimmtes Vielfaches f (oder mehr) von $\sqrt{\mathrm{Str}\,(Q)}$ wird als Abweichung von $E\,(Q)$ – nach beiden Seiten hin – mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit vorkommen.

Die üblichen Zahlen:

Abweichung als Vielfaches f von $\sqrt{\mathrm{Str}}$ (= mittlere Abweichung) und die zugehörige Wahrscheinlichkeit einer mindestens ebenso grossen Abweichung nach oben oder unten (Überschreitungs-Wahrscheinlichkeit) für die normierte Gauss-Verteilung

f	Überschreitungs-Wahrscheinlichkeit
1	0,3173
2	0,0455
2,5	0,0124
3	0,0027
4	0,00003

Da man eigentlich nur die Überschreitungen zu höherer Belastung hin braucht, sind obige Wahrscheinlichkeiten zu halbieren. Nach Abwägen der Umstände erscheint es unter bestimmten Voraussetzungen ausreichend, als Sicherheits- und Schwankungsreserve zum Abdecken von Zufallsausschlägen den dreifachen Betrag der Quadratwurzel aus der Streuung nach (30) zu verwenden; ab diesem ist Rückversicherung wegen allfälliger Schadenfälle meistens nicht mehr erforderlich, weil Überbeanspruchung über diese zusätzliche Reserve hinaus entsprechend unwahrscheinlich, also zu selten ist, als dass man für sie vorzusorgen hätte.
Die von der Verteilung der K zu erfüllenden Voraussetzungen lauten etwa dahin, dass sie sich deutlich um ihren Zentralwert (mittelsten Wert) konzentriert und keine Ausreisser (vereinzelte hohe K) aufweist.
Eine bekannte Faustregel, herrührend von der Normalverteilung, erlaubt das überschläglich zu prüfen, indem man die Spannweite der K mit der mittleren Abweichung vergleicht:

$$\frac{Mx\,K - Mn\,K}{4} \lesssim \sqrt{\mathrm{Str}\,(K)}.$$

Gleichzeitig ist von der zweiten Faustregel Gebrauch zu machen, dass innerhalb der mittleren Abweichung um den Durchschnitt der K mindestens zwei Drittel aller K liegen. Damit wäre indessen noch nicht verhindert, dass der Bestand in mehrere Klassen zerfällt, mit weit auseinanderliegenden Klassendurchschnitten der K, aber kleiner Streuung innerhalb der Klassen. Einfache Faustregeln, welche diesen Fall ausschliessen, eliminieren leider auch solche Fälle, die an sich zulässig wären. Der Hinweis möge genügen.
Ein fiktiver homogener Bestand des Umfangs N mit $w = 0.001$ (bzw. 0.01) und durchwegs (fast) gleichen K führt zur mittleren Abweichung $K\sqrt{Nw}$ und damit zur Schwankungsreserve $3K\sqrt{Nw}$, d.h. zu $0.096\,K\sqrt{N}$ (bzw. $0.3\,K\sqrt{N}$). Für $N = 100$ gelangt man so zur Grössenordnung K (bzw. $3K$), vermag daher einen Versicherungsfall (bzw. drei solche) zu decken.
Das Gesagte gilt für *eine* Art des versicherten Ereignisses. Man wird für Tod und Invalidität einzeln die Werte $f \cdot \sqrt{\mathrm{Str}\,(Q)}$ bestimmen und dann addieren.

4. Ein zahlenmässiges Beispiel

Es folgen einige Zahlenangaben. Sie betreffen einen fiktiven Versichertenbestand von 150 Männern und 25 Frauen, die wir uns in Fünferklassen zusammengefasst denken. Die Rechnungen sind jeweils für das Durchschnittsalter $\bar{x}/\bar{y}$ jeder Klasse durchgeführt worden. (Ausnahme: höchste Alter bei Männern). Die Annahmen über die Besetzung der Altersklassen (L_x^a/L_y^a) sowie über die versicherten Gehälter sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Lebensalter x/y	$\bar{x}/\bar{y}$	*Anzahl* L_x^a/L_y^a M	F
18–22	20	13	5
23–27	25	20	3
28–32	30	19	3
33–37	35	17	3
38–42	40	16	3
43–47	45	15	2
48–52	50	16	2
53–57	55	15	2
58–62*	60	14	2
63–64	63	5	–
		150	25

* (y bis und mit 61)

Durchschnittliches versichertes Jahresgehalt G pro Person; Einheit von G: 10000 Fr.

Alter $\bar{x}/\bar{y}$	*Gehalt* M	F
20	1,0	0,8
25	1,2	1,0
30	1,4	1,2
35	1,6	1,3
40	1,8	1,4
45	2,0	1,5
50	2,0	1,5
55	2,0	1,5
60	2,0	1,5
63	2,0	

Leistungsplan
Er sieht vor:
Altersrente (durch Sparbeiträge finanziert; kein Risiko)
Witwenrente = 30% des versicherten Gehaltes
Invalidenrente = 50% des versicherten Gehaltes
Endalter s_M = 65, $s_F = 62$

Finanzierung
Sie beruhe auf dem Rentenwert-Umlageverfahren, unter der Annahme, dass der Eintritt in die Kasse spätestens mit 45 Jahren erfolgt sei.

Rechnungsgrundlagen
VZ 1970, 4%, ohne Sicherheitszuschläge.
Es wird für $W(0)$ von der negativen Binomialverteilung Gebrauch gemacht.

Ergebnisse (Die Nummern in Klammern sind die Formelnummern des Textes)
Das Ereignis «*Tod*» löst eine lebenslängliche Witwenrente aus.
Erwartungswert der Anzahl der versicherten Ereignisse $\bar{l}^w = 0{,}601$ (9)
Risikoprämie $RP^w = 46400$ (3a)
Unter der Annahme, dass nur diese Risikoprämie zur Verfügung steht, ist der maximale Selbstbehalt im einzelnen Schadenfall
$Mx\,K^{*(w)} = 34800.$ (8)
Der durchschnittliche einzelne Schadenaufwand beträgt
$\bar{K}^w = 58100.$
Der Erwartungswert der Gesamtschadenlast wird anhand von $\bar{l}^w$ oben
$E^w(Q) = 34900.$ (23)
Die mittlere Abweichung der Schadenlast hat den Wert
$\sqrt{\mathrm{Str}^w(Q)} = 67500.$ (28)

Für die Berechnung der Streuung des Schadenaufwandes wurde angenommen, dass die Gehälter jeder Klasse einer Dreiecksverteilung[3] genügen, deren Erwartungswert das Durchschnittsgehalt der Klasse ist.

Das Ereignis «*Invalidität*» löst eine Invalidenrente aus, die bis zum Rücktrittsalter bezahlt wird, und dazu eine Prämie, welche die Altersrente des Invaliden sicherstellt (die Witwenrentenprämie ist weggelassen).
Erwartungswert der Zahl der versicherten Ereignisse (Männer + Frauen)
$\bar{l}^I = 0{,}831 + 0{,}098 = 0{,}929$ (10)
Risikoprämie $RP^I = 34\,100 + 2900 = 37\,000.$ (3b)
Unter der Annahme, dass nur die Risikoprämie zur Verfügung steht, ist der maximale Selbstbehalt im einzelnen Schadenfall
$Mx\,K^{*(I)} = 24\,100.$ (8)
Der durchschnittliche einzelne Schadenaufwand (Männer + Frauen) beträgt

$$K^I = \frac{1}{175}(150 \cdot 34\,900 + 25 \cdot 33\,300) = 34\,700.$$

Der Erwartungswert der Gesamtschadenlast wird anhand von $\bar{l}^I$ oben
$E^I(Q) = 32\,200.$ (23)
Die mittlere Abweichung der Schadenlast hat den Wert

$\sqrt{\mathrm{Str}^I(Q)} = 47\,000.$ (28)

Schwankungsreserve

Ereignis Tod	$3 \cdot 67\,500 =$	$202\,500$
Ereignis Invalidität	$3 \cdot 47\,000 =$	$\underline{141\,000}$
		$343\,500 \approx 350\,000$

Die Schwankungsreserve macht hier also etwa das Vierfache der Jahres-Risikoprämie ($46\,400 + 37\,000 = 83\,400$) aus.
Zugleich vereinfachen und nach der Seite grösserer Vorsicht verschieben lassen sich die Rechnungen, wenn man beispielsweise
- alle Wahrscheinlichkeiten, die kleiner als 0,001 sind, durch 0,001 ersetzt;
- die einzelnen K durch höher liegende Werte ersetzt, z. B. durch ihre Maxima in den einzelnen Altersklassen.

[3] Das kleinste versicherte Gehalt ist dabei Null, das grösste das Dreifache des häufigsten.

Prof. Dr. B. Romer, Prevoplan
Peter-Merian-Strasse 2
Postfach 929
4002 Basel

Zusammenfassung

Wieweit kann eine Pensionskasse selbst als Versicherungsträger auftreten? Der Verfasser untersucht zwei der Möglichkeiten:

- Die Kasse trägt die ausgelösten einzelnen Risikosummen (entstandene Renten-Barwerte abzüglich verfallenes Deckungskapital) nur bis zu einer gewissen Schranke. Diese richtet sich nach dem jährlich für die Risikodeckung verfügbar gemachten Betrag.
- Die Kasse bildet eine besondere Sicherheits- und Schwankungsreserve. Diese richtet sich nach der zur Verteilung des jährlich entstehenden Schadenaufwandes gehörenden mittleren Abweichung.

Anhand eines Modellbestandes werden zahlenmässige Angaben gemacht.

Résumé

Combien de ses risques une caisse de pension est-elle en mesure de supporter elle-même? L'auteur examine deux des possibilités discutables:

- La caisse ne supporte chaque somme risquée (valeur actuelle des rentes d'un sinistre survenu diminuée par la réserve technique échue) que jusqu'à une certaine limite. La limite résulte du montant annuel disponible à la couverture des risques.
- La caisse constitue une réserve de sécurité spéciale. Cette réserve est déterminée par l'écart moyen appartenant à la distribution des charges qui proviennent des sinistres annuellement.

L'auteur indique des valeurs numériques pour un effectif-modèle.

Summary

How much risk can a pension fund take over and retain on its own charge? The author examines two of the possible solutions:

- The pension fund pays the "risked sum" (the actuarial value of the annuities reduced by the premium reserve falling away) for every occurring claim only till a certain limit. This limit depends on the annual amount applicable for risk cover.
- The pension fund builds up a special security and fluctuation reserve according to the standard deviation belonging to the distribution of the total annual amount of claims.

A numerically calculated model is given.