

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 74 (1974)

**Artikel:** Grenzwertsätze für Warteschlangen, Dämme und Risikotheorie

**Autor:** Hösli, Kaspar

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-967102>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Grenzwertsätze für Warteschlangen, Dämme und Risikotheorie

Von Kaspar Hösli

## 1. Einführung

Für die vorliegende Zusammenfassung meiner Diplomarbeit (1973 bei Prof. Bühlmann) sind folgende Probleme begleitend:

### *1. Das Warteproblem*

Wir stellen uns vor, dass an einem einzigen Bedienungsschalter Kunden erscheinen und eine gewisse Bedienungszeit beanspruchen. Ist der Schalter frei, dann wird der Kunde sogleich bedient, ist der Schalter besetzt, so bleibt dem Kunden nichts anderes übrig, als anzustehen und zu warten. Wir können uns dabei fragen, wie gross die Wartezeiten der Kunden werden, wie lange die Warteschlange wird, oder auch, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Schalter an einem bestimmten Zeitpunkt frei ist.

### *2. Das Dammproblem*

Wir stellen uns ein Wasserreservoir vor, das von zufälligen Regenfällen gespeist wird und aus dem gleichmässig Wasser abfliesst, solange das Reservoir nicht leer ist. Wir können annehmen, dass das Reservoir beliebig viel Wasser fasst, oder aber auch, dass die Kapazität des Reservoirs endlich ist und dass, wie bei einem Staudamm, Wasser überfließt, wenn die Kapazität überschritten wird. Hier können wir uns für den Verlauf des Reservoirinhalts interessieren, insbesondere etwa für die Wahrscheinlichkeit, dass das Reservoir in einem bestimmten Zeitpunkt zum erstenmal leer wird.

### *3. Das Risikoproblem*

Wir denken an eine Versicherungsgesellschaft, wo ein Reservefonds durch Prämieinnahmen gleichmässig geäuft wird. Diese Reserven verringern sich

durch Vergütungen an Versicherungsnehmer, bei denen Schadenfälle aufgetreten sind. Hier möchten wir den Verlauf der Reserven kennen oder auch die Wahrscheinlichkeit eines Ruins der Gesellschaft.

Von den drei Problemkreisen stellte sich der dritte am frühesten. In den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts befasste sich F. Lundberg mit diesen Versicherungsfragen; weiterführende Resultate erreichte H. Cramér in den dreissiger Jahren.

Mit dem Problem der Wartezeiten befasste sich als erster A. K. Erlang im Zusammenhang mit Gesprächsübertragungen in der Telefonie. Die mathematischen Untersuchungen machten später Fortschritte, in den dreissiger Jahren durch Arbeiten von F. Pollaczek, A. N. Kolmogorov und A. Y. Khintchine. In den letzten Jahren befasste man sich sehr ausführlich mit dem Problem der Wartezeiten, nicht nur in der Theorie, sondern auch in vielen Anwendungsgebieten, in der Technik (Telefonie, Computer), in der Industrie (Produktionslinien, Lagerhaltung), im Transportwesen.

Das erwähnte Dammproblem tauchte erst in den fünfziger Jahren auf im Zusammenhang mit der Kühlung von Atomkraftwerken (P. A. P. Moran). Heute benutzt man diese Fragestellung auch für allgemeinere Lagerhaltungsprobleme. Jeder der drei Problemkreise wurde anfänglich für sich untersucht, Verbindungen zwischen diesen Gebieten bestanden nicht. Erst W. L. Smith (1953) und J. Gani (1957) wiesen auf Zusammenhänge zwischen Damm- und Warteproblem hin.

## **2. Die mathematischen Modelle**

In diesem Abschnitt legen wir die uns interessierenden Prozesse und die Notationen fest. Zudem sollen einige grundlegende Beziehungen bereitgestellt werden.

### *2.1. Der Warteprozess*

Um einen Überblick über den Verlauf der Wartezeiten zu erhalten, versetzen wir uns in die Lage des Bedienenden an einem Schalter. Die Kunden bringen Arbeit und vergrössern so den Arbeitsvorrat, den der Bedienende abbaut.

1. Die Zwischenankunftszeiten, die Zeiten, die zwischen zwei Ankünften von Kunden verstreichen, haben die Verteilung  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $0 < t < \infty$ .  $A(t)$  sei die Anzahl Kunden, die im Zeitintervall  $(0, t]$  ankommen, und somit ist

$$P\{A(t) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

2. Die Bedienungszeiten der Kunden sind Zufallsgrößen mit der Verteilung  $B(t)$ ,  $0 < t < \infty$ .

$X(t)$  sei die gesamte Zeit, die diejenigen Kunden beanspruchen, die im Zeitintervall  $(0, t]$  angekommen sind. Die Verteilung von  $X(t) = v_1 + v_2 + \dots + v_{A(t)}$ ,  $v_i$  unabhängige Zufallsgrößen mit der Verteilung  $B(v)$ , ist eine zusammengesetzte Poissonverteilung

$$K(x, t) = P\{X(t) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} B_n(x), \quad (1)$$

wobei  $B_n(x)$ ,  $n > 0$ , die  $n$ -fache Faltung von  $B(x)$  mit sich selbst ist, und  $B_0(x) = 0$  falls  $x < 0$  und  $B_0(x) = 1$  falls  $x \geq 0$ .

$W(0)$  sei der Arbeitsvorrat zur Zeit 0. Für uns ist  $W(0)$  eine nichtnegative Zufallsgröße.

$W(t)$  sei die durch den Arbeitsvorrat zur Zeit  $t$  definierte Wartezeit zur Zeit  $t$ .  $W(t)$  ist bestimmt durch

$$W(t) = \sup\{X(t) - X(u) - (t-u), 0 \leq u \leq t; W(0) + X(t) - t\}. \quad (2)$$

Denn, falls in  $(0, t)$   $u$  der letzte Zeitpunkt war mit  $W(u) = 0$ , dann ist  $W(t) = X(t) - X(u) - (t-u)$ , falls kein solches  $u$  existiert, dann ist  $W(t) = W(0) + X(t) - t$ , und in beiden Fällen gilt (2).

Da  $X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , ein separabler stochastischer Prozess ist mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, können wir  $X(t) - X(u)$  durch  $X(t-u)$  ersetzen. Wir erhalten so eine Zufallsgröße  $\tilde{W}(t) = \sup\{X(u) - u, 0 \leq u < t; W(0) + X(t) - t\}$ , die dieselbe Verteilung hat wie  $W(t)$ ; also

$$P\{W(t) \leq x | W(0) = c\} = P\{X(u) - u \leq x, 0 \leq u < t, \text{ und } c + X(t) - t \leq x\}. \quad (3)$$

Die Laplace-Stieltjes Transformation (L. S. T.) von  $B(t)$  sei

$$\Psi(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} d B(t), \operatorname{Re}(\theta) > 0.$$

Die L. S. T. von  $X(t)$  ist

$$E[e^{-\theta X(t)}] = \int_{0-}^{\infty} e^{-\theta x} d_x k(x, t) = e^{-\lambda t + \lambda t \psi(\theta)}. \quad (4)$$

Die erwartete Bedienungszeit sei endlich:  $0 < b = -\psi(0) < \infty$ .

Mit  $\varrho$  bezeichnen wir den Durchgangsindex

$$\varrho = \frac{\text{Erwartete Bedienungszeit}}{\text{Erwartete Zwischenankunftszeit}} = \lambda b, \quad 0 < \varrho < \infty.$$

Für den späteren Gebrauch führen wir noch einige Bezeichnungen ein:

$I(t)$ : Gesamte freie Zeit des Schalters im Zeitintervall  $[0, t]$

$$\begin{aligned} I(t) &= -\inf \{W(0) + X(u) - u, 0 \leq u \leq t; 0\} \\ &= \sup \{u - X(u) - W(0), 0 \leq u \leq t; 0\}. \end{aligned}$$

$T(c)$ : Erster Zeitpunkt, in dem der Schalter frei wird, wenn  $W(0) = c$ .  $T(c)$  entspricht der Länge der ersten Arbeitsperiode.

$$\begin{aligned} T(c) &= \inf \{u \mid c + X(u) - u \leq 0, 0 \leq u < \infty\} \\ &\text{oder } T(c) = \infty \text{ falls kein solches } u \text{ existiert.} \end{aligned}$$

$Q(t)$ : Anzahl Personen, die zur Zeit  $t$  anstehen.

$T_i$ : Erster Zeitpunkt, in dem der Schalter frei wird, falls  $Q(0) = i$ .

Zwischen  $I(t)$  und  $T(c)$  bestehen die folgenden beachtenswerten Beziehungen, die sich unmittelbar aus der Definition herleiten lassen:

$$\begin{aligned} P\{I(t) = 0 \mid W(0) = c\} &= P\{T(c) \geq t\} \\ P\{I(t) \geq x \mid W(0) = c\} &= P\{T(c + x) \leq t\}. \end{aligned}$$

## 2.2. Der Dammprozess

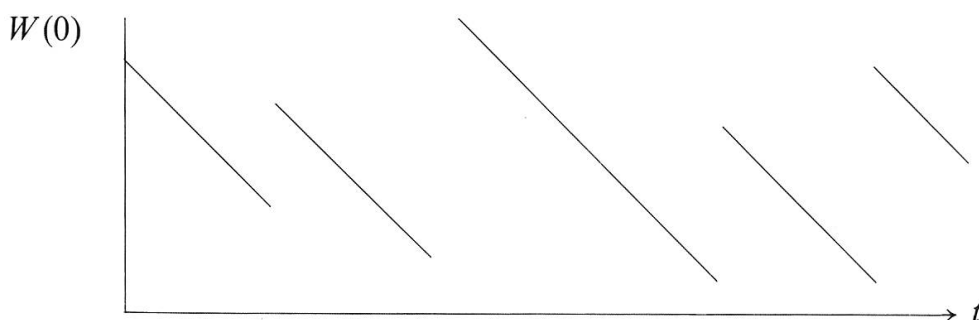
Wir betrachten den folgenden Dammprozess:

1. Das Reservoir erhält Zufluss an zufälligen Zeitpunkten: Diese Zeitpunkte bilden einen homogenen Poissonprozess mit Intensität  $\lambda$ .
2. Die Zuflussmengen sind Zufallsgrößen mit der Verteilung  $B(t)$ ,  $0 < t < \infty$ .
3. Solange das Reservoir Wasser enthält, fließt in jeder Zeiteinheit gleich viel Wasser ab. O. B. d. A. nehmen wir an, dass pro Zeiteinheit eine Wassereinheit abfließt. Hat das Reservoir nur ein endliches Fassungsvermögen, so fließt die nicht fassbare Wassermenge sofort ab.

$X(t)$  sei die gesamte Wassermenge, die in der Zeit  $(0, t]$  zufließt.  $X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , bildet einen zusammengesetzten Poissonprozess mit der Verteilung (1).

## a) Damm mit unbeschränkter Kapazität

Sei  $W(0)$  die Wassermenge zur Zeit  $t = 0$ ,  $W(t)$  diejenige welche zur Zeit  $t$  im Reservoir ist. Der Verlauf des Wasserstandes ist bestimmt durch  $W(0)$  und  $X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Die graphische Darstellung ergibt etwa folgendes typisches Bild:



$W(t) = \sup \{ W(0) + X(t) - t; X(t) - X(u) - (t-u), 0 \leq u \leq t \}$ ,  
denn, falls im Zeitintervall  $(0, t]$  der Damm nie leer wird, dann  $W(t) = W(0) + X(t) - t$ , falls  $u$  der letzte Zeitpunkt in  $(0, t]$  war mit leerem Damm, dann  $W(t) = X(t) - X(u) - (t-u)$ , und in beiden Fällen gilt die Behauptung.

$I(t)$ : Gesamte Zeit mit leerem Damm während  $(0, t]$ .

$$I(t) = - \inf \{ W(0) + X(u) - u, 0 \leq u \leq t \}.$$

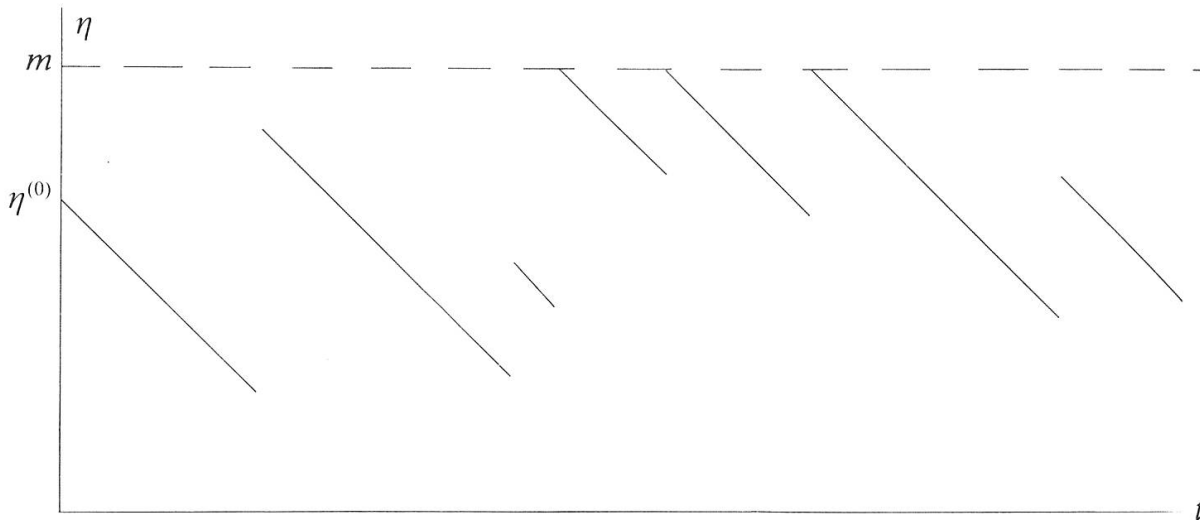
$T(c)$ : Erster Zeitpunkt in dem der Damm leer wird, falls  $W(0) = c$ .

$$T(c) = \inf \{ u \mid c + X(u) - u \leq 0 \}.$$

Wir sehen, dass diese Größen vom Zufluss  $X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , in der gleichen Weise abhängen wie im Warteprozess die Wartezeit zur Zeit  $t$ , die gesamte freie Zeit des Schalters im Zeitintervall  $(0, t]$  und die Länge der ersten Arbeitsperiode von  $X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , der gebrachten Arbeit, abhängen.

## b) Damm mit endlicher Kapazität

Die Kapazität des Dammes werde durch eine endliche positive Zahl  $m$  dargestellt.  $\eta(0)$  sei die gespeicherte Wassermenge zur Zeit  $t = 0$ ,  $\eta(t)$  diejenige zur Zeit  $t$ . Der Verlauf des Wasserstandes ist abhängig von  $\eta(0)$ ,  $X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , und der Kapazität  $m$  des Dammes. Die folgende Figur zeigt den Graphen eines möglichen Verlaufs.



Es ist möglich,  $\eta(t)$  mit Hilfe von  $\eta(0)$ ,  $m$  und  $X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , auszudrücken. Der folgende Satz, den wir nicht beweisen, gilt auch für allgemeinere Zu- und Abflüsse;  $\delta(u)$  sei die gesamte abgeflossene Wassermenge und  $\zeta(u) = X(u) - \delta(u)$ . Die Notation  $\zeta^*(u) = \zeta(t) - \zeta(t-u)$ ,  $0 \leq u \leq t$ , diene als Abkürzung.

### Satz

Es sei  $\eta(0) = m$ ;  $\zeta(u)$ ,  $0 \leq u \leq t$ , habe keine negative Sprünge und  $T^*(m-x) = \inf\{u \mid \zeta^*(u) \leq x-m, 0 \leq u \leq t\}$  existiere für  $0 \leq x \leq m$ , dann gilt  $\eta(t) \leq x$ ,  $0 \leq x \leq m \Leftrightarrow \zeta^*(u) \leq x$  für  $0 \leq u \leq T^*(m-x)$ .

Nehmen wir an, dass  $\{X(u), 0 \leq u \leq t\}$  und  $\{X(t) - X(t-u); 0 \leq u \leq t\}$  dieselbe Verteilung haben und  $\delta(u) = u$ , dann ist

$$P\{\eta(t) \leq x \mid \eta(0) = m\} = P\{X(u) - u \leq x \text{ für } 0 \leq u \leq T(m-x) \text{ und } T(m-x) \leq t\}. \quad (5)$$

### 2.3. Der Risikoprozess

Wir interessieren uns hier für den folgenden Risikoreservenprozess:

1. Das Anfangskapital ist  $Z(0)$ . Die Prämieinnahmen fließen gleichmässig; o. B. d. A. nehmen wir an, dass pro Zeiteinheit eine Geldeinheit die Reserven vergrößert.
2. Die Zahlungen der Gesellschaft erfolgen zu Zeitpunkten, die einen homogenen Poissonprozess mit Intensität  $\lambda$  bilden. (Durch Einführen der operationellen Zeit kann ein nichthomogener Poissonprozess in einen homogenen übergeführt werden.) Die Zahlungen sind Zufallsgrößen mit der Verteilung  $B(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ .

Sei  $X(t)$  die gesamte Zahlung im Zeitraum  $(0, t]$ , dann ist  $X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Verteilung (1). Die Reserven zur Zeit  $t$  betragen  $Z(t)$  und sind bestimmt durch  $Z(t) = Z(0) + t - X(t)$ .

Ein wichtiges Problem in der Risikotheorie ist, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Reserven im Zeitintervall  $(0, \infty)$  oder  $[0, t]$  negativ werden.

$R(c)$ : Erster Zeitpunkt, in dem die Reserven negativ werden, falls  $Z(0) = c$

$$R(c) = \inf \{u \mid c + u - X(u) < 0 \text{ für } 0 \leq u < \infty\}.$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} P\{R(c) \leq t\} &= P\left\{\inf_{0 \leq u \leq t} (c + u - X(u)) < 0\right\} = P\left\{\sup_{0 \leq u \leq t} (X(u) - u) > c\right\} \\ &= 1 - P\left\{\sup_{0 \leq u \leq t} (X(u) - u) \leq c\right\}. \end{aligned}$$

### 3. Grenzwertsätze

Um einen Grenzwertsatz zu gewinnen, benützen wir jeweils die Redeweise von einem der drei Problemkreise. Nachher untersuchen wir, was dieser Satz in den andern Problemkreisen bedeutet.

#### 3.1. Die Arbeitsperiode

In diesem Abschnitt wollen wir die Verteilung des Zeitpunktes, an dem der Schalter zum erstenmal frei wird, bestimmen. Wir folgen einer Idee von Prabhu (1960), die besonders die Poissonverteilung der Ankünfte auswertet.

##### 3.1.1. Die Verteilung von $T(x)$

Wie in 2.1. definieren wir:

$$T(x) = \inf \{t \mid x + X(t) - t \leq 0\}$$

$N(x)$  = Anzahl Kunden, die im Intervall  $(0, T(x)]$  ankommen

$$G_n(x, t) = P\{T(x) \leq t; N(x) = n\}.$$



$$\text{Es gilt: } dG_0(x, t) = \begin{cases} 0 & t \neq x \\ e^{-\lambda t} & t = x \end{cases} \quad (6)$$

bzw.  $G_0(x, t) = e^{-\lambda t} B_0(t-x)$ , denn, falls kein neuer Kunde ankommt reduziert sich die Wartezeit zur Zeit  $x$  auf 0. Für  $n \geq 1$  muss während  $(0, x]$  mindestens ein neuer Kunde kommen, sonst würde sich die Wartezeit auf 0 reduzieren im Zeitpunkt  $x (< t)$ . Der erste neue Kunde komme zur Zeit  $\tau$ , wobei  $\tau$  die Dichte  $\lambda e^{-\lambda \tau} d\tau$ ,  $0 < \tau < x$ , hat. Sei  $v$  die Bedienungszeit dieses Kunden, dann ist  $W(\tau+0) = x - \tau + v$ , wobei  $v$  die Verteilung  $B(v)$  hat. Im verbleibenden Zeitraum müssen  $(n-1)$  Kunden bedient werden, also gilt

$$dG_n(x, t) = \begin{cases} \int_{\tau=0}^x \int_{v=0}^{t-x} \lambda e^{-\lambda \tau} dG_{n-1}(x-\tau+v, t-\tau) d\tau dB(v), & t \geq x \\ 0, & t < x. \end{cases} \quad (7)$$

(6) und (7) ergeben eine Rekursionsbeziehung für  $G_n(x, t)$ . Durch Induktion kann bewiesen werden:

$$dG_n(x, t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \lambda x \frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!} dB_n(t-x), & t \leq x \\ 0, & t < x. \end{cases}$$

Damit erhalten wir die Verteilung der Arbeitsperiode.

$$\begin{aligned} G(x, t) &= P\{T(x) \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x, t) \\ &= \int_{\tau=x}^t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda \tau} \frac{(\lambda \tau)^{n-1}}{n!} \lambda x dB_n(\tau-x). \end{aligned}$$

Wir haben hier einen Satz von Kendall (1957) in einem speziellen Fall bestätigt:

$$dG(x, t) = \frac{x}{t} dK(t-x, t).$$

Setzen wir  $e^{-x\eta(\theta)}$  für die L. S. T. von  $T(x)$ , so kann folgende Beziehung gewonnen werden:

$$E[e^{-\theta T(x)}] = e^{-\theta x - \lambda x [x - \psi(\eta)]}, \quad (8)$$

so dass  $\eta(\theta)$  die folgende Funktionalgleichung erfüllen muss:

$$\eta(\theta) = \Theta + \lambda - \lambda \psi(\eta). \quad (9)$$

Es kann gezeigt werden, dass genau eine Lösung existiert, welche die notwendige Nebenbedingung  $\eta(\infty) = \infty$  erfüllt, und dass

$$P\{T(x) < \infty\} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} E[e^{-\theta T(x)}] = \begin{cases} 1 & \varrho \leq 1 \\ e^{-x\eta_0\psi} & \varrho > 1, \end{cases}$$

wobei  $\eta_0$  die grösste positive Wurzel von  $x = \lambda - \lambda \psi(x)$  ist.

### 3.1.2. Die Arbeitsperiode $T_1$

Es sei  $t = 0$  der Zeitpunkt unmittelbar vor der Schalteröffnung, und zu dieser Zeit warten  $i$  Kunden, also  $Q(0) = i$ .  $W(0) = x$  sei die gesamte Bedienungszeit dieser  $i$  Kunden.  $N(T_i)$  sei die Anzahl Kunden, die während der ersten Arbeitsperiode bedient werden, die  $i$  Kunden am Anfang sind dabei mitgezählt. Es gilt

$$\begin{aligned} P\{T_i < t; N(T_i) = n\} &= \int_{x=0}^t dB_i(x) G_{n-i}(x, t) = \\ &= \int_{x=0}^t dB_i(x) \int_{\tau=x}^t e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^{n-i-1}}{(n-i)!} \lambda x dB_{n-i}(\tau-x) \\ &= \int_{\tau=0}^t e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^{n-i-1}}{(n-i)!} \int_{x=0}^{\tau} \lambda x dB_i(x) dB_{n-i}(\tau-x) \\ &= \frac{i}{n} \int_{\tau=0}^t e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^{n-i}}{(n-i)!} dB_n(\tau) \end{aligned} \quad (10)$$

Mit  $i = 1$  ergibt sich

$$G(t) = P\{T_1 \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau=0}^t e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^{n-1}}{n!} dB_n(\tau).$$

Als Nebenresultat sei erwähnt

$$f_n = P\{N(T_1) = n\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!} dB_n(t); n \geq 1.$$

Mit (8) und (10) ergibt sich die L. S. T. von  $T_1$ :

$$\Gamma(\Theta) = E[e^{-\Theta T_1}] = \int_0^\infty dB(x) e^{-x\eta(\Theta)} = \psi(\eta),$$

wobei  $\Gamma(\Theta)$  der Funktionalgleichung  $\Gamma(\Theta) = \psi(\Theta + \lambda - \lambda \Gamma)$  genügt.

Wir erhalten weiter

$$P\{T_1 < \infty\} = \begin{cases} 1 & \varrho \leq 1 \\ \zeta & \varrho > 1. \end{cases}$$

wobei  $\zeta$  die kleinste positive Wurzel von  $\zeta = \Psi(\lambda - \lambda \zeta)$  ist.

### 3.1.3. Zusammenstellung und Vergleich

In 3.1. haben wir folgende Verteilungen für die Warteschlange gewonnen unter der Annahme, dass  $X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , ein zusammengesetzter Poissonprozess sei mit nur positiven Sprüngen, die die Verteilung  $B(x)$  haben:

$$\begin{aligned} P\{T(x) < t\}, & \quad P\{T_1 < t\}, \\ P\{T(x) < \infty\}, & \quad P\{T_1 < \infty\}. \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt, verhalten sich die Wartezeiten wie der Wasserstand eines Dammes mit unbeschränkter Kapazität.  $T(x)$  ist die Dauer einer Periode mit Wasser, wenn zu Beginn die Wassermenge  $x$  im Damm war.  $T_1$  ist die Dauer einer Periode mit Wasser.

Beachten wir, dass

$$\begin{aligned} P\{T(x) \leq t\} &= P\left\{\inf_{0 \leq u \leq t} (x + X(u) - u) < 0\right\} \\ &= 1 - P\left\{\sup_{0 \leq u \leq t} (u - X(u)) \leq x\right\}, \end{aligned}$$

so gewinnen wir die Verteilung von  $\sup_{0 \leq u \leq t} (u - X(u))$ . Dabei erinnern wir uns, dass  $u - X(u)$ ,  $0 \leq u < \infty$ , unsern Risikonervenprozess charakterisiert.

Setzen wir voraus, dass die Reserven auch negativ werden können, dann ist  $P\{T(x) \leq t\}$  gleich der Wahrscheinlichkeit, dass Risikoreserven im Zeitraum  $[0, t]$  mindestens einmal den Anfangsstand von  $x$  übersteigen, und  $P\{T_1 \leq t\}$  die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Reserven im Zeitintervall  $(\tau, \tau + t)$  wenigstens einmal vom Schaden, der sich zur Zeit  $\tau$  ereignete, erholt haben.

### 3.2. Verteilung der Wartezeiten

#### 3.2.1. Die Wahrscheinlichkeit einer leeren Warteschlange

Sei  $F(x; y, t) = P\{W(t) \leq y \mid W(0) = x\}$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq \max(0, x - t)$ .  
Im besonderen ist  $F(x; 0, t) = P\{W(t) = 0 \mid W(0) = x\}$ ,  $t \geq x \geq 0$ , die Wahrscheinlichkeit, einen freien Schalter zu finden.

$N(t)$  sei die Anzahl Kunden, die während  $(0, t]$  bedient werden.

$F_n(x; 0, t) = P\{W(t) = 0, N(t) = n \mid W(0) = x\}$ .

Es gilt  $F_0(x; 0, t) = e^{-\lambda t}$  für  $t \geq x$  und  $= 0$  für  $t < x$ , und für  $n \geq 1$

$$F_n(x; 0, t) = \int_{\tau=0}^x \int_{v=0}^{t-x} \lambda e^{-\lambda \tau} F_{n-1}(x-\tau+v; 0, t-\tau) d\tau dB(v) \\ + \int_{\tau=x}^t \int_{v=0}^{t-\tau} \lambda e^{-\lambda \tau} F_{n-1}(v; 0, t-\tau) d\tau dB(v).$$

Es können die gleichen Überlegungen gemacht werden wie bei (7), nur kann hier der erste Kunde auch im Intervall  $(x, \tau]$  ankommen. Durch Induktion ergibt sich wie in 3.1.1.:

$$F_n(x; 0, t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!} \int_{v=0}^{t-x} \lambda (t-v) dB_n(v), \quad n \geq 0;$$

und daraus

$$F(x; 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x; 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!} \int_{v=0}^{t-x} \lambda (t-v) dB_n(v).$$

Die Laplacetransformierte von  $F(x; 0, t)$  ist

$$F^*(x; 0, \Theta) = \int_{t=x}^{\infty} e^{-\Theta t} F(x; 0, t) dt = \frac{e^{-x\eta(\Theta)}}{\eta(\Theta)}, \quad (11)$$

wobei  $\eta(\Theta)$  durch (9) bestimmt ist,

#### 3.2.2. Übergangsverteilung von $W(t)$

Indiesem Abschnitt befassen wir uns mit  $F(x; y, t) = P\{W(t) \leq y \mid W(0) = x\}$ .

Es gilt  $F(x; y, t) = K(t + y - x, t)$  für  $0 \leq t \leq x$ ,  $y \geq x - t$ ; und uns bleibt,  $F(x; y, t)$  für  $t > x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  zu bestimmen.

Es ist

$$\Phi(x; \Theta, t) = \int_0^{\infty} e^{-\Theta y} F(x; y, t) dy, \quad \operatorname{Re}(\Theta) > 0 \\ = \frac{1}{\Theta} e^{\Theta(t-x) - \lambda t[1 - \Psi'(\Theta)]} - \int_0^{t-x} F(x; 0, t-\tau) e^{-\lambda \tau + \lambda \tau \Psi'(\Theta) + \Theta \tau} d\tau. \quad (12)$$

Daraus kann die Übergangsverteilung zurückgewonnen werden:

$$F(x; y, t) = K(t + y - x, t) - \int_{\tau=0}^{t-x} F(x; 0, t-\tau) dK(\tau + y, \tau), y \geq 0.$$

Für das Folgende halten wir noch die Laplacetransformierte von (12) in bezug auf  $t$  fest:

$$\Phi^*(x; \Theta, s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(x; \Theta, t) dt = \frac{\frac{1}{\Theta} e^{-\Theta x} - e^{-x\eta(s)} (\eta(s))^{\lambda-1}}{s - \Theta + \lambda - \lambda \psi(\theta)}, \quad (13)$$

$$\operatorname{Re}(s) > \Theta - \lambda + \lambda \psi(\theta).$$

### 3.2.3. Grenzverteilung der Wartezeit

Vorerst nehmen wir an, dass  $W(0) = 0$ . Nach (3) in 2.1. ist dann  $P\{W(t) \leq x \mid W(0) = 0\} = P\{X(u) - u \leq x \text{ für } 0 \leq u \leq t\}$ .

Somit ist  $F(0; y, t) = P\{W(t) \leq y \mid W(0) = 0\} = 1 - P\{U(y) \leq t\}$ , wobei  $U(y) = \inf\{t \mid X(t) - t > y\}$ , eine monotone, nicht wachsende Funktion in  $t$ , und  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(0; y, t)$  existiert:

$$F^*(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(0; y, t).$$

Mit (11) und (9) erhalten wir

$$F^*(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Theta F^*(0, 0, \Theta) = \begin{cases} 0, & \varrho \geq 1 \\ \frac{1}{\eta'(0+)} = 1 - \varrho, & \varrho < 1. \end{cases}$$

Sei  $\Phi^*(\Theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(0, \Theta, t)$ , dann ist mit (13)

$$\begin{aligned} \Phi^*(\Theta) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi^*(0, \Theta, s) \\ &= \begin{cases} 0, & \varrho \geq 1 \\ \frac{1 - \varrho}{\Theta - \lambda + \lambda \psi(\Theta)}, & \varrho < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x; y, t) = F^*(y)$  unabhängig von  $x$  ist. Somit gilt zusammenfassend:

Wenn  $\varrho \geq 1$ , dann  $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{W(t) \leq y\} = 0$  für alle  $y$  und unabhängig von der Verteilung von  $W(0)$ .

Wenn  $\varrho < 1$ , dann existiert  $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{W(t) \leq y\} = F^*(y)$  und ist unabhängig von der Verteilung von  $W(0)$ , und es ist

$$\int_{0-}^{\infty} e^{-\Theta y} F^*(y) dy = \frac{1-\varrho}{\Theta - \lambda + \lambda \psi(\Theta)}.$$

Daraus kann  $F^*(y)$  gewonnen werden:

$$F^*(y) = 1 - (1-\varrho) \int_{t=0}^{\infty} dK(t+y, t), y > 0.$$

### 3.2.4. Zusammenstellung und Vergleich

Wir betrachten wieder die in 2. beschriebenen Prozesse und die in 3.2 gewonnenen Resultate:

$$F(x; 0, t) = P\{W(t) = 0 \mid W(0) = 0\}$$

$$F(x; y, t) = P\{W(t) \leq y \mid W(0) = x\}$$

$$F^*(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{W(t) \leq y\}.$$

Da sich der Wasserstand eines unbeschränkten Dammes gleich verhält wie die Wartezeit (vgl. 2.2.), ist somit auch

$F(x; y, t)$  die Wahrscheinlichkeit, dass der Damm zur Zeit  $t$  nicht mehr als die Menge  $y$  enthält, falls die anfängliche Wassermenge  $x$  betrug; und

$F^*(y)$  die Wahrscheinlichkeit, dass im stationären Zustand nicht mehr als die Menge  $y$  gespeichert ist.

Wir beachten (3) in 2.1.:

$$P\{W(t) \leq x \mid W(0) = c\} = P\left\{\sup_{0 \leq u \leq t} (X(u) - u) \leq x, c + X(t) - t \leq x\right\}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} F(x; y, t) &= P\left\{\sup_{0 \leq v \leq t} (X(v) - v) \leq y, x + X(t) - t \leq y\right\} \\ &= P\left\{\inf_{0 \leq v \leq t} (y + v - X(v)) \geq 0, y + t - X(t) \geq x\right\} \end{aligned}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitraum  $[0, t]$  die Risikoreserven, falls  $Z(0) = y$ , nicht negativ werden und dass zur Zeit  $t$  die Reserven grösser als  $x$  sind und

$$\begin{aligned} F^*(y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\left\{\sup_{0 \leq v \leq t} \left(\begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix}\right) + X(v) - v \leq y\right\} \\ &= P\left\{\inf_{0 \leq v < \infty} (y + v - X(v)) \geq 0\right\} \end{aligned}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Reserven nie negativ werden, falls  $Z(0) = y$ .

### 3.3. Grenzverteilung des Inhalts eines endlichen Damms

Die hier dargestellten Resultate wurden von L. Takács (1967) erreicht als Verallgemeinerung des klassischen Ruinproblems bei einem 2-Personen-Spiel. In speziellen Fällen wurden schon früher Ergebnisse erzielt, so durch Gani und Prabhu (1959) für den zusammengesetzten Poissonprozess mit konstanten Sprüngen und Weesakul B., Yeo G. F. (1963) für den zus. Poissonprozess mit negativ exponentiellen Sprüngen.

#### 3.3.1. Ein Satz von Takács

$X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , sei ein separabler<sup>1</sup> stochastischer Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen und fast alle Stichprobenfunktionen seien nicht abnehmende Treppenfunktionen mit  $X(0) = 0$ .  $T(c) = \inf\{t \mid c + X(t) - t \leq 0; 0 \leq t < \infty\}$ .

Wenn  $0 \leq x \leq y$ , dann

$$P\{X(t) - t \leq x \text{ für } 0 \leq t \leq T(y-x)\} = \frac{V(x)}{V(y)}$$

und  $\Omega(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx} dV(x) = \frac{V(0)s}{s - \Phi(s)}$ ,  $V(0) > 0$  beliebig für  $\operatorname{Re}(s) > \omega$ :

= grösste nichtnegative Lösung von  $\Phi(s) = s$  wobei  $E[e^{-sX(u)}] = e^{-u\Phi(s)}$ .

Betrachten wir nun den zusammengesetzten Poissonprozess mit der Verteilung (1) von 2.1. In (4) von 2.1. zeigten wir

$$E[e^{-sX(u)}] = e^{-\lambda u[1-\psi(s)]},$$

und somit ist  $\Phi(s) = \lambda[1-\psi(s)]$  und  $\Omega(s) = \frac{V(0)s}{s - \lambda[1-\psi(s)]}$ .

Wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \lim_{s \rightarrow 0+} \Omega(s) = \frac{V(0)}{1 - \Phi'(0+)} = \frac{V(0)}{1 - \varrho}$

und  $\Omega(0) = 1$  ist  $V(0) = 1 - \varrho$  für  $\varrho < 1$ , und somit

$$\int_{0-}^{\infty} e^{-sx} dV(x) = s \cdot \frac{1 - \varrho}{s - \lambda[1 - \psi(s)]}$$

<sup>1</sup>  $X(t)$  heisst separabel, falls eine Folge  $t_j$  und eine Ereignisnullmenge  $A$  existiert, so dass für jedes offene  $t$ -Intervall  $I$  und jedes geschlossene  $x$ -Intervall  $A$  sich die beiden  $\omega$ -Mengen

$$\{\omega \mid x_t(\omega) \in A, t \in I\} \text{ und } \{\omega \mid x_{t_j}(\omega) \in A, t_j \in I\}$$

höchstens um eine Teilmenge von  $A$  unterscheiden (nach Doob, Stochastic Processes, Seite 52).

Nach 3.2.3.

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} F^*(x) dx = \frac{1 - \varrho}{s - \lambda [1 - \psi(s)]}, \text{ falls } \varrho < 1.$$

Daraus folgt:

$$V(x) = F^*(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{W(t) \leq x\}.$$

### 3.3.2. Grenzverteilung im endlichen Damm

Mit  $\eta(t)$  haben wir den Inhalt eines Dammes mit Kapazität  $m$  zur Zeit  $t$  bezeichnet und wir erinnern uns an (5) in 2.2.:

$P\{\eta(t) \leq x \mid \eta(0) = m\} = P\{X(u) - u \leq x \text{ für } 0 \leq u \leq T(m-x) \text{ und } T(m-x) \leq t\}$  für  $0 \leq x \leq m$ . Folglich ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\eta(t) \leq x \mid \eta(0) = m\} = P\{X(u) - u \leq x \text{ für } 0 \leq u \leq T(m-x)\}$$

für  $0 \leq x \leq m$ , denn falls  $P\{T(m-x) < \infty\} = 1$ , ist dies klar, und wenn  $P\{T(m-x) = \infty\} > 0$ , dann ist  $P\{X(u) - u < x, 0 \leq u < \infty\} = 0$ , und dies gilt auch in diesem Fall.

Mit dem Satz von 3.3.1. (Takács) erhalten wir:

Ist  $X(u)$ ,  $0 \leq u < \infty$ , ein separabler stochastischer Prozess mit stationären, unabhängigen Zuwächsen, fast alle Stichprobenfunktionen sind Treppenfunktionen mit  $X(0) = 0$ , dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\eta(t) \leq x\} = \frac{V(x)}{V(m)} \text{ für } 0 \leq x \leq m,$$

und es kann gezeigt werden, dass diese Verteilung unabhängig von der Verteilung von  $\eta(0)$  ist.

### 3.3.3. Zusammenstellung und Vergleich

Wir setzen die in 2. beschriebenen Prozesse voraus und verwenden die dort gebrauchten Schreibweisen.

Für die Grenzverteilung von  $\eta(t)$  im Damm mit Kapazität  $m$  haben wir im letzten Abschnitt erhalten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\eta(t) \leq x\} = \frac{F^*(x)}{F^*(m)}, 0 \leq x \leq m.$$



Damit haben wir aber auch die Verteilung der maximalen Wartezeiten in der ersten Arbeitsperiode gewonnen, denn es gilt mit dem Satz von Takács

$$P\{c + X(t) - t \leq x, 0 \leq t \leq T(c)\} = \frac{F^*(x-c)}{F^*(x)} =$$

$$= P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T(c)} W(t) \leq x \mid W(0) = c\right\}$$

$$\text{oder } P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T(m-x)} W(t) \leq m \mid W(0) = m-x\right\} = \frac{F^*(x)}{F^*(m)}.$$

Gleichzeitig gewannen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Risikoreserven  $Z(t) = x + t - X(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , nicht negativ werden bevor sie den Stand  $m$  erreichen, denn

$$\begin{aligned} & P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T(m-x)} W(t) \leq m \mid W(0) = m-x\right\} \\ &= P\left\{\sup_{0 \leq v \leq T(m-x)} (X(v) - v) \leq m \text{ und } \sup_{0 \leq v \leq T(m-x)} (m-x + X(v) - v) \leq m\right\} \\ &= P\left\{\inf (x + v - X(v)) \geq 0 \text{ für } 0 \leq v \leq \inf \{t \mid x + t - X(t) \geq m\}\right\}. \end{aligned}$$

### Literaturnachweis

*Gani, J.* (1957): J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 19/181–206, «Problems in the probability theory of storage systems».

*Gani, J. and Prabhu, N. Y.* (1959): J. Math. Mech. 8/653–663, «The time dependent solution of a storage model with Poisson input».

*Kendall, D. G.* (1957): J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 19/207–212, «Some problems in the theory of dams».

*Prabhu, N. Y.* (1960): J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 22/104–108, «Some results for the queue with Poisson arrivals».

– *Queues and Inventories.* J. Wiley & Sons, New York 1964.

*Takács, L.* (1967): J. Appl. Probability 4/151–161, «The distribution of the content of finite dams».

*Weesakul, B. and Yeo, G. F.* (1963): Z. Wahrsch.theorie 2/135–146, «Some problems in finite dams with an application to insurance risk».