

Eine obere Grenze für Stop-Loss-Prämien

Autor(en): **Gagliardi, B. / Straub, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **74 (1974)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967101>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Eine obere Grenze für Stop-Loss-Prämien

Von B. Gagliardi und E. Straub, Zürich

1. Problemstellung und Resultat

Die Anzahl K der Schäden pro Jahr sei poissonverteilt, und der einzelne Schaden X nehme höchstens den Wert M an. Für den Gesamtschaden

$$Z = \sum_{k=1}^K X_k \quad (X_k = k\text{-ter Einzelschaden})$$

gilt demnach

$$F(z) = \text{Prob}[Z \leq z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} V^{*k}(z),$$

worin $V^{*k}(z)$ die k -te Faltungspotenz der Einzelschadenverteilung

$$V(z) = \text{Prob}[X \leq z] \quad \text{und also} \quad V^{*k}(z) = 1 \text{ für } z \geq kM$$

nach obiger Voraussetzung, denn die Summe von k beliebigen Einzelschäden kann höchstens gleich dem k -fachen Maximalschadenbetrag sein.

Mit diesen Bezeichnungen berechnet sich die Bedarfsprämie für eine unbegrenzte Stop-Loss-Deckung nach einem Interventionspunkt a zu

$$E_{X,K}(a) = \int_a^{\infty} (z-a) dF(z) = E_{X,K}(0) - \int_0^a \bar{F}(z) dz,$$

worin

$$E_{X,K}(0) = E[Z] = E[K] E[X] = \lambda m$$

mit λ = mittlere Schadenanzahl und m = mittlerer Schadenbetrag und

$$\bar{F}(z) = 1 - F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \bar{V}^{*k}(z)$$

$$\text{mit } \bar{V}^{*k}(z) = 1 - V^{*k}(z).$$

Nun lässt sich $E_{X, K}(a)$ bekanntlich in den wenigsten Fällen exakt berechnen, und ausserdem sind die meisten der üblichen Approximationen recht aufwendig. *G. Benktander* [1, 2] hat deshalb vorgeschlagen, die Variablen K und X durch \tilde{K} und \tilde{X} zu ersetzen, wobei \tilde{X} eine bei M degenerierte Variable ist (man tut so, als ob es nur Maximalschäden gäbe) und \tilde{K} poissonverteilt mit Parameter $\Lambda = \lambda \frac{m}{M}$ (es ist damit $\Lambda M = \lambda m$, also hat der diskretisierte Prozess \tilde{Z} denselben Erwartungswert wie Z). Die Berechnung der Stop-Loss-Prämie für die neue Gesamtschadenvariable

$$\tilde{Z} = \sum_{k=0}^{\tilde{K}} \tilde{X}_k$$

wird dann wegen

$$\text{Prob}[\tilde{X} > x] = \bar{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < M \\ 0 & \text{für } x \geq M \end{cases}$$

sehr einfach, weil

$$E_{\tilde{X}, \tilde{K}}(a) = \lambda m - \int_0^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} \bar{D}^{*k}(z) dz$$

$$\text{mit } \bar{D}^{*k}(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z < kM \\ 0 & \text{für } z \geq kM, \end{cases}$$

das heisst, für $a = rM + A$ mit $0 \leq A < M$ (der Stop-Loss-Punkt liege zwischen dem r - und $(r + 1)$ -fachen Maximalschaden) ist

$$\begin{aligned} E_{\tilde{X}, \tilde{K}}(a) &= \lambda m - \sum_{k=0}^r \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} kM - (rM + A) \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} \\ &= \lambda m - \Lambda M \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} - (rM + A) \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} \end{aligned}$$

oder mit anderen Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} E_{\tilde{X}, \tilde{K}}(a) &= \Lambda M \bar{P}_r(\Lambda) - (rM + A) \bar{P}_{r+1}(\Lambda) \\ \text{mit } \bar{P}_r(\Lambda) &= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda}. \end{aligned}}$$

Damit wird also für die Bestimmung der so diskretisierten Stopp-Loss-Prämie $E_{\tilde{X}, \tilde{K}}(a)$ lediglich eine Tabelle der kumulativen Poissonwahrscheinlichkeiten benötigt.

Im folgenden wird gezeigt, dass diese Ersetzung « \tilde{Z} statt Z » stets eine obere Schranke für die richtige Stopp-Loss-Prämie liefert, das heisst, dass

$$E_{\tilde{X}, \tilde{K}}(a) \geq E_{X, K}(a) \quad \text{für alle } a \geq 0.$$

Es ist uns nicht gelungen, einen kürzeren und weniger anspruchsvollen Beweis als den vorliegenden zu finden. Trotzdem gibt es vermutlich eine direktere Methode. – Sachdienliche Mitteilungen seitens der Leser sind erbeten an die Autoren oder die Redaktion der «Mitteilungen»!*

2. Vorbereitungen für den Beweis

Wir werden die folgenden zwei Lemmata benutzen:

Lemma 1

Vor.: F_1, F_2, G seien Verteilungsfunktionen auf der nicht-negativen Zahlengeraden.

Für alle $a \geq 0$ gelte ausserdem

$$\int_0^a F_1(z) dz \geq \int_0^a F_2(z) dz.$$

Beh.:

Für alle $a \geq 0$ gilt

$$\int_0^a F_1 * G(z) dz \geq \int_0^a F_2 * G(z) dz,$$

wobei $*$ die Faltungsoperation bedeutet.

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_0^a F_1 * G(z) dz &= \int_0^a dz \int_0^z F_1(z-y) dG(y) = \\ \int_0^a dG(y) \int_y^a F_1(z-y) dz &= \int_0^a dG(y) \int_0^{a-y} F_1(\zeta) d\zeta \geq \end{aligned}$$

* Für eine erste solche Reaktion siehe unter «Kurzmittellungen» in diesem Heft.

$$\int_0^a dG(y) \int_0^{a-y} F_2(\zeta) d\zeta = \int_0^a dG(y) \int_y^a F_2(z-y) dz =$$

$$\int_0^a dz \int_0^z F_2(z-y) dG(y) = \int_0^a F_2 * G(z) dz.$$

Hieraus folgt unmittelbar das

Korollar:

$F_i, G_i, i = 1, 2$ seien Verteilungsfunktionen mit Gesamtmasse auf den nicht-negativen Zahlen, und es gelte für alle $a \geq 0$

$$\int_0^a F_1(z) dz \geq \int_0^a F_2(z) dz, \quad \int_0^a G_1(z) dz \geq \int_0^a G_2(z) dz.$$

Dann ist auch

$$\int_0^a F_1 * G_1(z) dz \geq \int_0^a F_2 * G_2(z) dz \text{ für alle } a \geq 0.$$

Lemma 2

Beh.: $\Pi(\Lambda_1, a) \leq \Pi(\Lambda_2, a)$ für $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ und $\Pi(\Lambda, a) = \frac{1}{\Lambda M} E_{\bar{X}, \bar{K}}(a\Lambda M)$.

Bew.: Es ist

$$\Pi(\Lambda a) = \frac{1}{\Lambda M} \left[\Lambda M \bar{P}_{[a\Lambda]}(\Lambda) - a\Lambda M \bar{P}_{[a\Lambda]+1}(\Lambda) \right]$$

$$= 1 - a + \left\{ a \sum_{n=0}^{[a\Lambda]} \frac{\Lambda^n}{n!} - \sum_{n=0}^{[a\Lambda]-1} \frac{\Lambda^n}{n!} \right\} e^{-\Lambda},$$

wobei $[a\Lambda] =$ grösste ganze Zahl $\leq a\Lambda$.

Für $[a \cdot \Lambda] = 0$ gilt

$$\Pi(\Lambda, a) = 1 - a + e^{-\Lambda} \cdot a.$$

Aus obigen Formeln sieht man, dass $\Pi(\Lambda, a)$ in Λ stetig und an den Stellen Λ differenzierbar ist, für die $\Lambda \cdot a$ keine ganze Zahl ist.

Für den Beweis genügt es, zu zeigen, dass

$$\frac{d\Pi(\Lambda, a)}{d\Lambda} \Big|_{\Lambda=c} \leq 0 \text{ ist, für } a \cdot c \neq \text{ganze Zahl.}$$

$$1^0 \quad [a \cdot c] > 0$$

$$\frac{d\Pi(\Lambda, a)}{d\Lambda} \Big|_{\Lambda=c} = \frac{e^{-c}}{[a \cdot c]!} \cdot c^{[ac]-1} \cdot ([ac] - ac) \leq 0$$

$$2^0 \quad [a \cdot c] = 0$$

$$\frac{d\Pi(\Lambda, a)}{d\Lambda} \Big|_{\Lambda=c} = -e^{-c} \cdot a \leq 0.$$

3. Beweis durch Induktion nach n

Mit n bezeichnen wir die Anzahl Werte, welche die Einzelschadenvariable X im Intervall $(0, M]$ annimmt.

Als Induktionsverankerung setzen wir $n = 1$ und benutzen Lemma 2. Sei also $X = N \leq M$ mit Wahrscheinlichkeit 1 und somit

$$\begin{aligned} E_{X, \bar{K}}(a) &= \lambda N \Pi\left(\lambda, \frac{a}{\lambda N}\right) = \Lambda M \Pi\left(\lambda, \frac{a}{\Lambda M}\right) \\ &\leq \Lambda M \Pi\left(\Lambda, \frac{a}{\Lambda M}\right) = E_{\bar{X}, \bar{K}}(a) \quad \text{für } \Lambda = \lambda \frac{N}{M}. \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte auch für alle $(n-1)$ -wertigen Variablen X .

Für den Schritt von $n-1$ nach n betrachten wir nun eine Einzelschadenvariable X , welche die n Werte $y_i, 0 \leq y_i \leq M, i = 1, 2, \dots, n$ mit den Wahrscheinlich-

keiten p_i annimmt. Wir schreiben Q_{n-1} für $\sum_{i=1}^{n-1} p_i$ und definieren eine $(n-1)$ -

wertige Variable X^{n-1} durch $\text{Prob}[X^{n-1} = y_i] = \frac{p_i}{Q_{n-1}}$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$,

sowie eine degenerierte Variable X^n , welche den Wert y_n mit Wahrscheinlichkeit 1 annimmt. Damit lässt sich X wie folgt als Mischung von X^{n-1} und X^n schreiben:

$$\text{Prob} [X = z] = \frac{\lambda_1}{\lambda} \text{Prob} [X^{n-1} = z] + \frac{\lambda_2}{\lambda} \text{Prob} [X^n = z]$$

mit $\lambda_1 = \lambda Q_{n-1}$, $\lambda_2 = p_n \lambda$ und also $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$.

Nun ist aber bei zusammengesetzt poissonverteilten Variablen eine Mischung der Einzelschäden dasselbe wie die Addition der entsprechenden Gesamtschadenvariablen (leicht nachzuweisen mit Hilfe der charakteristischen Funktionen), also

$$\sum_{k=1}^K X_k = Z = Z_1 + Z_2 = \sum_{k=1}^{K_1} X_k^{n-1} + \sum_{k=1}^{K_2} X_k^n,$$

worin Z der Gesamtschaden mit der n -wertigen Einzelschadenvariablen X und $E[K] = \lambda$,

Z_1 der Gesamtschaden mit der $(n-1)$ -wertigen Einzelschadenvariablen X^{n-1} und $E[K_1] = \lambda_1$ und

Z_2 der Gesamtschaden mit der bei y_n degenerierten Einzelschadenvariablen X^n und $E[K_2] = \lambda_2$.

Weiter gilt auf Grund obiger Induktionsverankerung und -voraussetzung

$$E_{X^n, K_2}(a) \leq E_{\tilde{X}, \tilde{K}_2}(a)$$

$$\text{mit } E[\tilde{K}_2] = A_2 = \lambda_2 \frac{y^n}{M}$$

$$\text{und } E_{X^{n-1}, K_1}(a) \leq E_{\tilde{X}, \tilde{K}_1}(a)$$

$$\text{mit } E[\tilde{K}_1] = A_1 = \frac{\lambda_1}{M Q_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} y_r p_r$$

und wieder $\tilde{X} = M$ mit Wahrscheinlichkeit 1,

woraus unter Benutzung des Korollars von Lemma 1 die Behauptung $E_{X, K}(a) \leq E_{\tilde{X}, \tilde{K}}(a)$ für jede Einzelschadenversicherung mit endlich – aber beliebig –

vielen Werten folgt. (Die Verallgemeinerung des Beweises auf kontinuierliche Verteilungen geschieht am besten indirekt unter Benutzung der Tatsache, dass jede kontinuierliche Verteilung beliebig gut durch eine diskrete angenähert werden kann.)

Literaturverzeichnis

- [1] *G. Benktander*: A Motor Excess Rating Problem: Flat Rate with Refund, ASTIN-Bulletin vol. 8.
 [2] *G. Benktander*: On the Rating of a Special Stop Loss Cover, ASTIN-Bulletin, vol. 8.

Zusammenfassung

Ersetzt man eine zusammengesetzte Poisson-verteilte Gesamtschadenvariable durch eine solche mit degeneriert verteiltem Einzelschaden, so werden Stop-Loss-Prämien leicht berechenbar und bilden zudem eine obere Schranke für die zum ursprünglichen Gesamtschaden gehörigen Stop-Loss-Prämien.

Summary

If an integrated Poisson-distributed overall loss variable is replaced by one with degenerate distributed individual loss, it becomes easy to calculate stop loss premiums which, in addition, form an upper limit for the stop loss premiums belonging to the original overall loss.

Résumé

Si l'on remplace une variable de sinistre global, composée, répartie selon Poisson, par une variable dégénérant en sinistres individuels les primes stop loss deviennent facilement calculables et constituent un plafond pour les primes stop loss afférentes au sinistre global primitif.

Riassunto

Sostituendo una variabile che rappresenta un sinistro totale e che segue la distribuzione di Poisson composta mediante una variabile con un sinistro individuale a distribuzione degenerata si possono calcolare facilmente i premi dello stop loss; questi ultimi costituiscono inoltre un limite superiore dei premi corrispondenti al sinistro totale originario.

