Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 74 (1974)

Artikel: Ein Portfolio-Modell : Marktgleichgewicht bei subjektiven Preiserwartungen

Autor: Müller, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967094

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Portfolio-Modell
Marktgleichgewicht bei subjektiven Preiserwartungen *

Von Heinz Müller

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Tauschmarkt untersucht. Neben Spekulationsgütern (Aktien, Wertpapiere, Rohstoffe) kommt auch das Geld (Werteinheit) vor.
Das Modell umfasst die Zeitpunkte 1 (Gegenwart) und 2 (Zukunft). $\underline{P}$ sei das Preissystem im Zeitpunkt 1.
Für den Zeitpunkt 2 hat jeder Marktteilnehmer von $\underline{P}$ abhängige Preiserwartungen [1].
Diese Preiserwartungen sind durch subjektive Wahrscheinlichkeiten gegeben.
Im Zeitpunkt 1 ergibt sich nun folgende Situation:
- Jeder Marktteilnehmer hat bestimmte Anteile an den verschiedenen Gütern.
- Er legt sein Vermögen neu an und maximiert dabei eine Zielfunktion.
- Die Zielfunktion ist der subjektive Erwartungswert des Nutzens [2] aus dem Vermögen im Zeitpunkt 2.
- Auf diese Weise entstehen im Zeitpunkt 1 Angebot und Nachfrage in Abhängigkeit von $\underline{P}$.

Damit stellt sich die Frage nach der Existenz eines Gleichgewichts. Zu andern Modellen [1], [15], [17], [24] bestehen folgende Unterschiede:

1. Die Zielfunktionen der Marktteilnehmer entsprechen der Nutzentheorie von Neumann/Morgenstern.
   In den übrigen Arbeiten sind die Zielfunktionen oft nur von Erwartungswert und Varianz abhängig ([μ, σ]-Analyse).

* Der vorliegende Artikel stellt meine Doktorarbeit dar. Ich möchte dem Referenten Herrn Prof. Bühlmann und der Korreferentin Frau Prof. Schelbert für ihre wertvollen Ratschläge bestens danken. Die Herren R. Bloch, P. Schuster und die Mitarbeiter des Instituts für Operations Research der Universität Zürich halfen mir mit zahlreichen Hinweisen und ihrem Interesse sehr viel bei der Durchführung der Arbeit.

[1] Es besteht kein Zusammenhang mit dem Begriff «Erwartungswert» aus der Wahrscheinlichkeitstheorie.

[2] Nutzenfunktion im Sinne von Neumann/Morgenstern.

2. Die Preiserwartungen hängen von den gegenwärtigen Preisen ab. Diese Eigenschaft ist oft von entscheidender Bedeutung (z.B. bei Aktien).

Sind Transaktionen von Aktien (bzw. Wertschriften) jederzeit möglich, so genügt die Betrachtung zweier Zeitpunkte. Die Wertschriften- und Aktienmärkte sind mit der restlichen Ökonomie durch den Geldzinssatz und die Erwartungen der Marktteilnehmer gekoppelt [3]. Das vorgeschlagene Modell eignet sich besonders zur Untersuchung solcher Märkte.

In dieser Arbeit wird zuerst auf die Literatur zur Gleichgewichtstheorie bei Unsicherheit hingewiesen. Dann erfolgt die mathematische Formulierung des Modells. Anschliessend an den Existenzsatz werden die Optimalitätseigenschaften des Gleichgewichts untersucht.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen sind Aussagen über die Nachfragekorrespondenz möglich (Eindeutigkeit, Stetigkeit, Differenzierbarkeit).

Tritt im Modell nur das Geld und ein Spekulationsgut auf, so kann man Systemstabilität nachweisen. Einzelne Gleichgewichtspreise können allerdings instabil sein. Falls zwei Spekulationsgüter vorkommen, lassen sich Gegenbeispiele zur Systemstabilität konstruieren.

Sämtliche Beweise befinden sich im Anhang. Damit soll die Übersichtlichkeit erhöht werden.

2. Literatur zur Gleichgewichtstheorie bei Unsicherheit

2.1. Die Beiträge von Arrow, Debreu und Radner

In der Gleichgewichtstheorie wurde die Unsicherheit ursprünglich nicht berücksichtigt. Arrow schlägt in einer Arbeit aus dem Jahr 1952 vor, Zustände der Natur («states of nature») zu unterscheiden [3]. Ein Gut ist genau dann verfügbar, wenn ein bestimmter Zustand der Natur eintritt. Dieser Ansatz wurde von Debreu [11], pp. 106–110 und vor allem von Radner weiter bearbeitet [19], [20], [21], [22].

Betrachtet werden T Zeitintervalle: $t = 1, 2, ..., T$.

Ω sei die Menge der möglichen Zustände der Natur. Die Natur entscheidet sich für einen Zustand $\omega_0 \in \Omega$. Damit ist alles bestimmt, was die Teilnehmer

[3] Auf dem Aktienmarkt sind die Erwartungen der Marktteilnehmer (Besitzer des Unternehmens) massgebend und nicht diejenigen des Managements (Leiter des Unternehmens). Die Erwartungen der Marktteilnehmer können übrigens stark von denjenigen des Managements abweichen (vgl. Davidson [10]).

an der Ökonomie nicht beeinflussen können (z.B. Verlauf des Wetters, Naturkatastrophen, Auftreten von Krankheiten usw).
Die Information des Teilnehmers i über den wahren Zustand ω_0 wird folgendermassen dargestellt:

$$S_t^i \ (t = 1, ..., T) \text{ seien Partitionen von } \Omega .$$

In jedem Zeitintervall t weiss der Teilnehmer i, welche Menge S ($S \in \mathcal{S}_t^i$) den wahren Zustand ω_0 enthält.

$\{S_t^i\}_{t = 1, ..., T}$ heisst Informationsstruktur des Teilnehmers i.

Die Mengen $S \in S_t^i$ heissen Ereignisse.
Ein Gut ist jetzt charakterisiert durch
- allgemeine Eigenschaften,
- Ort der Verfügbarkeit,
- Zeit der Verfügbarkeit,
- Zustand der Natur, bei dem das Gut verfügbar ist.

Radner erweitert die bekannte Theorie von Arrow/Debreu für den Fall, dass die einzelnen Teilnehmer über unterschiedliche Informationsstrukturen verfügen [19].
Der Fall, dass die Informationsstrukturen der Teilnehmer übereinstimmen, wurde schon früher von Debreu behandelt ([11], pp. 106–110).
In [20] weist Radner auf die Mängel der erweiterten Theorie hin. Bei den bisherigen Modellen finden alle Transaktionen bereits im ersten Zeitintervall statt. In den Zeitintervallen $t = 2, ..., T$ gibt es keine Märkte. Radner untersucht in [21] ein Modell, das der alltäglichen Beobachtung besser entspricht. Er macht folgenden Ansatz: Alle Teilnehmer verfügen über die gleiche Informationsstruktur $\{S_t\}_{t = 1, ..., T}$. In jedem Zeitintervall t und bei jedem Ereignis $S \in S_t$ ($t = 1, ..., T-1$) gibt es nicht sofort verfügbare Güter, mit denen kein Handel möglich ist. Deshalb existieren zukünftige Märkte.
Für jeden zukünftigen Markt (d.h. $t > 1$) ordnen die Teilnehmer den einzelnen Gütern feste Preise zu. Diese Preise werden in [21] als Preiserwartungen aufgefasst. Es wird vorausgesetzt, dass die Teilnehmer in den Preiserwartungen übereinstimmen. Die Preiserwartungen bestimmen die Pläne betreffend Angebot und Nachfrage auf den zukünftigen Märkten.
Ein Gleichgewicht existiert, falls es Preise und Preiserwartungen gibt, so dass einerseits im Zeitintervall 1 der Markt geräumt wird und andererseits die Pläne der Teilnehmer für die zukünftigen Märkte aufeinander abgestimmt sind.

Mit dem Existenzbeweis gelingt Radner eine wertvolle Verallgemeinerung der Theorie von Arrow/Debreu. Die in [21] eingeführten Preiserwartungen unterscheiden sich allerdings formal nicht von wirklichen Preisen.

2.2. Anwendung der (μ, σ)-Analyse auf den Kapitalmarkt

Ein spezielles Problem betrachten Allais [1], Lintner [15], Mossin [17] und Sharpe [24].
Sie untersuchen einen Tauschmarkt mit Wertschriften.
Hinsichtlich der zukünftigen Preise herrscht Unsicherheit. Die Preiserwartungen der Marktteilnehmer sind durch Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen gegeben. Jeder Teilnehmer entscheidet sich für ein Portefeuille, das seine Zielfunktion maximiert. Die Zielfunktion hängt nur von Erwartungswert und Varianz des Portefeuilles ab [4]. So erhält man in der Gegenwart Angebot und Nachfrage. In den erwähnten Arbeiten wird die Existenz eines Gleichgewichts nachgewiesen und dessen Eigenschaften untersucht.
Die erste Arbeit [1] wurde von Allais verfasst. Der Ansatz ist sehr einfach, lässt jedoch neben Risikoaversion auch Risikopräferenz zu. Allais rechtfertigt sein einfaches Modell mit der Übersichtlichkeit von Problemstellung und Lösungsmethoden.
Die nächste Arbeit stammt von Sharpe [24].
Mossin [17] präzisiert Sharpes Ansatz. Neben der Risikoaversion setzt Mossin auch voraus, dass alle Teilnehmer gleiche Preiserwartungen haben. Schliesslich lässt Lintner [15] unterschiedliche Preiserwartungen zu, verwendet aber sehr spezielle Zielfunktionen.
Der Vorteil dieser Arbeiten besteht darin, dass über das Gleichgewicht recht viel ausgesagt werden kann. Dem stehen jedoch folgende Nachteile gegenüber:

1. Eine Beurteilung, die nur von Erwartungswert und Varianz abhängt, ist unbefriedigend.
   Samuelson untersucht in [23], inwieweit sich die (μ, σ)-Analyse als Approximation für die Neumannsche Nutzentheorie eignet. Die Approximation erweist sich als nicht besonders gut.
   Weiter untersuchen Cass und Stiglitz [9] den Einfluss von Vermögenseffekten auf das optimale Portefeuille. Aus ihrer Arbeit wird ersichtlich, dass sich das Sicherheitsäquivalent [5] zur Charakterisierung eines Portefeuilles wesentlich besser eignet als Erwartungswert und Varianz.

[4] Das entspricht dem Ansatz von Markowitz.
[5] Geldmenge, aus der der gleiche Nutzen resultiert wie aus dem Portefeuille.

2. Die Arbeiten [1], [15] und [17] berücksichtigen den Einfluss der gegenwärtigen Preise auf die Preiserwartungen nicht. (Vgl. Einleitung)

2.3. Vergleich des vorgeschlagenen Modells mit der Literatur

Ähnlich wie Allais, Lintner und Mossin untersuche ich einen Tauschmarkt mit Spekulationsgütern. Aber anstelle der (μ, σ)-Analyse verwende ich Neumannsche Nutzenfunktionen. Zudem sind die Preiserwartungen durch subjektive Wahrscheinlichkeiten gegeben, die von den gegenwärtigen Preisen abhängig sind (vgl. Einleitung).
Ein solches Modell ist natürlich weniger allgemein als die grundlegenden Arbeiten von Arrow, Debreu und Radner. Dafür kann auf abstrakte Konstruktionen verzichtet werden (vgl. 2.1.: Die Verfügbarkeit eines Gutes hängt vom Zustand der Natur ab).
Ein wesentlicher Unterschied besteht hinsichtlich der Preiserwartungen. In [21] wird verlangt:
- Die Teilnehmer haben gemeinsame Preiserwartungen («common expectations»). Gleichen zukünftigen Ereignissen ordnen alle Teilnehmer gleiche Preise zu [6].
- Im Gleichgewicht realisieren sich die Preiserwartungen; d. h. die Pläne für die Zukunft müssen aufeinander abgestimmt sein.
- Es besteht kein direkter Zusammenhang zwischen Preisen und Preiserwartungen.

Mein Vorschlag sieht vor:
- Hinsichtlich der Preiserwartungen braucht es keine Übereinstimmung.
- Das Gleichgewicht umfasst nur Angebot und Nachfrage im Zeitpunkt 1 [7].
- Die Preiserwartungen sind von den gegenwärtigen Preisen abhängig.

[6] Die Teilnehmer dürfen den Ereignissen allerdings unterschiedliche subjektive Wahrscheinlichkeiten zuordnen.
[7] Obwohl die Märkte interdependent sind, kann ich mir keinen Mechanismus vorstellen, der Angebot und Nachfrage auf einem zukünftigen Markt bereits in der Gegenwart zum Gleichgewicht bringt. Deshalb beschränke ich mich auf ein Gleichgewicht für den Zeitpunkt 1. (Der Terminmarkt ist ein gegenwärtiger Markt mit Gütern, die erst in der Zukunft verfügbar sind.)

3. Das Modell

3.1. Zeit, Güter, Marktteilnehmer

Die Zeitpunkte 1 (Gegenwart) und 2 (Zukunft) kommen im Modell vor. Auf dem Markt gibt es $m+1$ Güter ($h = 0, ..., m$).

- Das Gut 0 ist das Geld und dient als Werteinheit.
- Die Güter $h = 1, ..., m$ sind Spekulationsgüter.
  Beispiele: Aktien, Liegenschaften, Rohstofflager, Boden, fremde Währungen usw.

Es gibt n Marktteilnehmer [8] ($i = 1, ..., n$).
Beispiele: Investmentfonds, Banken, Versicherungen, Vermögensverwalter. Die Teilnehmer verwalten Portefeuilles. Innerhalb des Modells findet kein Konsum statt.

3.2. Das Preissystem

Das Preissystem im Zeitpunkt 1 bezeichnen wir mit

$$\underline{P} := (P_0, P_1, ..., P_m). \tag{1}$$

P_h ist der Preis des Gutes h ($h = 0, ..., m$).
Dabei gilt:
$\underline{P} \geqslant \underline{0}$ [9] (Negative Preise treten nicht auf.)
$P_0 = 1$ (Der Preis des Geldes ist 1.)
Das heisst

$$\underline{P} \in \Omega_1 \text{, wobei } \Omega_1 := \{(1, y_1, ..., y_m) \mid y_h \geqslant 0, h = 1, ..., m\}. \tag{2}$$

Kein Teilnehmer ist in der Lage das Preissystem $\underline{P}$ zu beeinflussen. Es herrscht vollständige Konkurrenz.

3.3. Die Preiserwartungen

Das Gut h wirft zwischen den Zeitpunkten 1 und 2 einen Ertrag ab. Es ist zweckmässig, zum effektiven Preis des Gutes h im Zeitpunkt 2 diesen Ertrag zu addieren.

[8] Im folgenden wird nur noch von Teilnehmern gesprochen.
[9] $\underline{a} \geqslant \underline{b}$ bedeutet $a_i \geqslant b_i$ für alle i,
$\underline{a} \geqslant \underline{b}$ bedeutet $a_i \geqslant b_i$ für alle i, $a_{i_0} > b_{i_0}$ für mindestens ein i_0,
$\underline{a} > \underline{b}$ bedeutet $a_i > b_i$ für alle i.

Beispiele:
Preis einer Aktie im Zeitpunkt 2 = Aktienkurs plus Dividende.
Preis des Geldes im Zeitpunkt 2 = effektiver Geldpreis (= 1) plus Zins.
Nun betrachten wir das Preissystem im Zeitpunkt 2

$$\underline{\pi} := (\pi_0, \ldots, \pi_m). \tag{3}$$

Der Zinssatz für das Geld ist extern gegeben und beträgt α ($\alpha > -1$).
Somit gilt

$$\pi_0 = 1 + \alpha^{10}. \tag{4}$$

Auch im Zeitpunkt 2 sollen keine negativen Preise auftreten.

$$\underline{\pi} \in \Omega_2, \text{ wobei } \Omega_2 := \{(1 + \alpha, y_1, \ldots, y_m) \mid y_h \geqslant 0, h = 1, \ldots, m\}. \tag{5}$$

Wie schon erwähnt, kennen die Teilnehmer im Zeitpunkt 1 $\underline{\pi}$ noch nicht. Wenn $\underline{P}$ gegeben ist, betrachtet der Teilnehmer i das Preissystem im Zeitpunkt 2 als Zufallsgrösse $\underline{\pi}^i$.
Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmass F^i hängt von $\underline{P}$ ab.
$\underline{\pi}^i$ ist also gegeben durch $F^i(\cdot\,;\underline{P})$, wobei $F^i(\cdot\,;\underline{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf Ω_2 ist.
Im folgenden sprechen wir von Preiserwartungen.

3.4. Das Portefeuille

Ursprünglich verfügt der Teilnehmer i über bestimmte Anteile an den Gütern.

$$\underline{r}^i := (r_0^i, \ldots, r_m^i). \tag{6}$$

r_h^i ist der Anteil des Teilnehmers i am Gut h ($i = 1, \ldots, n$; $h = 0, \ldots, m$).
Dabei verlangen wir

$$r_h^i \geqslant 0 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_h^i = 1. \text{ (Die total verfügbare Menge jedes Gutes ist auf 1 normiert.)} \tag{8}$$

Im Zeitpunkt 1 bringt der Teilnehmer i seine ursprünglichen Anteile auf den Markt und will sich ein neues Portefeuille $\underline{\rho}^i$ erwerben.

[10] α entspricht dem direkten Zinsertrag und nicht den «opportunity costs». Je nachdem wie wir das Geld definieren, ergeben sich folgende Möglichkeiten:
$\alpha = 0$ bei Bargeld
$\alpha > 0$ bei Sichteinlagen
$\alpha < 0$ bei Schwundgeld

$$\rho^i := (\rho_0^i, \ldots, \rho_m^i), \text{ wobei } \rho_h^i \geqslant 0 \; (h = 0, \ldots, m). \tag{9}$$

Schulden und Leerverkäufe sind also nicht zugelassen.

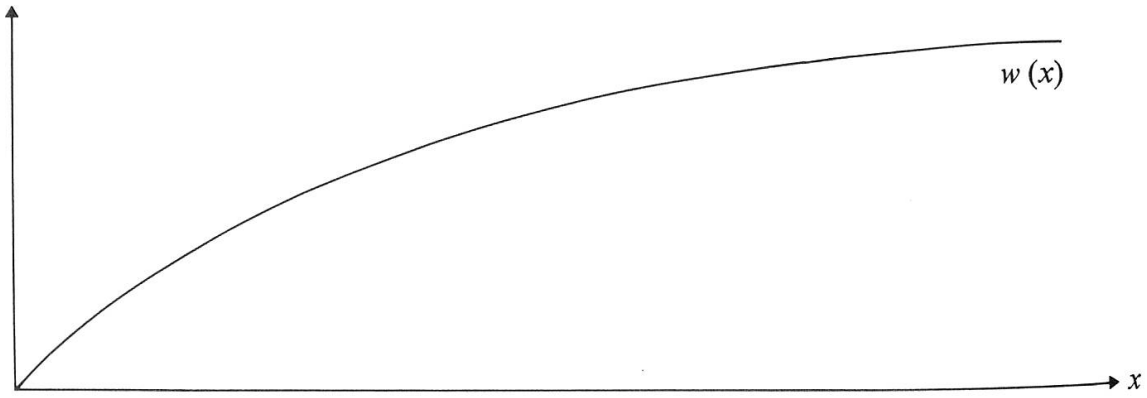
3.5. Die Zielfunktion

Der Teilnehmer i bewertet sein Vermögen im Zeitpunkt 2 (zukünftiges Vermögen) mit einer Neumannschen Nutzenfunktion w^i.
w^i soll folgende Eigenschaften erfüllen:
Ⓐ $w^i: [0, \infty) \to [0, \infty)$

- strikt monoton wachsend (A. 1)
- konkav [11] (A. 2)
- stetig [12] (A. 3)
- beschränkt (A. 4)

Die strikte Monotonie (A. 1) bedeutet, dass keine Sättigung auftritt. Die Konkavität (A. 2) schliesst Risikopräferenz aus.
Auf den ersten Blick scheint die Beschränktheit (A. 4) eine sehr starke Voraussetzung zu sein. Aber unbeschränkte Nutzenfunktionen führen zu Situationen, die dem Petersburger Paradox entsprechen (vgl. Arrow [2], [4]).
Beispiel für eine Nutzenfunktion: $w(x) = 1 - e^{-x}$:

Figur 1



Das Vermögen des Teilnehmers i im Zeitpunkt 2 beträgt

$$\underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i \text{ [13]}. \tag{10}$$

[11] Für $t \varepsilon [0,1]$ gilt $w^i(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tw^i(x_1) + (1-t)w^i(x_2)$.

[12] Wegen (A. 2) genügt es, Stetigkeit im Nullpunkt zu verlangen.

[13] $\underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i := \sum_{h=0}^{m} \pi_h^i \rho_h^i$.

Ist $\underline{P}$ gegeben, so lautet die Zielfunktion

$$G_i(\underline{\rho}^i; \underline{P}) := \int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}^i)\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}). \tag{11}$$

Der Teilnehmer i versucht G_i zu maximieren.
Bei der Wahl von $\underline{\rho}^i$ muss er die Budgetungleichung

$$\underline{P} * \underline{\rho}^i \leqslant \underline{P} * \underline{r}^i \tag{12}$$

beachten [14].

3.6. *Angebot und Nachfrage*

Das Angebot des Teilnehmers i beträgt $\underline{r}^i$ (vgl. 3.4.).
Die Nachfrage hängt von $\underline{P}$ ab.
Bei gegebenem $\underline{P}$ erfüllt ein Nachfragevektor $\underline{\rho}^i(\underline{P})$ folgende Bedingungen:

1) $\underline{\rho}^i(\underline{P}) \geqslant \underline{0}$. (13)

2) $\underline{P} * (\underline{\rho}^i(\underline{P}) - \underline{r}^i) \leqslant 0$ (Budgetungleichung). (14)

3) $G_i(\underline{\rho}^i(\underline{P}); \underline{P}) = \max \{G_i(\underline{\rho}^i; \underline{P}) \mid \underline{\rho}^i$ erfüllt (13), (14)$\}$ (Optimierung). (15)

Der Nachfrageüberhang [15] des Teilnehmers i ist gegeben durch

$$\underline{N}^i(\underline{P}) := \{\underline{\rho}^i(\underline{P}) - \underline{r}^i \mid \underline{\rho}^i(\underline{P}) \text{ erfüllt (13), (14), (15)}\}. \tag{16}$$

Schliesslich erhalten wir den gesamten Nachfrageüberhang

$$\begin{aligned} \underline{N}(\underline{P}) &:= \sum_{i=1}^{n} \underline{N}^i(\underline{P}) \\ \underline{N}: \Omega_1 &\to [-1, \infty)^{m+1}. \end{aligned} \tag{17}$$

4. Das Gleichgewicht

4.1. *Definition des Gleichgewichts*

Eine Tauschökonomie ε ist bestimmt durch
– die ursprünglichen Anteile der Teilnehmer

$$\underline{r}^i \quad i = 1, \ldots, n \qquad (\underline{r}^i \geqslant \underline{0}, \ \sum_{i=1}^{n} \underline{r}^i = (1, 1, \ldots, 1)),$$

[14] In (12) wird immer Gleichheit auftreten (wegen A. 1).
[15] Im allgemeinen handelt es sich um eine Korrespondenz.

– den externen Zinssatz für das Geld a ($a > -1$),
– die Preiserwartungen

$$F^i(\cdot\,;\underline{P}) \qquad \underline{P} \in \Omega_1, \qquad i = 1, \ldots, n$$

(Wahrscheinlichkeitsmasse auf Ω_2),
– die Nutzenfunktionen

$$w^i \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\varepsilon = (\underline{r}^1, \ldots, \underline{r}^n, a, F^1(\cdot\,;\underline{P}), \ldots, F^n(\cdot\,;\underline{P}), w^1, \ldots, w^n). \tag{18}$$

Definition: Das Tupel $(\underline{\rho}^{*1}, \ldots, \underline{\rho}^{*n}, \underline{P}^*)$ ist ein Gleichgewicht von ε, falls

1a) $\underline{\rho}^{*i} \geqslant \underline{0} \qquad i = 1, \ldots, n,$ (19)

1b) $\underline{P}^* * (\underline{\rho}^{*i} - \underline{r}^i) \leqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, n,$ (20)

1c) $\int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}^{*i})\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}^*) \geqslant \int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}^i)\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}^*)$ (21)

für alle $\underline{\rho}^i$, die (19), (20) erfüllen.

2) $\sum_{i=1}^{n} \underline{\rho}^{*i} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}^i.$ (22)

(P^* ist also genau dann ein Gleichgewicht, wenn $\underline{0} \in \underline{N}(\underline{P}^*)$). (23)
Gelegentlich braucht man noch einen weiteren Begriff.
Definition: Das Tupel $(\underline{\rho}^1, \ldots, \underline{\rho}^n)$ heisst erreichbarer Zustand der Tauschökonomie $\varepsilon = (\underline{r}^i, a, F^i, w^i)$, falls

– $\underline{\rho}^i \geqslant \underline{0} \quad i = 1, \ldots, n$ (24)

– $\sum_{i=1}^{n} \underline{\rho}^i = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}^i.$ (25)

4.2. Voraussetzungen für die Existenz eines Gleichgewichts

In 3.5. wurden bereits die Voraussetzungen (A. 1) – (A. 4) über die Nutzenfunktionen w^i eingeführt. Für die Existenz eines Gleichgewichts sind zusätzliche Voraussetzungen nötig.
Kleine Änderungen der gegenwärtigen Preise sollen nur kleine Änderungen der Preiserwartungen zur Folge haben. Exakt formuliert heisst das

Ⓑ $$\underline{P} \longrightarrow \underline{\bar{P}} \Longrightarrow F^i(\cdot\,;\underline{P}) \xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{schwache}} F^i(\cdot\,;\underline{\bar{P}}). \tag{26}$$

Nicht alle Preiserwartungen führen zu einem Gleichgewicht. Ist der externe Zinssatz a klein und setzen die Teilnehmer voraus:
gleichgültig wie hoch die Preise für die Spekulationsgüter im Zeitpunkt 1 sind, bis zum Zeitpunkt 2 werden sie sich mindestens verdoppeln,
dann kann sich kein Gleichgewicht einstellen.
Damit ein Gleichgewicht existiert, ist ein gewisses Vertrauen ins Geld erforderlich. Wir nehmen deshalb folgendes Verhalten an [16]:
Ist der Preis $P_{\tilde{h}}$ eines Spekulationsgutes $\tilde{h}$ sehr hoch, so halten alle Teilnehmer ein Absinken des Preises für wahrscheinlich. Trotzdem kann es sich lohnen, das Gut $\tilde{h}$ zu erwerben. Die Preiserwartungen für das Gut $\tilde{h}$ können z. B. mit den übrigen Preiserwartungen negativ korreliert sein. Ein Versicherungseffekt stellt sich ein. Bei einem genügend hohen Preis $P_{\tilde{h}}$ überwiegt jedoch die Gefahr eines Preisrückgangs den Versicherungseffekt.
Schliesslich ergibt sich folgende Situation:
Es lohnt sich nicht, ein Portefeuille $\underline{\rho}$ zu erwerben, falls der Preis $P_{\tilde{h}}$ eines Spekulationsgutes $\tilde{h}$ *extrem* hoch ist und der Anteil $\rho_{\tilde{h}}$ ins Gewicht fällt. Eine reine Geldanlage ist vorteilhafter.
Für die Preiserwartungen der Teilnehmer muss deshalb gelten:

© [17] Es gibt ein $c > 0$ mit folgender Eigenschaft:
Falls ein $\tilde{h} \in \{1, ..., m\}$ existiert, so dass

$$1)\ P_{\tilde{h}} > c, \tag{27}$$

$$2)\ \frac{\rho_{\tilde{h}}}{\sum_{h=1}^{m} \rho_h} \geqslant \frac{1}{m}, \text{ wobei } \rho_h \geqslant 0,\ \sum_{h=1}^{m} \rho_h > 0, \tag{28}$$

dann folgt

$$\int (\underline{\pi} * \underline{\rho})\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) < (1+a)\, \underline{P} * \underline{\rho} \quad (i = 1, ..., n). \tag{29}$$

[16] Die Überlegungen entsprechen weitgehend der Argumentation von Keynes.
[17] Interpretation von ©:
(27) Der Preis des Spekulationsgutes $\tilde{h}$ ist extrem hoch.
(28) Der Anteil $\rho_{\tilde{h}}$ fällt ins Gewicht.
(29) Das erwartete Vermögen im Zeitpunkt 2 ist grösser, wenn man sich nicht für das Portefeuille $\rho = (\rho_0, ..., \rho_m)$ sondern für die reine Geldanlage $(\underline{P} * \rho, 0, ..., 0)$ entscheidet.

Die vierte und letzte Voraussetzung lautet:

Ⓓ $r_0^i > 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$ (30)

D.h. jeder Teilnehmer verfügt über einen positiven Geldbetrag.

4.3. Existenz eines Gleichgewichts

Satz 1: Die Tauschökonomie $\varepsilon = (\underline{r}^i, a, F^i(\cdot\,; \underline{P}), w^i)$ besitzt ein Gleichgewicht $(\underline{p}^{*i}, \underline{P}^*)$, falls

Ⓐ w^i ist strikt monoton wachsend, konkav, stetig und beschränkt.

Ⓑ $$\underline{P} \longrightarrow \bar{\underline{P}} \Longrightarrow F^i(\cdot\,; \underline{P}) \xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{schwache}} F^i(\cdot\,; \bar{\underline{P}}).$$

© Es gibt ein $c > 0$ mit der Eigenschaft:
Falls ein $\tilde{h} \in \{1, \ldots, m\}$ existiert, so dass

1) $P_{\tilde{h}} > c$

2) $\dfrac{\rho_{\tilde{h}}}{\sum_{h=1}^{m} \rho_h} \gtreqless \dfrac{1}{m}$, wobei $\rho_h \gtreqless 0$, $\sum_{h=1}^{m} \rho_h > 0$,

dann folgt

$$\int (\underline{\pi} * \underline{\rho})\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) < (1 + a)\, \underline{P} * \underline{\rho}.$$

$$\text{Ⓓ}\ r_0^i > 0.$$

Beweis: siehe Anhang.

4.4. Beschränkte Information

Bei praktischen Anwendungen kennt ein Teilnehmer im allgemeinen nicht alle Spekulationsgüter. Das lässt sich im Modell sehr einfach berücksichtigen. $\underline{\pi}^i$ sei die Preiserwartung des Teilnehmers i (gegeben durch $F^i(\cdot\,; \underline{P})$). Kennt der Teilnehmer i das Gut h nicht, so setzt man

$$\pi_h^i = 0 \quad \text{f.s.} \quad (\text{bezüglich } F^i(\cdot\,; \underline{P})).$$

5. Optimalitätseigenschaften des Gleichgewichts

Im untersuchten Modell hat das Preissystem $\underline{P}$ zwei Eigenschaften:

a) $\underline{P}$ tritt in der Budgetungleichung (12) auf und beeinflusst damit die Teilnehmer bei der Wahl ihrer Portefeuilles $\underline{\rho}^i$.

b) Weil die Preiserwartungen von $\underline{P}$ abhängig sind, geht $\underline{P}$ auch in die Zielfunktionen

$$G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) := \int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho})\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P})$$

ein. Die Präferenzen sind also von $\underline{P}$ abhängig.

Wir können nicht von Pareto-Optimalität im üblichen Sinne sprechen. Ist $(\underline{\rho}^{*1}, \ldots, \underline{\rho}^{*n}, \underline{P}^*)$ ein Gleichgewicht von ε, so stellt sich aber die Frage:
Gibt es einen erreichbaren Zustand $(\hat{\underline{\rho}}^1, \ldots, \hat{\underline{\rho}}^n)$ von ε, der die individuellen Budgetungleichungen (Eigenschaft a)) nicht erfüllen muss, so dass

$$G_i(\hat{\underline{\rho}}^i; \underline{P}^*) \geqslant G_i(\underline{\rho}^{*i}; \underline{P}^*) \quad i = 1, \ldots, n \tag{31}$$

$$G_{i0}(\hat{\underline{\rho}}^{i0}; \underline{P}^*) > G_{i0}(\underline{\rho}^{*i0}; \underline{P}^*) \quad \text{für ein } i_0 \in \{1, \ldots, n\}. \tag{32}$$

Definition: Die Tauschökonomie $\varepsilon = (\underline{r}^i, a, F^i, w^i)$ sei gegeben. Das Tupel $(\tilde{\underline{\rho}}^1, \ldots, \tilde{\underline{\rho}}^n, \tilde{\underline{P}})$ bestehend aus dem erreichbaren Zustand$(\tilde{\underline{\rho}}^1, \ldots, \hat{\underline{\rho}}^n)$ von ε und dem Preissystem $\tilde{\underline{P}}$ ist ein bedingtes Pareto-Optimum, falls es keinen erreichbaren Zustand $(\underline{\rho}^1, \ldots, \underline{\rho}^n)$ gibt, so dass

$$G_i(\underline{\rho}^i; \tilde{\underline{P}}) \geqslant G_i(\tilde{\underline{\rho}}^i; \tilde{\underline{P}}) \quad i = 1, \ldots, n \tag{33}$$

$$G_{i0}(\underline{\rho}^{i0}; \tilde{\underline{P}}) > G_{i0}(\tilde{\underline{\rho}}^{i0}; \tilde{\underline{P}}) \quad \text{für ein } i_0 \in \{1, \ldots, n\} \tag{34}$$

(vgl.: Arrow, Hahn [5], pp. 129–131).

Satz 2: Gegeben sei die Tauschökonomie $\varepsilon = (\underline{r}^i, a, F^i, w^i)$. Falls die Nutzenfunktionen w^i strikt monoton wachsend und beschränkt sind, so ist jedes Gleichgewicht $(\underline{\rho}^{*1}, \ldots, \underline{\rho}^{*n}, \underline{P}^*)$ von ε ein bedingtes Pareto-Optimum.

Beweis: siehe Anhang.

6. Eigenschaften der Nachfragekorrespondenz

6.1. Eindeutigkeit

Satz 3: Für $\underline{P} > \underline{0}$ kann der Nachfrageüberhang des Teilnehmers i durch eine Funktion $\underline{N}^i(\underline{P})$ dargestellt werden, falls

1) w^i ist strikt monoton wachsend, strikt konkav, stetig und beschränkt,

2) $\underline{P} * \underline{\rho}^i_1 = \underline{P} * \underline{\rho}^i_2$, wobei $\underline{\rho}^i_1 \neq \underline{\rho}^i_2$, $\underline{P} > \underline{0}$

$$\Longrightarrow \underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i_1 \neq \underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i_2 \text{ mit positiver Wahrscheinlichkeit.} \tag{35}$$

Beweis: siehe Anhang.

Interpretation von 2):

Kosten zwei verschiedene Portefeuilles $\underline{\rho}^i_1$ und $\underline{\rho}^i_2$ in der Gegenwart gleich viel

$$\underline{P} * \underline{\rho}^i_1 = \underline{P} * \underline{\rho}^i_2, \tag{36}$$

so unterscheiden sich die Zufallsgrössen $\underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i_1$ und $\underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i_2$, die das zukünftige Vermögen darstellen.

6.2. Stetigkeit

Satz 4:

Voraussetzung:

1) Die Bedingungen Ⓐ, Ⓑ, Ⓓ des Existenzsatzes sind erfüllt.

2) w^i ist strikt konkav.

3) $\underline{P} * \underline{\rho}^i_1 = \underline{P} * \underline{\rho}^i_2$, wobei $\underline{\rho}^i_1 \neq \underline{\rho}^i_2$, $\underline{P} \geqslant \underline{0}$

$\Longrightarrow \underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i_1 \neq \underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i_2$ mit positiver Wahrscheinlichkeit.

Behauptung:

- Für $\underline{P} > \underline{0}$ ist $\underline{N}^i(\underline{P})$ eine stetige Funktion.
- Existiert ein $\tilde{h} \in \{1, ..., m\}$ mit $P_{\tilde{h}} = 0$, so folgt

$$\lim_{\underline{P}^\nu \to \underline{P}} \sum_{h=0}^{m} N_h^i(\underline{P}^\nu) = \infty. \tag{37}$$

Beweis: siehe Anhang.

6.3. Differenzierbarkeit

$\underline{N}^i$ ist auch unter Regularitätsbedingungen nicht für alle $\underline{P} > \underline{0}$ differenzierbar. Der Grund liegt beim Verbot vor Leerverkäufen.

Um die Situation näher zu untersuchen, verlangen wir:

1) w^i ist strikt monoton wachsend, zweimal stetig differenzierbar und es gilt $w^{i''} < 0$.
2) Zu jedem $\underline{P} > \underline{0}$ existiert eine Umgebung $U_\delta := \{\underline{P}' > \underline{0} \mid \| \underline{P}' - \underline{P} \| < \delta\}$ und ein kompakter Bereich K von Ω_2, so dass für alle $\underline{P}' \in U_\delta$ gilt:
   Die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse von $F^i(\cdot\,;\underline{P})$ liegt in K.
3) $F^i(\cdot\,;\underline{P})$ ist durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f^i(\underline{\pi}\,;\underline{P})$ gegeben [18].
   $f^i(\underline{\pi};\underline{P})$ ist in $\underline{P}$ stetig differenzierbar und die Ableitungen
   $\dfrac{\partial f^i}{\partial P_h}(\underline{\pi};\underline{P})$ sind auf $\Omega_2 \times \Omega_1$ beschränkt.
4) $\underline{P} * \underline{\rho}_1^i = \underline{P} * \underline{\rho}_2^i$, wobei $\underline{\rho}_1^i \neq \underline{\rho}_2^i$, $\underline{P} > \underline{0}$
   $\Longrightarrow \underline{\pi}^i * \underline{\rho}_1^i \neq \underline{\pi}^i * \underline{\rho}_2^i$ mit positiver Wahrscheinlichkeit.

Daraus erhält man

Lemma 1: Unter den Voraussetzungen 1)-4) ist $\underline{N}^i$ für $\underline{P} > \underline{0}$ eindeutig und stetig.

Nun betrachten wir die Zielfunktionen

$$G_i(\underline{\rho};\underline{P}) := \int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho})\, dF^i(\underline{\pi};\underline{P}). \tag{38}$$

Lemma 2: Die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial G_i}{\partial \rho_h}$, $\dfrac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_h\, \partial \rho_l}$, $\dfrac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_h\, \partial P_l}$ existieren und sind in $(\underline{\rho}, \underline{P})$ stetig.

Es gilt:

$$\frac{\partial G_i}{\partial \rho_h}(\underline{\rho};\underline{P}) = \int w^{i'}(\underline{\pi} * \underline{\rho})\, \pi_h\, dF^i(\underline{\pi};\underline{P}) \tag{39}$$

$$h = 0, \ldots, m$$

$$\frac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_h\, \partial \rho_l}(\underline{\rho};\underline{P}) = \int w^{i''}(\underline{\pi} * \underline{\rho})\pi_l \pi_h\, dF^i(\underline{\pi};\underline{P}) \tag{40}$$

$$h = 0, \ldots, m$$
$$l = 0, \ldots, m$$

$$\frac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_h\, \partial P_l}(\underline{\rho};\underline{P}) = \int w^{i'}(\underline{\pi} * \underline{\rho})\pi_h \frac{\partial f^i}{\partial P_l}(\underline{\pi};\underline{P})\, d\mu \tag{41}$$

$$h = 0, \ldots, m$$
$$l = 1, \ldots, m.$$

[18] f^i ist die Dichte bezüglich dem Lebesgue-Mass μ.

Folglich ist $\frac{\partial G_i}{\partial \rho_h}$ $(h = 0, ..., m)$ in $(\rho_0, ..., \rho_m, P_1, ..., P_m)$ stetig differenzierbar.

Die Kuhn/Tucker-Bedingungen für das Problem

$$\underline{\rho}^i(\underline{P}) \geqslant \underline{0} \tag{13}$$

$$\underline{P} * (\underline{\rho}^i(\underline{P}) - \underline{r}^i) = 0 \tag{14}$$

$$G_i(\underline{\rho}^i(\underline{P}); \underline{P}) = \max\{G(\underline{\rho}; \underline{P}) \mid \underline{\rho} \text{ erfüllt (13), (14)}\} \tag{15}$$

lauten[19]:

$$\Phi_h(\underline{\rho}, \lambda, \underline{P}) := \frac{\partial G_i}{\partial \rho_h}(\underline{\rho}; \underline{P}) + \lambda P_h = 0, \text{ falls } \rho_h > 0 \qquad h = 0, ..., m \tag{42}$$

$$\Phi_h(\underline{\rho}, \lambda, \underline{P}) := \frac{\partial G_i}{\partial \rho_h}(\underline{\rho}; \underline{P}) + \lambda P_h \leqslant 0, \text{ falls } \rho_h = 0 \qquad h = 0, ..., m \tag{43}$$

$$\Phi_{m+1}(\underline{\rho}, \lambda, \underline{P}) := \underline{P} * (\underline{\rho} - \underline{r}^i) = 0. \tag{44}$$

Für $\underline{P} > \underline{0}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a) $$\rho_{\tilde{h}}^i(\underline{P}) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial G_i}{\partial \rho_{\tilde{h}}}(\underline{\rho}^i(\underline{P}); \underline{P}) + \lambda P_{\tilde{h}} < 0 \qquad \tilde{h} \in \{0, ..., m\}. \tag{45}$$

Interpretation: Der Grenznutzen pro Geldeinheit ist bei den nicht nachgefragten Gütern kleiner als bei den nachgefragten Gütern.
Mit dem Theorem von der impliziten Funktion erhält man

Satz 5: $\underline{\rho}^i(\underline{P})$ ist in $\underline{P} > \underline{0}$ differenzierbar, falls die Bedingung a) erfüllt ist.

b) Es existiert $\tilde{h} \in \{0, ..., m\}$, so dass

$$\rho_{\tilde{h}}^i(\underline{P}) = 0 \tag{46}$$

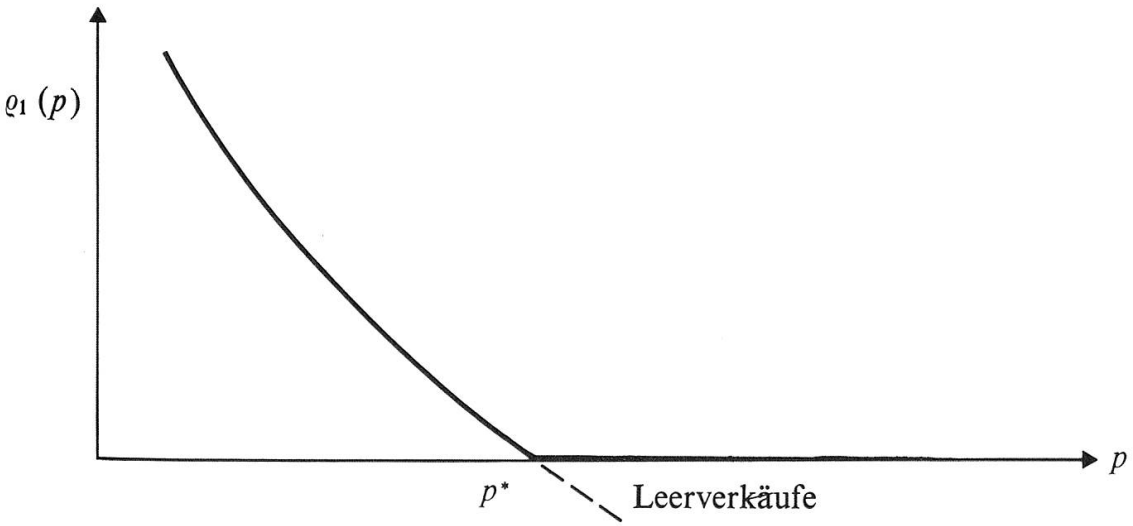
$$\frac{\partial G_i}{\partial \rho_{\tilde{h}}}(\underline{\rho}^i(\underline{P}); \underline{P}) + \lambda P_{\tilde{h}} = 0. \tag{47}$$

Interpretation: Es gibt ein nicht nachgefragtes Gut, das den gleichen Grenznutzen pro Geldeinheit hat wie die nachgefragten Güter.

[19] Die Anwendbarkeit des Kuhn/Tucker-Theorems wird im Anhang untersucht.

Tritt dieser Fall auf, so weist man leicht nach, dass $\underline{N}^i$ in $\underline{P}$ nicht differenzierbar sein muss.
Das nachfolgende Beispiel illustriert die Situation, falls b) auftritt.
Beispiel: $m = 1$.
1 ist der Geldpreis.
p ist der Preis des Spekulationsgutes.
$\rho_1\ (p)$ ist die Nachfrage nach dem Spekulationsgut.

Figur 2



Das Verbot von Leerverkäufen kann also die Differenzierbarkeit verunmöglichen.
Die Eigenschaften der Nachfrage werden auch in den Arbeiten [7], [13], [14] untersucht.

7. Stabilität im Falle eines Spekulationsgutes (m = 1)

7.1. Systemstabilität

Wir setzen an

$$\underline{P} = (1, p) \quad 0 \leqslant p < \infty \tag{48}$$

$$\underline{N}(\underline{P}) = (z_0\ (p), z_1\ (p)). \tag{49}$$

Die Voraussetzungen Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ, Ⓓ des Existenzsatzes seien erfüllt.

Weiter gelte:

– Die Nutzenfunktionen w^i sind strikt konkav.

– $\underline{\pi}^i \neq (1 + a, [1 + a]\, p)$ mit positiver Wahrscheinlichkeit ($i = 1, \ldots, n$). (50)

Aus Satz 4 folgt:

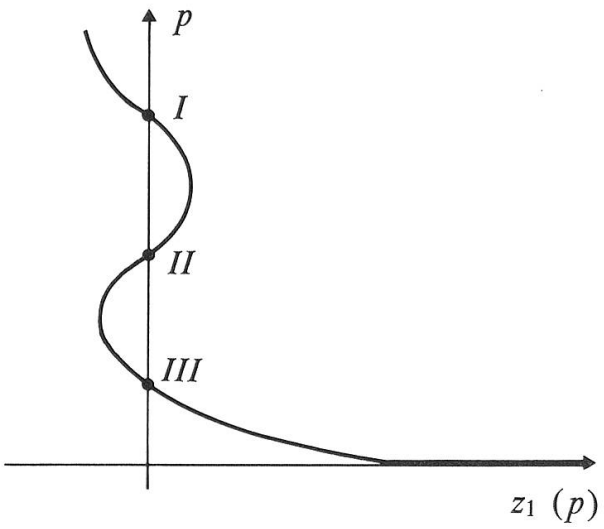
– $z_0(p)$, $z_1(p)$ sind für $p > 0$ stetige Funktionen. (51)

– $\lim\limits_{p \downarrow 0} z_1(p) = \infty$. (52)

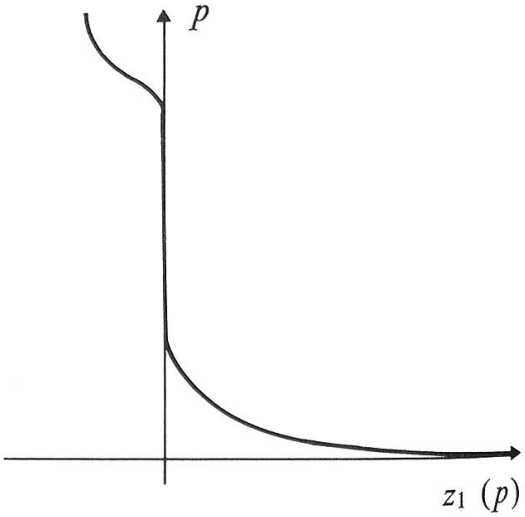
Wegen Voraussetzung © existiert ein $c > 0$, so dass

$z_1(p) < 0$, falls $p > c$. (53)

Figur 3



Figur 4



Die Figuren 3 und 4 stellen den möglichen Verlauf von $z_1(p)$ dar.
Um die Stabilität zu untersuchen, führen wir einen Preismechanismus ein.

$$\frac{dp}{dt} = g\big(z_1(p)\big) . \tag{54}$$

Die Funktion g ist stetig, strikt monoton wachsend und erhält das Vorzeichen.

Für $\tilde{p} > 0$ sei $\psi(t; \tilde{p})$ eine Lösung von (54) mit $\psi(0; \tilde{p}) = \tilde{p}$ [20].

[20] $\psi(t; \tilde{p})$ existiert, weil $g \circ z_1$ stetig ist. ψ braucht aber nicht eindeutig zu sein, da $g \circ z_1$ keine Lipschitzbedingung erfüllen muss.

Definition: $\bar{p}$ ist ein Gleichgewichtspreis, falls $z_1(\bar{p}) = 0$ [21].

$$E: = \{\bar{p} \mid z_1(\bar{p}) = 0\} \text{ ist die Menge der Gleichgewichtspreise.} \tag{55}$$

Definition: Der Gleichgewichtspreis $\bar{p}$ ist stabil, falls für alle p aus einer Umgebung U von $\bar{p}$ (und für alle möglichen ψ) gilt

$$\lim_{t \to \infty} \psi(t; p) = \bar{p}. \tag{56}$$

Definition: Das System (54) ist global stabil, falls für jedes $\tilde{p} > 0$ (und für alle möglichen ψ) gilt

$$\lim_{t \to \infty} \psi(t; \tilde{p}) \in E.$$

Satz 6: Unter den gemachten Voraussetzungen ist das System (54) global stabil. Die Stabilität für $m = 1$ wird auch in [5] und [6] behandelt. Bei der Herleitung von Satz 6 müssen jedoch die speziellen Eigenschaften des untersuchten Modells verwendet werden.

7.2. Beispiel für einen instabilen Gleichgewichtspreis

Die Terminologie und die Voraussetzungen von 6.3. werden benützt.

$$(\underline{P} = (1, p), \underline{\pi} = (1 + a, \pi))$$

$\underline{P}^* = (1, p^*)$ sei ein Gleichgewichtspreissystem mit

$$\underline{\rho}^i(\underline{P}^*) = \underline{r}^i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{57}$$

(keine Transaktionen im Gleichgewicht).

$\underline{P}^*$ ist instabil, falls

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial G_i}{\partial \rho_1} - \frac{\partial G_i}{\partial \rho_0}\right)\Bigg|_{\substack{p = p^* \\ \underline{\rho} = \underline{\rho}^i(\underline{P}^*)}} > 0 \quad i = 1, \ldots, n \tag{58}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial \rho_0}(\underline{\rho}; \underline{P}) = \int w^{i'}(\underline{\pi} * \underline{\rho})(1 + a) f^i(\underline{\pi}; \underline{P})\, d\mu \tag{59}$$

$$\frac{1}{p}\frac{\partial G_i}{\partial \rho_1}(\underline{\rho}; \underline{P}) = \frac{1}{p}\int w^{i'}(\underline{\pi} * \underline{\rho})\, \pi f^i(\underline{\pi}; \underline{P})\, d\mu \tag{60}$$

[21] $z_1(\bar{p}) = 0 \Rightarrow z_0(\bar{p}) = 0$ wegen des Walrasgesetzes (Gleichheit in den Budgetungleichungen gemäss Fussnote[14]).

$$\frac{1}{p}\frac{\partial G_i}{\partial \rho_1} - \frac{\partial G_i}{\partial \rho_0} = \int w^{i\prime}(\underline{\pi} * \underline{\rho}) \left[\frac{\pi}{p} - (1 + a)\right] f^i(\underline{\pi}; \underline{P})\, d\mu \tag{61}$$

$$\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\frac{\partial G_i}{\partial \rho_1} - \frac{\partial G_i}{\partial \rho_0}\right] = \int \left[w^{i\prime}(\underline{\pi} * \underline{\rho}) \left(-\frac{\pi}{p^2}\right) f^i(\underline{\pi}; \underline{P}) \right. \tag{62}$$

$$\left. + w^{i\prime}(\underline{\pi} * \underline{\rho}) \left\{\frac{\pi}{p} - (1 + a)\right\} \frac{\partial f^i}{\partial p}(\underline{\pi}; \underline{P}) \right] d\mu.$$

Dieser Ausdruck ist natürlich bei einem geeigneten Verlauf von $\frac{\partial f^i}{\partial p}(\underline{\pi}; \underline{P})$ positiv.
Ein instabiler Gleichgewichtspreis p^* ist somit möglich (vgl. Figur 3, II).

8. Gegenbeispiel zur Systemstabilität für m = 2

$$m = 2, n = 2.$$

Es gelte

$$a = 0. \tag{63}$$

Der Teilnehmer 1 ist charakterisiert durch
– die Preiserwartungen

$$\underline{\pi}^1 = \begin{cases} (1, 0, 0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \\ (1, g_1(\underline{P}), 0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \\ (1, g_1(\underline{P}), g_2(\underline{P})) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3, \end{cases} \tag{64}$$

– die Ressourcen

$$\underline{r}^1 = (20, 0, 0)\ ^{22}, \tag{65}$$

– die Nutzenfunktion

$$w^1(x) = 1 - e^{-x}. \tag{66}$$

$$G_1(\underline{\rho}; \underline{P}) := 1 - \frac{1}{3}\left(e^{-\rho_0} + e^{-\rho_0 - g_1(\underline{P})\rho_1} + e^{-\rho_0 - g_1(\underline{P})\rho_1 - g_2(\underline{P})\rho_2}\right) \tag{67}$$

ist also die Zielfunktion des Teilnehmers 1.

[22] In diesem Beispiel werden die Güter nicht auf 1 normiert (vgl. (8))

Ein Nachfragevektor $\underline{\rho}^1(\underline{P})$ erfüllt bei festem $\underline{P}$

$$\underline{\rho}^1(\underline{P}) \geqslant \underline{0} \tag{68}$$

$$\underline{P} * \underline{\rho}^1(\underline{P}) = \underline{P} * \underline{r}^1 \tag{69}$$

$$G_1\,(\underline{\rho}^1\,(\underline{P}); \underline{P}) = \max\{G_1\,(\underline{\rho}; \underline{P}) \mid \underline{\rho} \text{ erfüllt (68), (69)}\}. \tag{70}$$

Das ist äquivalent zum folgenden Problem:
Minimiere

$$e^{-\rho^1{}_0} + e^{-\rho^1{}_0 - g_1\rho^1{}_1} + e^{-\rho^1{}_0 - g_1\rho^1{}_1 - g_2\rho^1{}_2} \tag{71}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\rho^1{}_0 + P_1\,\rho^1{}_1 + P_2\,\rho^1{}_2 = 20 \tag{72}$$

$$\underline{\rho}^1 \geqslant \underline{0}.$$

Das Kuhn/Tucker-Theorem[23] liefert nun

$$\begin{aligned}
-\,e^{-\rho^1{}_0} - e^{-\rho^1{}_0 - g_1\rho^1{}_1} - e^{-\rho^1{}_0 - g_1\rho^1{}_1 - g_2\rho^1{}_2} &\geqslant \lambda \\
-\,g_1\,e^{-\rho^1{}_0 - g_1\rho^1{}_1} - g_1\,e^{-g^1{}_0 - g_1\rho^1{}_1 - g_2\rho^1{}_2} &\geqslant \lambda P_1 \\
-\,g_2\,e^{-\rho^1{}_0 - g_1\rho^1{}_1 - g_2\rho^1{}_2} &\geqslant \lambda P_2
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\rho^1{}_0 + P_1\,\rho^1{}_1 + P_2\,\rho^1{}_2 = 20.$$

Tritt in (73) Gleichheit auf, so erhalten wir für $P_1, P_2, g_1, g_2 > 0$.

$$\begin{aligned}
\rho^1{}_1\,(\underline{P}) &= \frac{1}{g_1}\,ln\,\frac{g_1\,g_2 - P_1\,g_2}{P_1\,g_2 - P_2\,g_1} \\
\rho^1{}_2\,(\underline{P}) &= \frac{1}{g_2}\,ln\,\frac{P_1\,g_2 - P_2\,g_1}{P_2\,g_1} \\
\rho^1{}_0\,(\underline{P}) &= 20 - P_1\,\rho^1{}_1\,(\underline{P}) - P_2\,\rho^1{}_2\,(\underline{P}).
\end{aligned} \tag{74}$$

In diesem Beispiel sei

$$\begin{aligned}
g_1\,(\underline{P}) &= 2\,P_1\,(1 + \mu\,P_1{}^2)\,e^{-\lambda P_1} + \delta \\
g_2\,(\underline{P}) &= \omega,
\end{aligned} \tag{75}$$

[23] Die Slater-Bedingung ist offensichtlich erfüllt.

wobei

$$\begin{aligned} \mu &= 16.18274958 \\ \lambda &= 3.128987615 \\ \delta &= 0.003515514075 \\ \omega &= 0.1524772660. \end{aligned} \tag{76}$$

Eingesetzt in (74) ergibt das

$$\rho^1{}_1(\underline{P}) = \frac{1}{2P_1(1+\mu P_1{}^2)e^{-\lambda P_1}+\delta} \ln \frac{2P_1(1+\mu P_1{}^2)e^{-\lambda P_1}+\delta-P_1}{P_1-\frac{2}{\omega}P_1P_2(1+\mu P_1{}^2)e^{-\lambda P_1}-\frac{\delta}{\omega}P_2}$$

$$\rho^1{}_2(\underline{P}) = \frac{1}{\omega} \ln\left[\frac{\omega P_1}{2P_1P_2(1+\mu P_1{}^2)\mathrm{e}^{-\lambda P_1}+P_2\delta}-1\right]. \tag{77}$$

Der Teilnehmer 2 ist charakterisiert durch

– die Preiserwartungen

$$\underline{\pi}^2 = (1, 0.5P_1, 0.5P_2) \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1, \tag{78}$$

– die Ressourcen

$$\underline{r}^2 = (0, 1, 1), \tag{79}$$

– die Nutzenfunktion (80)

$$w^2(x) = 1 - e^{-2x}.$$

Für die Nachfrage erhält man somit, falls $\underline{P} > \underline{0}$ ist

$$\underline{\rho}^2(\underline{P}) = (P_1 + P_2, 0, 0). \tag{81}$$

Der gesamte Nachfrageüberhang ist gegeben durch

$$\underline{N}(\underline{P}) = \underline{\rho}^1 + \underline{\rho}^2 - \underline{r}^1 - \underline{r}^2.$$

Man überlegt sich leicht, dass für ein Gleichgewicht notwendig ist

– $\underline{P} > \underline{0}$ (aus Satz 4 folgt nämlich $\lim\limits_{\underline{P}^\nu \to (1, P_1, P_2)} \sum\limits_{h=0}^{m} \rho^1{}_h(\underline{P}^\nu) = \infty$, falls $P_1 = 0$ oder $P_2 = 0$),

– Gleichheit in den Kuhn/Tucker-Bedingungen (73).

Zuerst weisen wir nach, dass nur ein Gleichgewicht existieren kann.
Für jedes Gleichgewichtspreissystem $\underline{P}^*$ muss gelten

$$\rho^1{}_1(\underline{P}^*) = \frac{1}{2\,P_1{}^*\,(1+\mu\,P_1{}^{*2})\,e^{-\lambda P_1{}^*} + \delta}\,.$$

$$ln\,\frac{2\,P_1{}^*\,(1+\mu P_1{}^{*2})\,e^{-\lambda P_1{}^*} + \delta - P_1{}^*}{P_1{}^* - \frac{2}{\omega}P_1{}^*\,P_2{}^*\,(1+\mu\,P_1^{*2})\,e^{-\lambda P_1{}^*} - \frac{\delta}{\omega}P_2{}^*} = 1 \qquad (82)$$

$$\rho^1{}_2(\underline{P}^*) = \frac{1}{\omega}\,ln\left[\frac{\omega\,P_1{}^*}{2\,P_1{}^*\,P_2{}^*\,(1+\mu\,P_1{}^{*2})\,e^{-\lambda P_1^*+P_2{}^*\,\delta}} - 1\right] = 1\,. \qquad (83)$$

Aus (83) erhält man

$$\frac{2}{\omega}\,P_1{}^*\,P_2{}^*\,(1+\mu\,P_1{}^{*2})\,e^{-\lambda P_1{}^*} + P_2{}^*\,\frac{\delta}{\omega} = (e^{\omega}+1)^{-1}\,P_1{}^* \qquad (84)$$

Eingesetzt in (82)

$$\frac{1}{2\,P_1{}^*\,(1+\mu\,P_1{}^{*2})\,e^{-\lambda P_1{}^*} + \delta}\,ln\,\frac{2\,(1+\mu\,P_1{}^{*2})\,e^{-\lambda P_1{}^*} - 1 + \frac{\delta}{P_1{}^*}}{1-(e^{\omega}+1)^{-1}} = 1\,. \qquad (85)$$

Es lässt sich nachweisen [24], dass

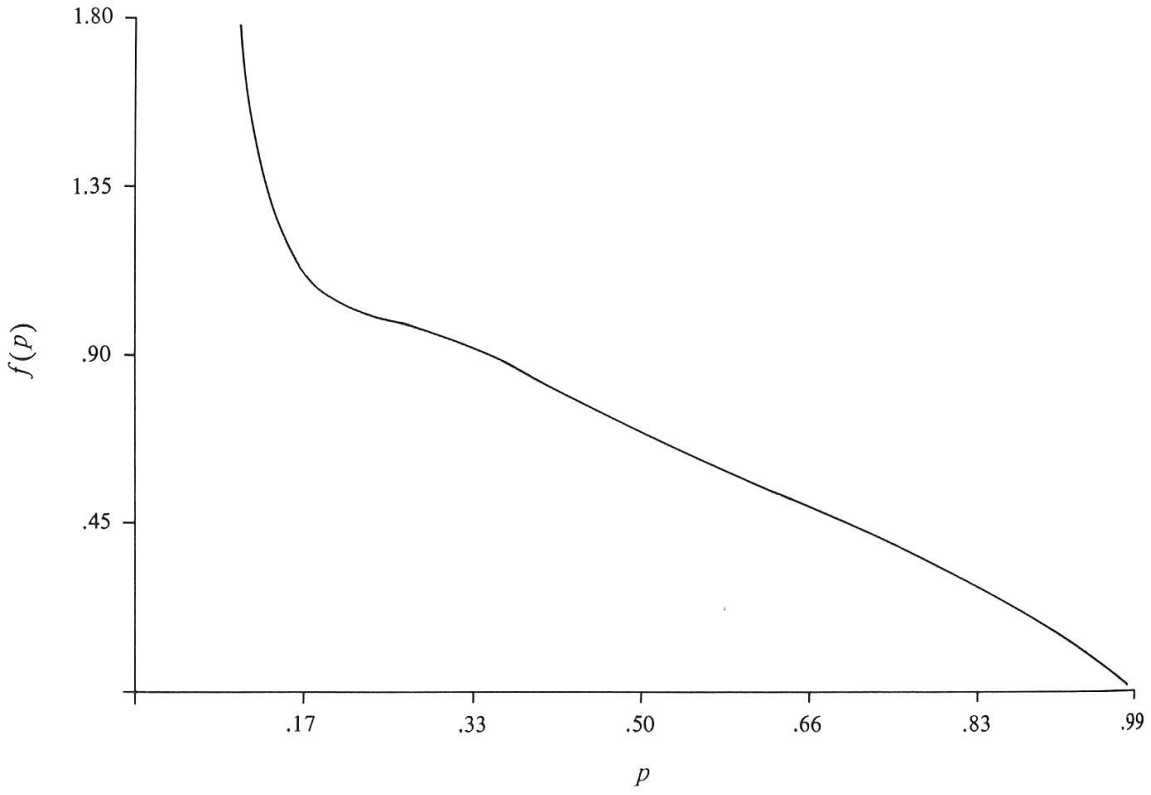
$$f(p) = \frac{1}{2\,p\,(1+\mu\,p^2)\,e^{-\lambda p} + \delta}\,ln\,\frac{2\,(1+\mu\,p^2)\,e^{-\lambda p} - 1 + \frac{\delta}{p}}{1-(e^{\omega}+1)^{-1}} \qquad (86)$$

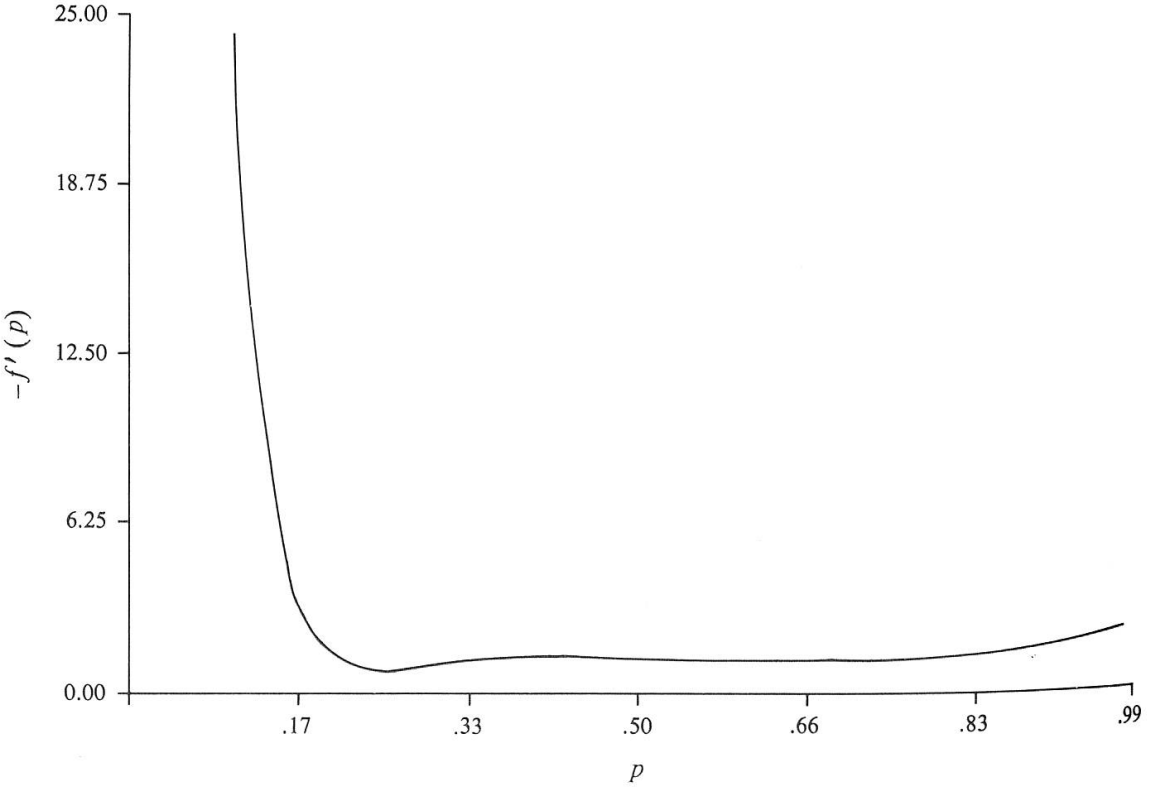
in p strikt monoton fallend ist.
Aus (85) folgt somit die Eindeutigkeit von $P_1{}^*$.
Wegen (84) ist auch $P_2{}^*$ eindeutig.
Für $\underline{P}^*$ erhält man

$$\underline{P}^* = (1,\ 0.24608599,\ 0.038119316).$$

Nun untersuchen wir die Stabilität.

[24] Man teilt den Definitionsbereich von f in Intervalle auf. Auf diesen Intervallen lassen sich obere Schranken für f' berechnen. Weil diese Schranken negativ sind, ist f strikt monoton fallend. Dieses Verfahren ist allerdings ziemlich mühsam. Anstelle eines Beweises wird deshalb der Verlauf von f und f' durch einen Computer-Output illustriert.


1.80
1.35
.90
.45
f(p)
.17
.33
.50
.66
.83
.99
p


25.00
18.75
12.50
6.25
0.00
−f′(p)
.17
.33
.50
.66
.83
.99
p

$$\frac{\partial N_1}{\partial P_1} = -\frac{2[1-\lambda P_1+3\mu P_1^2-\lambda\mu P_1^3]\,e^{-\lambda P_1}}{[2\,P_1\,(1+\mu\,P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}+\delta]^2}\;ln\;\frac{2\,P_1\,(1+\mu P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}+\delta-P_1}{P_1-\frac{2}{\omega}P_1P_2\,(1+\mu\,P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}-\frac{\delta}{\omega}P_2}$$

$$+\frac{2[1-\lambda P_1+3\mu P_1^2-\lambda\mu P_1^3]\,e^{-\lambda P_1}-1}{2P_1\,(1+\mu P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}+\delta}\cdot\frac{1}{2P_1\,(1+\mu P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}+\delta-P_1} \tag{87}$$

$$-\frac{1-\frac{2}{\omega}P_2\,[1-\lambda P_1+3\mu P_1^2-\lambda\mu P_1^3]e^{-\lambda P_1}}{2\,P_1\,(1+\mu\,P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}+\delta}\cdot\frac{1}{P_1-\frac{2}{\omega}P_1\,P_2\,(1+\mu\,P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}-\frac{\delta}{\omega}P_2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial P_2} = \frac{1}{\omega\,P_1-2\,P_1\,P_2\,(1+\mu\,P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}-\delta\,P_2}\cdot \tag{88}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial P_1} = \frac{2\,P_1^2\,[\lambda-2\mu\,P_1+\mu\,\lambda\,P_1^2]\,e^{-\lambda P_1}+\delta}{[\omega\,P_1-2\,P_1\,P_2\,(1+\mu\,P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}-P_2\,\delta]\,[2\,P_1\,(1+\mu\,P_1^2)e^{-\lambda P_1}+\delta]}\cdot \tag{89}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial P_2} = -\frac{1}{P_2}\cdot\frac{P_1}{\omega\,P_1-2\,P_1\,P_2\,(1+\mu\,P_1^2)\,e^{-\lambda P_1}-P_2\,\delta}\cdot \tag{90}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{P_1} & \frac{\partial N_1}{P_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial P_1} & \frac{\partial N_2}{\partial P_2} \end{pmatrix}_{\underline{P}=\underline{P}^*} = \begin{pmatrix} 0.7952691054 & 49.53234751 \\ -10.42496392 & -319.7648243 \end{pmatrix}. \tag{91}$$

Führen wir für $\underline{P} > \underline{0}$ den Preismechanismus

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dt} &= 0 \\ \frac{dP_1}{dt} &= k_1N_1\,(\underline{P}) \\ \frac{dP_2}{dt} &= k_2N_2\,(\underline{P}) \\ k_1 &= 1000, \quad k_2 = 1 \end{aligned} \tag{92}$$

ein, so hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} k_1 \dfrac{\partial N_1}{\partial P_1} & k_1 \dfrac{\partial N_1}{\partial P_1} \\ k_2 \dfrac{\partial N_2}{\partial P_1} & k_2 \dfrac{\partial N_2}{\partial P_2} \end{pmatrix}_{\underline{P} = \underline{P}^*} = \begin{pmatrix} 795.2691054 & 49532.34751 \\ -10.42496392 & -319.7648243 \end{pmatrix} \tag{93}$$

Eigenwerte mit positiven Realteilen.

Deshalb kann keine Lösung $\underline{\psi}\,(t; \tilde{\underline{P}})$[25, 26] von (92) gegen $\underline{P}^*$ konvergieren, falls $\tilde{\underline{P}} \neq \underline{P}^*$ $(\tilde{\underline{P}} > \underline{0})$.
Damit ist ein Gegenbeispiel zur Systemstabilität konstruiert.

Anhang

9. Der Existenzbeweis

Der Beweis von Satz 1 beruht auf den Arbeiten von Debreu [11], [12]. Im untersuchten Modell treten jedoch subjektive Preiserwartungen auf; zudem kommt das Geld vor. Deshalb muss der Beweis an verschiedenen Stellen anders als bei Debreu geführt werden.

9.1. Die erreichbaren Zustände

Die Tauschökonomie $\varepsilon = (\underline{r}^i, a, F^i, w^i)$ ist gegeben.

$$A := \left\{ (\underline{\rho}^1, \ldots, \underline{\rho}^n) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \underline{\rho}^i = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}^i, \underline{\rho}^i \geqslant \underline{0} \right\} \tag{94}$$

ist die Menge der erreichbaren Zustände von ε. $(A \subseteq IR^{(m+1)n})$.
Weil A kompakt ist, gibt es ein $a > 1$, so dass

$$A \subseteq [0, a)^{(m+1)n}. \tag{95}$$

Wir betrachten leicht modifizierte Nachfragekorrespondenzen.

[25] $\underline{\psi}\,(0; \tilde{\underline{P}}) = \tilde{\underline{P}}$
[26] Es lässt sich zeigen $\tilde{\underline{P}} > \underline{0} \Rightarrow \underline{\psi}\,(t; \tilde{\underline{P}}) > \underline{0}\ \forall t \geqslant 0$.

$\underline{\hat{\rho}}^i(\underline{P})$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist definiert durch

1') $a \geqslant \hat{\rho}_h^i(\underline{P}) \geqslant 0 \quad (h = 0, \ldots, m)$ (96)

2') $\underline{P} * (\underline{\hat{\rho}}^i(\underline{P}) - \underline{r}^i) \leqslant 0$ (97)

3') $G_i(\underline{\hat{\rho}}^i(\underline{P}); \underline{P}) = \max \{ G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) \mid \underline{\rho} \text{ erfüllt (96), (97)} \}$. (98)

Die neuen Korrespondenzen lauten

$$\underline{\hat{N}}^i(\underline{P}) := \{ \underline{\hat{\rho}}^i(\underline{P}) - \underline{r}^i \mid \underline{\hat{\rho}}^i(\underline{P}) \text{ erfüllt (96), (97), (98)} \} \tag{99}$$

$$\underline{\hat{N}}(\underline{P}) := \sum_{i=1}^{n} \underline{\hat{N}}^i(\underline{P}). \tag{100}$$

Der Beweis verläuft nun folgendermassen:
Zuerst (9. 2.–9. 5.) wird die Existenz eines Preissystems $\underline{P}^* \in \Omega_1$ nachgewiesen, so dass $\underline{0} \varepsilon \underline{\hat{N}}(\underline{P}^*)$. Am Schluss zeigt man, dass $\underline{P}^*$ ein Gleichgewichtspreissystem ist.

9.2. Stetigkeit der Zielfunktionen

Lemma 9.1: Die Funktionen

$$G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) := \int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho})\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) \quad i = 1, \ldots, n$$

$$G_i : [0, \infty)^{m+1} \times \Omega_1 \to [0, \infty) \tag{101}$$

sind in $(\underline{\rho}, \underline{P})$ stetig.

Beweis:
$(\underline{\bar{\rho}}, \underline{\bar{P}})$ sei gegeben. Es ist zu zeigen:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren $\delta, \delta' > 0$, so dass

$$\|\underline{\rho} - \underline{\bar{\rho}}\| < \delta, \ \|\underline{P} - \underline{\bar{P}}\| < \delta' \Longrightarrow |G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) - G_i(\underline{\bar{\rho}}; \underline{\bar{P}})| < \varepsilon \text{ [27]}. \tag{102}$$

[27] $\| \cdot \|$ ist die Euklidische Norm.

1) Die Voraussetzungen (A. 3), (A. 4) (w^i ist eine beschränkte, stetige Funktion) und Ⓑ (schwache Konvergenz der F^i) ergeben sofort:
Es existiert $\delta_1' > 0$, so dass

$$\| \underline{P} - \underline{\bar{P}} \| < \delta_1' \Longrightarrow | G_i(\underline{\bar{\rho}}; \underline{P}) - G_i(\underline{\bar{\rho}}; \underline{\bar{P}}) | < \varepsilon/2. \tag{103}$$

2) Für die Wahrscheinlichkeiten

$$(\Omega_2, \mathfrak{B}, F^i(\cdot\,; \underline{P})) \tag{104}$$

($\mathfrak{B}$ ist die Borel-σ-Algebra von Ω_2)

gilt:

$$P \longrightarrow \tilde{P} \Longrightarrow F^i(\cdot\,; \underline{P}) \xrightarrow[\text{schwach}]{} F^i(\cdot\,; \underline{\tilde{P}}) \text{ (Voraussetzung Ⓑ).}$$

Schwache Konvergenz und Konvergenz in der Prokhorov-Metrik sind äquivalent.
Zu $\varepsilon_1 > 0$ existiert also $\delta_2' > 0$, so dass

$$\| \underline{P} - \underline{\bar{P}} \| < \delta_2' \Longrightarrow d_{Pr}(F^i(\cdot\,; \underline{P}), F^i(\cdot\,; \underline{\bar{P}})) < \varepsilon_1 \text{ [28]}. \tag{105}$$

Es existiert eine kompakte Teilmenge M von Ω_2 ($M \in \mathfrak{B}$) mit

$$F^i(M; \underline{\bar{P}}) \geqslant 1 - \varepsilon_1. \tag{106}$$

Wir definieren

$$M' := \{ \underline{y} \in \Omega_2 \mid \inf_{\underline{x} \in M} \| \underline{x} - \underline{y} \| \leqslant \varepsilon_1 \}. \tag{107}$$

M' ist ebenfalls kompakt.
Jetzt gilt

$$F^i(M'; \underline{P}) > 1 - 2\varepsilon_1, \forall \underline{P} \in \Omega_1 \text{ mit } \| \underline{P} - \underline{\bar{P}} \| < \delta_2' \ \big(\text{wegen (105)}\big) \tag{108}$$

$$\int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho})\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) = \int_{M'} w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho})\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) + \int_{\Omega_2 \setminus M'} w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho})\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) \tag{109}$$

[28] Definition der Prokhorov-Metrik

$$d_{Pr}(H_1, H_2) := \inf \{ \nu > 0 \mid H_2(B) \leqslant H_1(B^\nu) + \nu, \forall B \in \mathfrak{B} \}$$

$$B^\nu := \{ \underline{y} \in \Omega_2 \mid \inf_{\underline{x} \in B} \| \underline{x} - \underline{y} \| \leqslant \nu \}.$$

$$| G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) - G_i(\underline{\bar{\rho}}; \underline{P}) | \leqslant \int_{M'} | w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}) - w^i(\underline{\pi} * \underline{\bar{\rho}}) | \, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) \quad (110)$$

$$+ \int_{\Omega_2 \setminus M'} | w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}) - w^i(\underline{\pi} * \underline{\bar{\rho}}) | \, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}).$$

Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\| \underline{\rho} - \underline{\bar{\rho}} \| < \delta \Longrightarrow | w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}) - w^i(\underline{\pi} * \underline{\bar{\rho}}) | < \varepsilon/4, \ \forall \underline{\pi} \in M' \quad (111)$$

(wegen der Stetigkeit von w^i (A. 3) und der Kompaktheit von M).
Dann folgt aus (108), (110) und (111)

$$\| \underline{\rho} - \underline{\bar{\rho}} \| < \delta, \ \| \underline{P} - \underline{\bar{P}} \| < \delta_2'$$

$$\Longrightarrow | G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) - G_i(\underline{\bar{\rho}}; \underline{P}) | < \varepsilon/4 + \sup_{t \geqslant 0} w^i(t) \cdot F^i(\Omega_2 \setminus M'; \underline{P}) \quad (112)$$

$$\leqslant \varepsilon/4 + 2\varepsilon_1 \sup_{t \geqslant 0} w^i(t).$$

Setzen wir $\delta' = \min\{\delta_1', \delta_2'\}$, so erhält man aus (103) und (112) mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\| \underline{\rho} - \underline{\bar{\rho}} \| < \delta, \ \| \underline{P} - \underline{\bar{P}} \| < \delta'$$

$$\Longrightarrow | G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) - G_i(\underline{\bar{\rho}}; \underline{\bar{P}}) | < \tfrac{3}{4}\varepsilon + 2\varepsilon_1 \sup_{t \geqslant 0} w^i(t). \quad (113)$$

Damit ist die Stetigkeit bewiesen.

Lemma 9.2.: Die Funktionen

$$G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) := \int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}) \, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) \quad (114)$$

sind konkav in $\underline{\rho}$.
Der Beweis folgt sofort aus der Konkavität von w^i (A. 2).

9.3. $\hat{\underline{N}}$ hat abgeschlossenen Graphen

Aus «Espaces topologiques», C. Berge, pp. 122–123, [8] können wir leicht folgenden Satz herleiten.

Maximumtheorem
Voraussetzung:
$\varphi: X \times Y \longrightarrow IR$ ist eine stetige Funktion.
$\underline{\Gamma}: X \to Y$ ist eine stetige Korrespondenz, $\underline{\Gamma}(\underline{x}) \neq \emptyset, \ \forall \underline{x} \in X$.
Y ist kompakt.

Behauptung:
$m(\underline{x}) := \max\{\varphi(\underline{x}, \underline{y}) \mid \underline{y} \in \underline{\Gamma}(\underline{x})\}$ ist stetig auf X.
$\underline{\Phi}(\underline{x}) := \{\underline{y} \in Y \mid \underline{y} \in \underline{\Gamma}(\underline{x}),\ \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = m(\underline{x})\}$ hat abgeschlossenen Graphen, $\underline{\Phi}(\underline{x}) \neq \emptyset,\ \forall \underline{x} \in X$.
Das Maximumtheorem eignet sich zum Beweis des folgenden Lemmas.
Lemma 9.3.: Die Korrespondenz

$$\underline{\hat{N}}(\underline{P}) := \sum_{i=1}^{n} \underline{\hat{N}}^{i}(\underline{P})$$
$$\underline{\hat{N}} : \Omega_1 \longrightarrow [-1, na]^{m+1} \text{ [29]} \tag{115}$$

hat abgeschlossenen Graphen und nicht leere Bildmengen.
Beweis:
Es genügt $\underline{\hat{N}}^{i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ zu untersuchen.
Wir definieren

$$\underline{\Lambda}^{i} : \Omega_1 \longrightarrow [0, a]^{m+1}$$
$$\underline{P} \rightsquigarrow \{\underline{x} \mid 0 \leqslant x_h \leqslant a\ (h = 0, \ldots, m),\ \underline{P} * (\underline{x} - \underline{r}^{i}) \leqslant 0\}. \tag{116}$$

Wegen Voraussetzung Ⓓ ist $\underline{\Lambda}^{i}$ eine stetige Korrespondenz (siehe: G. Debreu, Théorie de la valeur [11], pp. 67–69).
Nun gilt:

$$\underline{\hat{N}}^{i}(\underline{P}) = \{\underline{x} - \underline{r}^{i} \mid \underline{x} \in \underline{\Lambda}^{i}(\underline{P}),\ G_i(\underline{x}; \underline{P}) = \max_{\underline{x}' \in \underline{\Lambda}^{i}(\underline{P})} G_i(\underline{x}'; \underline{P})\}. \tag{117}$$

$\underline{\hat{N}}^{i}$ hat wegen des Maximumtheorems abgeschlossenen Graphen und nicht leere Bildmengen. Folglich hat auch $\underline{\hat{N}}$ abgeschlossenen Graphen und nicht leere Bildmengen.
Lemma 9.4.: Die Bildmengen von $\underline{\hat{N}}$ sind konvex.
Beweis:
Weil $G_i(\underline{\rho}; \underline{P})$ in $\underline{\rho}$ konkav ist (Lemma 9.2.), sind die Bildmengen von $\underline{\hat{N}}^{i}$ konvex. Somit sind auch die Bildmengen von $\underline{\hat{N}}$ konvex.

[29] $-r_h^i \leqslant \hat{\rho}_h^i(\underline{P}) - r_h^i \leqslant a$

$$\Longrightarrow -1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\hat{\rho}_h^1(\underline{P}) - r_h^i) \leqslant na \quad h = 0, \ldots, m.$$

9.4. *Transformation*

Der Fixpunktsatz von Kakutani lässt sich nur auf Korrespondenzen mit kompaktem Definitionsbereich anwenden. Da Ω_1 nicht kompakt ist, betrachten wir eine Folge $\{\Omega^t\}_{t=1}^{\infty}$, wobei

$$\Omega^t := \{(1, \underline{y}) \mid \underline{y} \in [0, t]^m\} \quad t = 1, 2, \ldots . \tag{118}$$

Zusätzlich normieren wir das Preissystem.

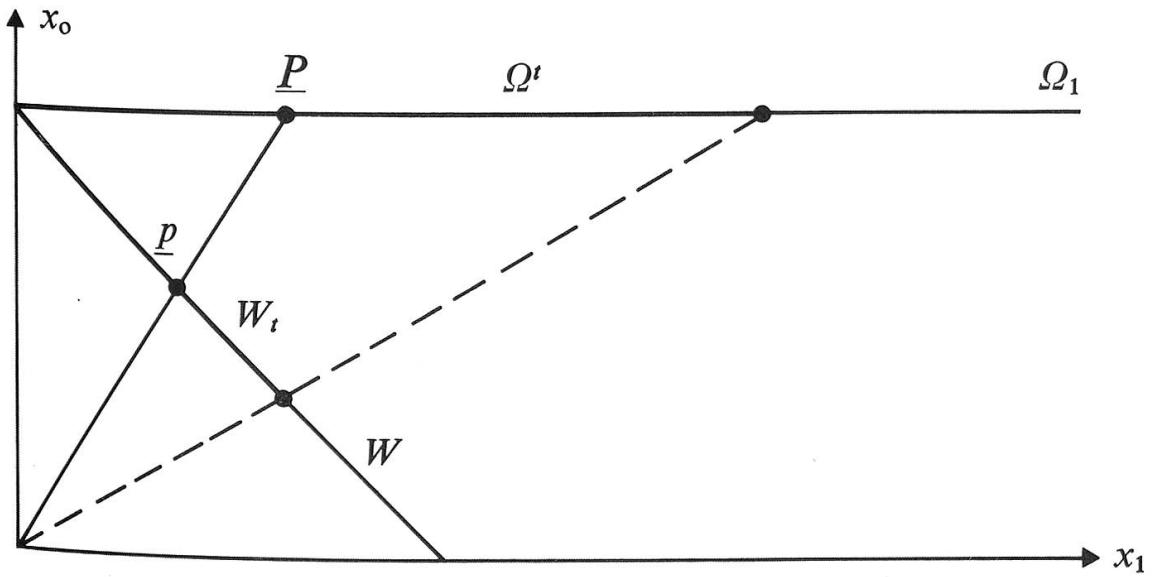
$$g: \Omega_1 \longrightarrow W := \left\{\underline{x} \geqslant \underline{0} \mid \sum_{h=0}^{m} x_h = 1\right\} (W = \text{Standardsimplex}) \tag{119}$$

$$\underline{P} \rightsquigarrow \underline{p} := \frac{1}{\sum_{h=0}^{m} P_h} \underline{P}.$$

$$g_t: \Omega^t \longrightarrow W_t := \{\underline{x} \in W \mid x_h \leqslant t\, x_0, \quad h = 1, \ldots, m\} \tag{120}$$

$$\underline{P} \rightsquigarrow \underline{p} := \frac{1}{\sum_{h=0}^{m} P_h} \underline{P}.$$

Figur 5



Die Korrespondenz

$$\underline{\hat{\hat{N}}}^t : W_t \longrightarrow [-1, na]^{m+1} \quad t = 1, 2, \ldots \tag{121}$$

$$\underline{p} \rightsquigarrow \underline{\hat{N}}(\underline{P}) \quad \left(\underline{P} := \frac{1}{p_0}\underline{p}\right)^{30}$$

hat, weil g_t ein Homöomorphismus ist, abgeschlossenen Graphen und konvexe, nicht leere Bildmengen.
Um den Fixpunktsatz von Kakutani anzuwenden, muss noch eine Hilfskorrespondenz eingeführt werden.

$$\underline{K}^t : [-1, na]^{m+1} \longrightarrow W_t$$

$$\underline{z} \rightsquigarrow \{\underline{p} \in \underline{W}_t \mid \underline{p} * \underline{z} = \max_{\underline{p}' \in W_t} \underline{p}' * \underline{z}\}. \tag{122}$$

Daraus lässt sich

$$\underline{\psi}_t : W_t \times [-1, na]^{m+1} \longrightarrow W_t \times [-1, na]^{m+1} \tag{123}$$

$$(\underline{p}, \underline{z}) \rightsquigarrow (\underline{K}^t(\underline{z}), \underline{\hat{\hat{N}}}^t(\underline{p}))$$

konstruieren.
Aus den Eigenschaften von $\underline{\hat{\hat{N}}}^t$, $\underline{K}^t$ folgt
- $\underline{\psi}_t$ hat abgeschlossenen Graphen.
- Die Bildmengen von $\underline{\psi}_t$ sind konvex und nicht leer.

Zudem ist $W_t \times [-1, na]^{m+1}$ kompakt.
Nun können wir den Fixpunktsatz von Kakutani anwenden, der aussagt:

Satz

Voraussetzung:
$C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex kompakt.
$\underline{\Gamma} : C \longrightarrow C$ ist eine Korrespondenz mit abgeschlossenem Graphen.
$\underline{\Gamma}(\underline{x})$ ist konvex und nicht leer für alle $\underline{x} \in \underline{C}$.
Behauptung: Es existiert ein $\underline{x}_0 \in C$, so dass $\underline{x}_0 \in \underline{\Gamma}(\underline{x}_0)$ (vgl. [8], p. 183).

Somit existieren

$$(\underline{p}^t, \underline{z}^t) \in (\underline{K}^t(\underline{z}^t), \underline{\hat{\hat{N}}}^t(\underline{p}^t)) \quad t = 1, 2, \ldots \tag{124}$$

mit folgenden Eigenschaften:

30 $\underline{\hat{\hat{N}}}^t = \underline{\hat{N}}^0 g_t^{-1}$.

$$\underline{p}^t * \underline{z}^t \leqslant 0 \left(\text{denn } \underline{z}^t \in \hat{\underline{N}}^t(\underline{p}^t), \text{ vgl. (97), (99), (100), (121)}\right) \tag{125}$$

$$\underline{p}^t * \underline{z}^t \geqslant \underline{p} * \underline{z}^t, \ \forall \underline{p} \in W_t \ (\text{denn } \underline{p}^t \in \underline{K}^t(\underline{z}^t), \text{ vgl. (122)}) \tag{126}$$

$(\underline{p}^t, \underline{z}^t)_{t=1}^{\infty}$ ist eine Folge auf der kompakten Menge $W \times [-1, na]^{m+1}$ und besitzt deshalb einen Häufungspunkt $(\underline{p}^*, \underline{z}^*)$.
O. B. d. A. dürfen wir annehmen

$$(\underline{p}^t, \underline{z}^t) \xrightarrow{t \to \infty} (\underline{p}^*, \underline{z}^*). \tag{127}$$

Lemma 9.5.:

$$\underline{p}^* * \underline{z}^* = 0 \tag{128}$$

$$\underline{z}^* \leqslant \underline{0}. \tag{129}$$

Beweis:
Zuerst zeigt man

$$\underline{p}^t * \underline{z}^t \geqslant -\frac{1}{1+t} \quad t = 1, 2, \ldots . \tag{130}$$

Fallunterscheidung:

1) $z_0^t \geqslant 0 \Longrightarrow \underline{p}^t * \underline{z}^t \geqslant 0$ (wegen (126)), (131)

2) $z_0^t < 0 \Longrightarrow \max\limits_{h=1,\ldots,m} z_h^t \geqslant 0$ (132)

$\Big($denn $\max\limits_{h=1,\ldots,m} z_h^t < 0 \Longrightarrow \underline{z}^t < \underline{0} \Longrightarrow$ Widerspruch zu (98) (Nutzenoptimierung)$\Big)$.

Wegen (126) folgt jetzt

$$\underline{p}^t * \underline{z}^t \geqslant \frac{1}{1+t} z_0^t + \frac{t}{1+t} \max_{h=1,\ldots,m} z_h^t \geqslant \frac{1}{1+t} z_0^t \geqslant -\frac{1}{1+t}. \tag{133}$$

Damit ist (130) bewiesen.

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{p}^t * \underline{z}^t \leqslant 0 & (125) \\ \underline{p}^t * \underline{z}^t \geqslant -\dfrac{1}{1+t} & (130) \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{p}^* * \underline{z}^* = 0. \tag{128}$$

Aus

$$\underline{p}^t * \underline{z}^t \geqslant \underline{p} * \underline{z}^t \quad \forall \underline{p} \in W_t \tag{126}$$

folgt nach kurzer Rechnung

$$\underline{p}^* * \underline{z}^* \geqslant \underline{p} * \underline{z}^* \quad \forall \underline{p} \in W. \tag{134}$$

Aus (128) und (134) erhält man sofort

$$\underline{z}^* \leqslant \underline{0}. \tag{129}$$

9.5. Konstruktion von $\underline{P}^*$

Mit Hilfe der Voraussetzung © schliessen wir den Fall $p_0^* = 0$ aus.

Lemma 9.6.:

$$p_0^* \neq 0. \tag{135}$$

Beweis (indirekt):

Sei

$$p_0^* = 0. \tag{136}$$

dann existiert t',,so dass

$$p_0^{t'} < \frac{1}{mc + 1} \quad (c \text{ gemäss Voraussetzung } ©). \tag{137}$$

Es gibt ein $\tilde{h} \in \{1, ..., m\}$, so dass gleichzeitig

$$z_{\tilde{h}}^{t'} = \max_{h = 1, ..., m} z_h^{t'} \tag{138}$$

$$P_{\tilde{h}}^{t'} = \max_{h = 1, ..., m} P_h^{t'} \quad \left(\underline{P}^{t'} = \frac{G1}{p_0^{t'}} \underline{p}^{t'}\right) \tag{139}$$

erfüllt ist [31]

Aus (137) erhält man

$$P_{\tilde{h}}^{t'} > c. \tag{140}$$

Weiter gilt $z_0^{t'} \leqslant 0$ $\left(\text{falls } z_0^{t'} > 0, \text{ so widersprechen sich (125) und (126)}\right)$ (141)

Gemäss (99), (100), (121) existieren $\underline{\hat{p}}^i(\underline{P}^{t'})$, so dass

– $\underline{\hat{p}}^i(\underline{P}^{t'})$ erfüllt (96), (97), (98), (142)

– $\underline{z}^{t'} = \sum_{i=1}^{n} (\underline{\hat{p}}^i(\underline{P}^{t'}) - \underline{r}^i)$. (143)

[31] $S := \left\{k \mid z_k^{t'} = \max_{h = 1, ..., m} z_h^{t'}, 1 \leqslant k \leqslant m\right\}$.

Wegen (126) gilt

$P_{h_1}^{t'} \geqslant P_{h_2}^{t'}$, falls $h_1 \in S$, $h_2 \in \{1, ..., m\} \setminus S$.

Es gibt ein $i_0 \in \{1, ..., n\}$ mit

$$- \sum_{h=1}^{m} \hat{\rho}_h^{i_0}(\underline{P}^{t'}) > 0 \quad \Big(\text{denn } z_h^{t'} = -1, \quad h = 1, ..., m \tag{144}$$

$$\Longrightarrow P_h^{t'} = 0, \quad h = 1, ..., m, \text{ Wid. zu (140)}\Big)$$

$$- \frac{\hat{\rho}_{\tilde{h}}^{i_0}(\underline{P}^{t'})}{\sum_{h=1}^{m} \hat{\rho}_h^{i_0}(\underline{P}^{t'})} \geqslant \frac{1}{m} \tag{145}$$

$$\Big(\text{denn (138)} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \hat{\rho}_{\tilde{h}}^{i}(\underline{P}^{t'}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \hat{\rho}_h^{i}(\underline{P}^{t'}), \quad h = 1, ..., m$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \hat{\rho}_{\tilde{h}}^{i}(\underline{P}^{t'}) \geqslant \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} \hat{\rho}_h^{i}(\underline{P}^{t'})$$

$$\Longrightarrow \exists_{i_0} \ni \hat{\rho}_{\tilde{h}}^{i_0}(\underline{P}^{t'}) \geqslant \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} \hat{\rho}_h^{i_0}(\underline{P}^{t'})\Big)$$

$$- \hat{\rho}_0^{i_0}(\underline{P}^{t'}) \leqslant 1 < a \Big(\text{wegen (141)}\Big). \tag{146}$$

Wegen (140), (144), (145) folgt nach Voraussetzung ©

$$\int \underline{\pi} * \underline{\hat{\rho}}^{i_0}(\underline{P}^{t'})\, dF^{i_0}(\underline{\pi}; \underline{P}^{t'}) < (1 + a)\, \underline{P}^{t'} * \underline{\hat{\rho}}^{i_0}(\underline{P}^{t'}) \tag{147}$$

Weil w^{i_0} konkav ist, ergibt die Ungleichung von Jensen

$$\int w^{i_0}\Big(\underline{\pi} * \underline{\hat{\rho}}^{i_0}(\underline{P}^{t'})\Big)\, dF^{i_0}(\underline{\pi}; \underline{P}^{t'}) \leqslant w^{i_0}\Big(\int \underline{\pi} * \underline{\hat{\rho}}^{i_0}(\underline{P}^{t'})\, dF^{i_0}(\underline{\pi}; \underline{P}^{t'})\Big). \tag{148}$$

Aus der strikten Monotonie von w^{i_0} folgt wegen (147) weiter

$$w^{i_0}\Big(\int \underline{\pi} * \underline{\hat{\rho}}^{i_0}(\underline{P}^{t'})\, dF^{i_0}(\underline{\pi}; \underline{P}^{t'})\Big) < w^{i_0}\Big([1 + a]\, \underline{P}^{t'} * \underline{\hat{\rho}}^{i_0}(\underline{P}^{t'})\Big) \tag{149}$$

Setzen wir

$$\underline{\check{\rho}}^{i_0} := (\underline{P}^{t'} * \underline{\hat{\rho}}^{i_0}(\underline{P}^{t'}), 0, ..., 0), \tag{150}$$

so erhält man aus (148) und (149)

$$\int w^{i_0}\Big(\underline{\pi} * \underline{\hat{\rho}}^{i_0}(\underline{P}^{t'})\Big)\, dF^{i_0}(\underline{\pi}; \underline{P}^{t'}) < w^{i_0}\Big((1+a)\check{\rho}_0^{i_0}\Big) = \int w^{i_0}(\underline{\pi} * \underline{\check{\rho}}^{i_0})\, dF^{i_0}(\underline{\pi}; \underline{P}^{t'}) \tag{151}$$

oder

$$G_{i_0}(\underline{\hat{\rho}}^{i_0}(\underline{P}^{t'}); \underline{P}^{t'}) < G_{i_0}(\underline{\check{\rho}}^{i_0}; \underline{P}^{t'}). \tag{152}$$

Möglicherweise gilt $\check{p}_0^{i_0} > a$, aber wegen (146) existiert ein s, $0 < s \leqslant 1$, so dass

$$\check{\check{\underline{p}}}^{i_0} := s\,\check{\underline{p}}^{i_0} + (1-s)\,\hat{\underline{p}}^{i_0}(\underline{P}') \tag{153}$$

die Bedingung

$$0 \leqslant \check{\check{p}}_0^{i_0} \leqslant \alpha$$

erfüllt.

Die Konkavität von G_{i_0} im ersten Argument (Lemma 9.2) liefert uns weiter

$$G_{i_0}(\hat{\underline{p}}^{i_0}(\underline{P}'); \underline{P}') < G_{i_0}(\check{\check{\underline{p}}}^{i_0}; \underline{P}') \text{ (wegen (152), (153))}. \tag{154}$$

Weil $\check{\check{\underline{p}}}^{i_0}$ die Bedingungen (96), (97) erfüllt, erhalten wir einen Widerspruch zur Optimalität (98) von $\hat{\underline{p}}^{i_0}(\underline{P}')$.

Damit ist das Lemma bewiesen.

$$\underline{P}^* := \frac{1}{p_0^*}\underline{p}^*. \tag{155}$$

Wir wollen zeigen: $\underline{0} \in \hat{\underline{N}}(\underline{P}^*)$.

$$P_0^* \neq 0 \Longrightarrow \exists \tilde{t}, \text{ so dass } \underline{p}^t \in W_{\tilde{t}}\ \forall t \geqslant \tilde{t} \quad \text{(wegen (127))} \tag{156}$$

$$\Longrightarrow (\underline{p}^t, \underline{z}^t) \in \{(\underline{p}, \underline{z}) \mid \underline{p} \in W_{\tilde{t}}, \underline{z} \in \hat{\hat{\underline{N}}}^{\tilde{t}}(\underline{p})\}\ \forall t \geqslant \tilde{t} \tag{157}$$

$$\Longrightarrow (\underline{p}^*, \underline{z}^*) \in \{(\underline{p}, \underline{z}) \mid \underline{p} \in W_{\tilde{t}}, \underline{z} \in \hat{\hat{\underline{N}}}^{\tilde{t}}(\underline{p})\} \tag{158}$$

(denn $\hat{\hat{\underline{N}}}^{\tilde{t}}$ hat abgeschlossenen Graphen)

$$\underline{z}^* \in \hat{\underline{N}}(\underline{P}^*) \quad \text{(wegen (121))} \tag{159}$$

$$\underline{z}^* = \sum_{i=1}^{n} \hat{\underline{p}}^i(\underline{P}^*) - \sum_{i=1}^{n} \underline{r}^i \tag{160}$$

wobei $\hat{\underline{p}}^i(\underline{P}^*)$ die Bedingungen (96), (97), (98) erfüllt.

Wegen $\underline{P}^* * \underline{z}^* = \underline{0}$, $\underline{z}^* \leqslant 0$ (128), (129) gilt weiter

$$-\underline{0} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\underline{p}}^i(\underline{P}^*) - \sum_{i=1}^{n} \underline{r}^i \tag{161}$$

– $\tilde{\underline{p}}^i(\underline{P}^*)$ erfüllt (96), (97), (98). (162)

D.h. $\underline{0} \in \hat{\underline{N}}(\underline{P}^*)$. (163)

9.6. $\left(\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*),\,\underline{P}^*\right)$ *ist ein Gleichgewicht*

$\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*)$ ist wegen (161) ein erreichbarer Zustand von ε und erfüllt (96), (97), (98).
Es bleibt zu zeigen, dass auch gilt

$$\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*) \geqslant \underline{0} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{19}$$

$$\underline{P}^* * (\underline{\tilde{\rho}}^i(\underline{P}^*) - \underline{r}^i) \leqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{20}$$

$$G_i\,(\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*);\,\underline{P}^*) = \max\left\{G_i\,(\underline{\rho};\,\underline{P}^*) \mid \underline{\rho} \text{ erfüllt (19), (20)}\right\}. \tag{21}$$

Beweis (indirekt):

$\underline{\rho}'^i$ erfülle (19), (20) und es gelte

$$G_i\,(\underline{\rho}'^i;\underline{P}^*) > G_i\,(\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*);\,\underline{P}^*). \tag{164}$$

Weil $\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*)$ ein erreichbarer Zustand von ε ist, existiert s', $0 < s' \leqslant 1$, so dass

$$(a, a, \ldots, a) \geqslant s'\,\underline{\rho}'^i + (1-s')\,\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*) \geqslant \underline{0}. \tag{165}$$

Da G_i im ersten Argument konkav ist (Lemma 9.2.), folgt

$$G_i\left(s'\,\underline{\rho}'^i + (1-s')\,\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*);\,\underline{P}^*\right) > G_i\,(\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*);\,\underline{P}^*). \tag{166}$$

Also kann $\underline{\tilde{\rho}}^i\,(\underline{P}^*)$ nicht (96), (97) und (98) erfüllen.
Mit diesem Widerspruch ist der Existenzsatz bewiesen.

10. Bedingte Pareto-Optimalität

Beweis von Satz 2:

$(\underline{\rho}^1, \ldots, \underline{\rho}^n)$ sei ein erreichbarer Zustand von ε mit

$$G_i\,(\underline{\rho}^i;\,\underline{P}^*) \geqslant G_i\,(\underline{\rho}^{*i};\,\underline{P}^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \tag{167}$$

$$G_{i_0}\,(\underline{\rho}^{i_0};\,\underline{P}^*) > G_{i_0}\,(\underline{\rho}^{*i_0};\,\underline{P}^*) \quad \text{für ein } i_0 \in \{1, \ldots, n\}. \tag{168}$$

Das ist nur möglich, falls

$$\underline{P}^* * \underline{\rho}^{i_0} > \underline{P}^* * \underline{r}^{i_0} \text{ (Definition des Gleichgewichts)}. \tag{169}$$

Weil $(\underline{\rho}^1, \ldots, \underline{\rho}^n)$ ein erreichbarer Zustand ist, gilt aber

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{P}^* * \underline{\rho}^i = \sum_{i=1}^{n} \underline{P}^* * \underline{r}^i. \tag{170}$$

Es muss also $i' \in \{1, \ldots, n\}$ existieren mit

$$\underline{P}^* * \underline{\rho}^{i'} < \underline{P}^* * \underline{r}^{i'} \tag{171}$$

$$\underline{\tilde{\rho}}^{i'} := \underline{\rho}^{i'} + (\underline{P}^* * (\underline{r}^{i'} - \underline{\rho}^{i'}), 0, 0, \ldots, 0) \text{ erfüllt (19), (20).} \tag{172}$$

Da $w^{i'}$ strikt monoton wachsend ist, gilt

$$G_{i'}(\underline{\tilde{\rho}}^{i'}; \underline{P}^*) > G_{i'}(\underline{\rho}^{i'}; \underline{P}^*) \geqslant G_{i'}(\underline{\rho}^{*i'}; \underline{P}^*). \tag{173}$$

Folglich kann $(\underline{\rho}^{*1}, \ldots, \underline{\rho}^{*n}, \underline{P}^*)$ kein Gleichgewicht sein.
Mit diesem Widerspruch ist der Satz bewiesen.

11. Beweis der übrigen Sätze

11.1. Eindeutigkeit

Beweis von Satz 3:

$$G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) := \int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho})\, dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) \tag{174}$$

ist in $\underline{\rho}$ stetig.

(Die Stetigkeit weist man mit dem Satz von Lebesgue nach, denn es gilt

$$|\, w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}) \,| \leqslant \sup_{t \geqslant 0} w^i(t) \quad \forall \underline{\pi} \in \Omega_2,\ \underline{\rho} \geqslant \underline{0}\ .)$$

Für $\underline{P} > \underline{0}$ ist

$$\underline{\Lambda}^i(\underline{P}) := \{\underline{\rho} \geqslant \underline{0} \mid \underline{P} * (\underline{\rho} - \underline{r}^i) \leqslant 0\} \tag{175}$$

kompakt.
Wegen der Stetigkeit von $G_i(\underline{\rho}; \underline{P})$ in $\underline{\rho}$ erhalten wir:

Es existiert $\underline{\rho}^i(\underline{P}) \in \underline{\Lambda}^i(\underline{P})$ mit

$$G_i(\underline{\rho}^i(\underline{P}); \underline{P}) = \max\{G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) \mid \underline{\rho} \in \underline{\Lambda}^i(\underline{P})\}. \tag{176}$$

Jetzt weisen wir die Eindeutigkeit von $\underline{\rho}^i(\underline{P})$ nach.
Sei

$$\underline{\rho}^i{}_1(\underline{P}) \neq \underline{\rho}^i{}_2(\underline{P}), \tag{177}$$

dann gilt wegen der strikten Monotonie von w^i (Voraussetzung 1))

$$\underline{P} * \underline{\rho}^i{}_1(\underline{P}) = \underline{P} * \underline{\rho}^i{}_2(\underline{P}) = \underline{P} * \underline{r}^i. \tag{178}$$

Aus Voraussetzung 2) folgt

$$\underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i{}_1(\underline{P}) \neq \underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i{}_2(\underline{P}) \text{ auf einer Menge von positivem Mass } \left(F^i(.\,;\underline{P})\right). \tag{179}$$

Für $t \in (0,1)$ erhalten wir wegen der strikten Konkavität von w^i (Voraussetzung 1))

$$w^i\left(\underline{\pi}^i * [t\,\underline{\rho}^i{}_1(\underline{P}) + (1-t)\,\underline{\rho}^i{}_2(\underline{P})]\right) \geqslant t\,w^i\left(\underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i{}_1(\underline{P})\right) + (1-t)\,w^i\left(\underline{\pi}^i * \underline{\rho}^i{}_2(\underline{P})\right),$$

wobei auf einer Menge von positivem Mass strikte Ungleichheit auftritt. (180)
Daraus ergibt sich

$$G_i\left(t\,\underline{\rho}^i{}_1(\underline{P}) + (1-t)\,\underline{\rho}^i{}_2(\underline{P}); \underline{P}\right) > G_i\left(\underline{\rho}^i{}_1(\underline{P}); \underline{P}\right). \tag{181}$$

Aus diesem Widerspruch folgt die Eindeutigkeit von $\underline{\rho}^i(\underline{P})$.

$\underline{N}^i(\underline{P}) := \underline{\rho}^i(\underline{P}) - \underline{r}^i$ ist also für $\underline{P} > \underline{0}$ definiert und eindeutig.

11.2 Stetigkeit

Beweis von Satz 4:
Die Voraussetzungen von Satz 4 implizieren Existenz und Eindeutigkeit von $\underline{N}^i(\underline{P})$ für $\underline{P} > \underline{0}$ (Satz 3).
Um die Stetigkeit nachzuweisen, wählt man eine Umgebung

$$U_\delta := \left\{\underline{P} \in \Omega_1 \mid \| \underline{P}' - \underline{P} \| < \delta\right\} \quad (\delta = \tfrac{1}{2} \min_{h=0,\dots,m} P_h). \tag{182}$$

Setze

$$a > \sup_{\underline{P}' \in U_\delta} \frac{\underline{P}' * \underline{r}^i}{\min\limits_{h=0,\dots,m} P_h} \quad \text{(vgl. 9.1.)}. \tag{183}$$

Dann gilt

$$\underline{N}^i(\underline{P}') = \hat{\underline{N}}^i(\underline{P}') \quad \forall \underline{P}' \in U_\delta. \tag{184}$$

Gemäss dem Beweis des Existenzsatzes (9.3.) hat dann $\underline{N}^i(\underline{P}')$ für $\underline{P}' \in U_\delta$ abgeschlossenen Graphen.
Wegen der Eindeutigkeit folgt die Stetigkeit von $\underline{N}^i(\underline{P})$ in $\underline{P} > \underline{0}$ (vgl. [8], pp. 114, 118).
Die Beweisidee für den zweiten Teil des Satzes stammt aus [5], pp. 102–104.
Es existiere $\tilde{h} \in \{1, \ldots, m\}$ mit $P_{\tilde{h}} = 0$.
Dann ist $\underline{N}^i$ in $\underline{P}$ nicht definiert. (Wegen Voraussetzung 3) gilt nämlich $\pi_{\tilde{h}}^i > 0$ auf einer Menge mit positivem Mass.)
Um

$$\lim_{\underline{P}^\nu \to \underline{P}} \sum_{h=0}^{m} N_h^i(\underline{P}^\nu) = \infty \tag{185}$$

zu zeigen, nehmen wir an, es existiere eine Teilfolge $\{\underline{P}^{\nu'}\}_{\nu'=1}^{\infty}$, so dass

$$\{\underline{\rho}^i(\underline{P}^{\nu'})\}_{\nu'=1}^{\infty} \tag{186}$$

beschränkt ist.
O. B. d. A. existiert

$$\underline{\rho}^i := \lim_{\nu' \to \infty} \underline{\rho}^i(\underline{P}^{\nu'}). \tag{187}$$

Betrachte $\underline{\rho}'^i \geqslant \underline{0}$ mit

$$G_i(\underline{\rho}'^i; \underline{P}) > G_i(\underline{\rho}^i; \underline{P}). \tag{188}$$

Dann existiert $\lambda \in (0,1)$, so dass

$$G_i(\lambda \underline{\rho}'^i; \underline{P}) > G_i(\underline{\rho}^i; \underline{P}) \tag{189}$$

$$G_i(\lambda \underline{\rho}'^i; \underline{P}^{\nu'}) > G_i(\underline{\rho}^i(\underline{P}^{\nu'}); \underline{P}^{\nu'}) \qquad \forall \nu' > \nu_0 \tag{190}$$

(Stetigkeit von G_i gemäss 9.2.)

$$\Longrightarrow \underline{P}^{\nu'} * \lambda \underline{\rho}'^i > \underline{P}^{\nu'} * \underline{\rho}^i(\underline{P}^{\nu'}) = \underline{P}^{\nu'} * \underline{r}^i \quad \forall \nu' > \nu_0 \tag{191}$$

$$\Longrightarrow \lambda \underline{P} * \underline{\rho}'^i \geqslant \underline{P} * \underline{r}^i > 0 \quad (\text{Voraussetzung } ⓓ) \tag{192}$$

$$\Longrightarrow \underline{P} * \underline{\rho}'^i > \underline{P} * \underline{r}^i. \tag{193}$$

Wegen (188), (193) erhält man

$$\underline{\rho}^i(\underline{P}) = \underline{\rho}^i. \tag{194}$$

Aber $\underline{N}^i(\underline{P}) := \underline{\rho}^i(\underline{P}) - \underline{r}^i$ ist nicht definiert. Aus diesem Widerspruch folgt (185).

11.3. Differenzierbarkeit

Beweis von Lemma 1

i) $G_i(\underline{\rho}\,;\underline{P}) := \int w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}) f^i(\underline{\pi}\,;\underline{P})\, d\mu$ (195)

ist in $(\underline{\tilde{\rho}}, \underline{\tilde{P}})$ stetig.

Beweis

Wähle die Umgebungen

$$U_\delta := \{\underline{P} > \underline{0} \mid \| \underline{P} - \underline{\tilde{P}} \| < \delta\} \qquad \delta > 0 \tag{196}$$

(so dass Voraussetzung 2) erfüllt ist).

$$U_{\delta'} := \{\underline{\rho} \geqslant \underline{0} \mid \| \underline{\rho} - \underline{\tilde{\rho}} \| < \delta'\}, \qquad \delta' > 0. \tag{197}$$

Es gilt

$$\sup_{\underline{\pi} \in K,\, \underline{\rho} \in U_{\delta'}} w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}) < \infty \tag{198}$$

$$f^i(\underline{\pi}\,;\underline{P}) = f^i(\underline{\pi}\,;\underline{\tilde{P}}) + \sum_{h=1}^{m} (P_h - \tilde{P}_h) \frac{\partial f^i(\underline{\pi}\,;\underline{P})}{\partial P_h} \Bigg|_{\underline{P} = \underline{P}'} \tag{199}$$

Wegen Voraussetzung 3) existiert ein $d > 0$, so dass

$$\left| \sum_{h=1}^{m} (P_h - \tilde{P}_h) \frac{\partial f^i(\underline{\pi}\,;\underline{P})}{\partial P_h} \Bigg|_{\underline{P} = \underline{P}'} \right| < d \quad \forall \underline{P} \in U_\delta,\ \forall \underline{\pi} \in K. \tag{200}$$

Für $\underline{P} \in U_\delta$, $\underline{\rho} \in U_{\delta'}$ gilt deshalb

$$| w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}) f^i(\underline{\pi}\,;\underline{P}) | \leqslant \sup_{\underline{\pi} \in K,\, \underline{\rho} \in U_{\delta'}} w^i(\underline{\pi} * \underline{\rho}) [f^i(\underline{\pi}\,;\underline{\tilde{P}}) + d]. \tag{201}$$

Die Stetigkeit von G_i lässt sich nun mit dem Satz von Lebesgue herleiten.

ii) Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden.

ii1) $\underline{r}^i = \underline{0} \implies \underline{N}^i(\underline{P}) = \underline{\rho}^i(\underline{P}) = \underline{0} \quad \forall \underline{P} > \underline{0}.$ (202)

ii2) $\underline{r}^i \geqslant \underline{0}$.

Dann ist

$$\underline{\Lambda}^i : \underline{P} \rightsquigarrow \{\underline{\rho} \geqslant \underline{0} \mid \underline{P} * (\underline{\rho} - \underline{r}^i) \leqslant 0\} \tag{203}$$

in einer Umgebung von $\underline{\tilde{P}} > \underline{0}$ stetig.

Wegen der Stetigkeit von G_i ergibt dann das Maximumtheorem:
$\underline{\rho}^i(\underline{P})$ hat in einer Umgebung von $\underline{\tilde{P}} > \underline{0}$ abgeschlossenen Graphen.
Die Voraussetzungen 1) und 4) implizieren Eindeutigkeit von $\underline{\rho}^i(\underline{P})$ für $\underline{P} > \underline{0}$.
Somit sind $\underline{\rho}^i(\underline{P})$ und $\underline{N}^i(\underline{P})$ in $\underline{\tilde{P}} > \underline{0}$ stetig.

Beweis von Lemma 2

Anwendung des Satzes von Lebesgue (vgl. (196)–(201)).

Anwendbarkeit des Kuhn /Tucker-Theorems

G_i ist im ersten Argument konkav. Damit auch die Slater-Bedingung erfüllt ist, muss man $\underline{r}^i \geqslant \underline{0}$ voraussetzen.

$$(\underline{r}^i = \underline{0} \Longrightarrow \underline{\rho}^i(\underline{P}) = \underline{0} \forall \underline{P} > \underline{0}.)$$

Beweis von Satz 5

$$\underline{r}^i \geqslant \underline{0} \Longrightarrow \underline{\rho}^i(\underline{P}) \geqslant \underline{0} \quad \forall \underline{P} > \underline{0}. \tag{204}$$

Für $\underline{\tilde{P}} > \underline{0}$ existiert somit $h' \in \{0, ..., m\}$, so dass $\rho^i_{h'}(\underline{\tilde{P}}) > 0$.

Deshalb erhält man aus (42)

$$\lambda(\underline{\tilde{P}}) = -\frac{1}{\tilde{P}_{h'}} \frac{\partial G_i}{\partial \rho_{h'}} (\underline{\rho}(\underline{\tilde{P}}); \underline{\tilde{P}}). \tag{205}$$

Wegen Lemma 1 und 2 ist $\lambda(\underline{P})$ in $\underline{\tilde{P}} > \underline{0}$ stetig.
Wir definieren

$$\{h_1, ..., h_r\} := \{h \mid \rho_h{}^i(\underline{\tilde{P}}) > 0, 0 \leqslant h \leqslant m\}. \tag{206}$$

Aus Voraussetzung a) folgt

$$\frac{\partial G_i}{\partial \rho_h} (\underline{\rho}^i(\underline{\tilde{P}}); \underline{\tilde{P}}) + \lambda(\underline{\tilde{P}}) \tilde{P}_h < 0 \tag{207}$$

$$h \in \{0, ..., m\} \setminus \{h_1, ..., h_r\}.$$

Weil die linke Seite von (207) in $\underline{P}$ stetig ist (Lemma 1, 2, (205)), existiert ein $\delta'' > 0$, so dass

$$\frac{\partial G_i}{\partial \rho_h}(\underline{\rho}^i(\underline{P}); \underline{P}) + \lambda(\underline{P}) P_h < 0 \tag{208}$$

$$\forall h \in \{0, \ldots, m\} \setminus \{h_1, \ldots, h_r\}$$

$$\forall \underline{P} \in U_{\delta''} := \{\underline{P} > \underline{0} \mid \| \underline{P} - \tilde{\underline{P}} \| < \delta''\}.$$

Daraus ergibt sich

$$\rho_h^i(\underline{P}) = 0 \quad \forall \underline{P} \in U_{\delta''}, \quad h \in \{0, \ldots, m\} \setminus \{h_1, \ldots, h_r\}. \tag{209}$$

Die Funktionen

$$\Phi_j \quad j = h_1, \ldots, h_r, m + 1$$

sind in $(\rho_{h_1}, \ldots, \rho_{h_r}, \lambda, P_1, \ldots, P_m)$ stetig differenzierbar.

Falls die Matrix

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \cdots \dfrac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_k \, \partial \rho_l} \cdots & \begin{matrix} \vdots \\ P_k \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline \cdots P_l \cdots & 0 \end{array} \right)_{k, l \in \{h_1, \ldots, h_r\}} \tag{210}$$

für $\underline{P} = \tilde{\underline{P}}$ regulär ist, so sagt der Satz von der impliziten Funktion aus:

Die Funktionen $\rho_h^i(\underline{P})$, $h \in \{h_1, \ldots, h_r\}$ sind in einer Umgebung von $\tilde{\underline{P}}$ definiert und stetig differenzierbar.
Es bleibt zu zeigen

$$\det(J) \neq 0. \tag{211}$$

Annahme: Ein Vektor $x = (x_{h_1}, \ldots, x_{h_r}, x_{m+1}) \neq 0$ existiert, so dass

$$Jx = 0. \tag{212}$$

Speziell gilt dann

$$\sum_{l=1}^{r} P_{h_l} x_{h_l} = 0. \tag{213}$$

Aus (212) folgt

$$x^T Jx = \sum_{k,l=1}^{r} x_{h_l} x_{h_k} \frac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_{h_l} \, \partial \rho_{h_k}} + 2 x_{m+1} \sum_{l=1}^{r} x_{h_l} P_{h_l} = 0 \tag{214}$$

$$0 = \sum_{k,l=1}^{r} x_{h_l} x_{h_k} \frac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_{h_l} \partial \rho_{h_k}} = \int \underbrace{w^{i''}(\underline{\pi} * \underline{\rho})}_{< 0 \text{ (Voraussetzung 1))}} \left(\sum_{l=1}^{r} x_{h_l} \pi_{h_l} \right)^2 dF^i(\underline{\pi}; \underline{P}) \tag{215}$$

(215) ist mit Voraussetzung 4) nur vereinbar, falls

$$(x_{h_1}, \ldots, x_{h_r}) = 0. \tag{216}$$

Wegen (212) folgt daraus

$$(x_{h_1}, \ldots, x_{h_r}, x_{m+1}) = 0. \tag{217}$$

Mit diesem Widerspruch ist (211) bewiesen.

Möglichkeiten zur Verallgemeinerung

i) In den Beweisen wurde nicht verwendet, dass μ das Lebesgue-Mass ist. Es wurde nur verlangt $\mu(K) < \infty$ (K gemäss Voraussetzung 2)).
ii) Der Satz von Lebesgue lässt sich auch unter abgeschwächten Voraussetzungen anwenden.
iii) Diskrete Wahrscheinlichkeiten lassen sich darstellen durch

$$\sum_{l=1}^{\infty} v_l(\underline{P})\, \varepsilon_{\underline{x}^l(\underline{P})}, \text{ mit } \sum_{l=1}^{\infty} v_l(\underline{P}) = 1, \quad v_l(\underline{P}) \geqslant 0. \tag{218}$$

Dabei ist $\varepsilon_{\underline{x}^l}$ das Punktmass ($\varepsilon_{\underline{x}^l}(\{\underline{x}^l\}) = 1$).
$\underline{x}^l(\underline{P})$, $v_l(\underline{P})$ sei in $\underline{P} > \underline{0}$ differenzierbar.

Die Zielfunktion

$$G_i(\underline{\rho}; \underline{P}) := \sum_{l=1}^{\infty} w^i(\underline{x}^l(\underline{P}) * \underline{\rho})\, v_l(\underline{P}) \tag{219}$$

ist in $(\underline{\tilde{\rho}}; \underline{\tilde{P}})$ definiert und stetig, falls eine Umgebung U von $(\underline{\tilde{\rho}}; \underline{\tilde{P}})$ existiert, so dass

$$w^i(\underline{x}^l(\underline{P}) * \underline{\rho})\, v_l(\underline{P}) \leqslant K_l \quad \forall (\underline{\rho}, \underline{P}) \in U, \tag{220}$$

wobei $\sum_{l=1}^{\infty} K_l < \infty$.

Weiter existiert $\frac{\partial G_i}{\partial \rho_h}(\underline{\tilde{\rho}}, \underline{\tilde{P}})$, und es gilt

$$\frac{\partial G_i}{\partial \rho_h}(\underline{\tilde{\rho}}, \underline{\tilde{P}}) = \sum_{l=1}^{\infty} w^{i'}(\underline{x}^l(\underline{\tilde{P}}) * \underline{\tilde{\rho}})\, v_l(\underline{\tilde{P}})\, x^l_h(\underline{\tilde{P}}), \tag{221}$$

falls es eine Umgebung U' von $\underline{\tilde{\rho}}$ gibt, so dass

$$| \; w^{i'} (\underline{x}^l (\underline{\tilde{P}}) * \underline{\rho}) \, v_l (\underline{\tilde{P}}) \, x^l_h (\underline{\tilde{P}}) \; | \leqslant L_{l_h} \quad \forall \underline{\rho} \in U', \tag{222}$$

wobei $\sum_{l=1}^{\infty} L_{lh} < \infty$.

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_h \, \partial \rho_k}$, $\frac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_h \, \partial P_k}$ existieren, sind in $(\underline{\tilde{\rho}}, \underline{\tilde{P}})$ stetig, und es gilt

$$\frac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_k \, \partial \rho_h} (\underline{\tilde{\rho}}, \underline{\tilde{P}}) = \sum_{l=1}^{\infty} w^{i''} (\underline{x}^l (\underline{\tilde{P}}) * \underline{\tilde{\rho}}) \, v_l (\underline{\tilde{P}}) \, x^l_h (\underline{\tilde{P}}) \, x^l_k (\underline{\tilde{P}}) \tag{223}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_i}{\partial \rho_h \, \partial P_K} (\underline{\tilde{\rho}}, \underline{\tilde{P}}) = \sum_{l=1}^{\infty} \Bigg\{ & w^{i''} (\underline{x}^l (\underline{\tilde{P}}) * \underline{\tilde{\rho}}) \left[\sum_{q=0}^{m} \tilde{\rho}_q \frac{\partial x^l_q}{\partial P_k} \right] v_l (\underline{\tilde{P}}) \, x^l_h (\underline{\tilde{P}}) \\ & + w^{i'} (\underline{x}^l (\underline{\tilde{P}}) * \underline{\tilde{\rho}}) \left[\frac{\partial v_l}{\partial P_k} x^l_h (\underline{\tilde{P}}) + v_l (\underline{\tilde{P}}) \frac{\partial x^l_h}{\partial P_k} \right] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{224}$$

falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

Es existiert eine Umgebung U'' von $(\underline{\tilde{\rho}}, \underline{\tilde{P}})$, so dass

$$| \; w^{i''} (\underline{x}^l (\underline{P}) * \underline{\rho}) \, v_l (\underline{P}) \, x^l_h (\underline{P}) \, x^l_k (\underline{P}) \; | < M^1_{lhk} \quad \forall \, (\underline{\rho}, \underline{P}) \in U'', \tag{225}$$

wobei $\sum_{l=1}^{\infty} M^1_{lhk} < \infty$

$$\Bigg| \; w^{i''} (\underline{x}^l (\underline{P}) * \underline{\rho}) \left[\sum_{q=0}^{m} \rho_q \frac{\partial x^l_q}{\partial P_k} \right] v_l (\underline{P}) \, x^l_h (\underline{P})$$

$$+ \; w^{i'} (\underline{x}^l (\underline{P}) * \underline{\rho}) \left[\frac{\partial v_l}{\partial P_k} x^l_h (\underline{P}) + v_l (\underline{P}) \frac{\partial x^l_h}{\partial P_k} \right] \Bigg| < M^2_{lhk} \quad \forall (\underline{\rho}, \underline{P}) \in U''$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} M^2_{lhk} < \infty. \tag{226}$$

Ist für $F^i (\cdot \, ; \underline{P})$ der Ansatz (218) zulässig, so darf man die Voraussetzungen 2), 3) durch die Bedingungen (220), (222), 225), (226) ersetzen.

11.4. Systemstabilität

Beweis von Satz 6

$$z_1(p) < 0, \text{ falls } p > c. \tag{53}$$

Wegen (52) existiert $p_0 > 0$, so dass

$$z_1(p) > 0, \text{ falls } p < p_0. \tag{227}$$

i) $z_1(\tilde{p}) > 0$

$$\hat{p} := \inf\{p > \tilde{p} \mid z_1(p) < 0\} \tag{228}$$

($\hat{p}$ existiert wegen (53))

$$\psi(t;\tilde{p}) \leqslant \hat{p} \quad \forall t \geqslant 0 \tag{229}$$

(Beweis: $\psi(t;\tilde{p}) > \hat{p} \Longrightarrow \exists\, t''$, so dass

$$p'' := \psi(t'';\tilde{p}) > \hat{p} \tag{230}$$

$$z_1(p'') < 0. \tag{231}$$

Wegen (231) kann $\psi(t;\tilde{p})$ den Wert p'' nicht annehmen.
Widerspruch.)
Aus

$$\tilde{p} \leqslant \psi(t;\tilde{p}) \leqslant \hat{p} \quad \forall t \geqslant 0 \tag{232}$$

erhält man

$$z_1(\psi(t;\tilde{p})) \geqslant 0. \tag{233}$$

Somit ist $\psi(t;\tilde{p})$ monoton wachsend und beschränkt.

Folglich existiert

$$p^* = \lim_{t\to\infty} \psi(t;\tilde{p}). \tag{234}$$

Offensichtlich gilt

$$z_1(p^*) = 0. \tag{235}$$

ii) $z_1(\tilde{p}) < 0.$

Analoges Vorgehen wie bei i). (Statt (53) ist (227) zu verwenden.)

iii) $z_1(\tilde{p}) = 0.$

iii1) $\psi(t;\tilde{p}) = \tilde{p} \quad \forall t \geqslant 0.$ (236)

iii2) $\exists t' > 0$, so dass $\psi(t'; \tilde{p}) > \tilde{p}$ (237)

$\Longrightarrow \exists\ t'' > 0$, so dass $\frac{d}{dt}\psi(t''; \tilde{p}) > 0$ (238)

$\Longrightarrow z_1(\psi(t''; \tilde{p})) > 0$ (Fall i) anwenden). (239)

iii3) $\exists t' > 0$, so dass $\psi(t'; \tilde{p}) < \tilde{p}$ (240)

(Fall ii) anwenden).

Zusammenfassung

Ein Tauschmarkt mit Geld und Spekulationsgütern (Aktien, Anleihen, Rohstoffe) wird untersucht. Die Preiserwartungen der Marktteilnehmer hängen von den gegenwärtigen Preisen ab, und die Portefeuilles werden mit Neumannschen Nutzenfunktionen bewertet.
Zuerst lassen sich Existenz und bedingte Pareto-Optimalität eines Marktgleichgewichts nachweisen. Führt man einen Preismechanismus ein, so ergibt sich für den Fall eines einzigen Spekulationsgutes Systemstabilität.

Résumé

On examine un marché d'échange avec monnaies et des biens spéculatifs (actions, emprunts, matières premières). Chaque agent a des prix expectés qui dépendent des prix actuels. Les portefeuilles sont évalués par des fonctions d'utilité selon Neumann.
D'abord on peut prouver l'existence et l'optimalité conditionelle d'un équilibre du marché. Si un mécanisme de prix est introduit, on obtient la stabilité du système au cas d'un seul bien spéculatif.

Riassunto

Si esamina un mercato di scambi con denaro e beni speculativi (azioni, prestiti, materie prime). Ogni agente ha delle aspettative di prezzo che dipendono dai prezzi attuali. I portafogli sono valutati con le funzioni d'utilità di Neumann. Dapprima si può dimostrare l'esistenza e l'ottimalità condizionale di Pareto d'un equilibrio di mercato. Se si introduce un meccanismo di prezzo, si ottiene la stabilità del sistema nel caso di un sol bene speculativo.

Summary

A money and speculative goods exchange market (stocks, bonds, raw materials) is investigated. Each agent has price expectations depending on current prices. The portfolios are evaluated by Neumann utility functions. It is possible to establish existence and conditional Pareto optimality of a market equilibrium. If a price adjustment process is introduced, one obtains system stability in the case of a single speculative good.

Literaturverzeichnis

[1] *Allais*, L'extension des théories de l'équilibre général et du rendement social au cas du risque, Econometrica 1953, pp. 269–290.

[2] *Arrow K. J.*: Comment, Review of Economics and Statistics, 1963, pp. 24–27.

[3] *Arrow K. J.*: The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing, Review of Economic Studies, 1964, pp. 91–96.

[4] *Arrow K. J.*: Aspects in the Theory of Risk Bearing, Helsinki 1965.

[5] *Arrow K. J., Hahn F. H.*: General Competitive Analysis, Holden-Day, San Francisco, 1971.

[6] *Arrow K. J., Hurwicz L.*: On the Stability of the Competitive Equilibrium I, Econometrica *26* (1958), pp. 522–552.

[7] *Barten A. P., Kloek T., Lempers F. B.*: A Note on a Class of Utility and Production Functions Yielding Everywhere Differentiable Demand Functions, Review of Economic Studies, 1969.

[8] *Berge C.*: Espaces topologiques, Dunod, Paris, 1966.

[9] *Cass D., Stiglitz J. E.*: Risk Aversion and Wealth Effects on Portfolio with Many Assets, Review of Economic Studies 1972, pp. 331–354.

[10] *Davidson P.*: Money and Economic Growth, Econometrica 1968, pp. 291–321.

[11] *Debreu G.*: Théorie de la valeur.

[12] *Debreu G.*: New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis, International Economic Review 1962, pp. 257–273.

[13] *Dhrymes P. J.*: On a Class of Utility and Production Functions Yielding Everywhere Differentiable Demand Functions, Review of Economic Studies 1967, pp. 399–408.

[14] *Katzner D. W.*: A Note on the Differentiability of Consumer Demand Functions, Econometrica *36* (1968), pp. 415–418.

[15] *Lintner J.*: The Aggregation of Investor's Diverse Judgements and Preferences in Purely Competitive Security Markets, Journal of Financial and Quantitative Analysis 1969, pp. 347–400.

[16] *Loève*: Probability Theory.

[17] *Mossin J.*: Equilibrium in a Capital Asset Market, Econometrica 1966, pp. 768–783.

[18] *Nikaido H.*: Convex Structures and Economic Theory, Academic Press, New York, 1968.

[19] *Radner R.*: Equilibrium under Uncertainty, Econometrica 1968, pp. 31–58.

[20] *Radner R.*: New Ideas in Pure Theory: Problems in the Theory of Markets under Uncertainty, American Economic Review (Proceedings) 1970, pp. 454–460.

[21] *Radner R.*: Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets, Econometrica 1972, pp. 289–303.

[22] *Radner R.*: Equilibre des Marchés à Terme et au Comptant en Cas d'Incertitude, Cahiers du Séminaire d'Econométrie, Paris, C. N. R. S., 1966.

[23] *Samuelson P. A.*: The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of Means, Variances and Higher Moments, Review of Economic Studies 1970, pp. 537–542.

[24] *Sharpe W. F.*: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, Journal of Finance 1964, pp. 425–442.