

Irrfahrten in höheren Dimensionen

Autor(en): **Menzi, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisse = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **74 (1974)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967093>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Irrfahrten in höheren Dimensionen

Von H. Menzi, Zürich

Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenstellung der Resultate meiner Dissertation, welche unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. Bühlmann entstanden ist.

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ [\mathfrak{A} = Borel- σ -Algebra auf dem Raum Ω , P = Wahrscheinlichkeitsmass auf \mathfrak{A}] und eine Folge unabhängiger, gleichverteilter Zufallsvektoren $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^n , wobei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen ist und \mathbb{R}^n der n -dimensionale euklidische Raum bedeutet. Die Folge der Zufallsvektoren

$$S_1 = X_1, \quad S_2 = X_1 + X_2, \quad S_3 = X_1 + X_2 + X_3, \quad \dots$$

nennt man eine Irrfahrt im \mathbb{R}^n oder einen n -dimensionalen Erneuerungsprozess.

Als Beispiel kann man sich im dreidimensionalen Raum einen Massenpunkt vorstellen, der sich im Zeitpunkt 1 im Ort $S_1 = X_1 = (X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)})$, im Zeitpunkt 2 im Ort $S_2 = X_1 + X_2$ usw. befindet.

Im eindimensionalen Fall kann X_1 die Lebensdauer eines Elementes einer Ausscheidengesamtheit bedeuten. Wenn ein Element ausscheidet, wird es durch ein neues ersetzt, dieses wird im Falle seines Ausscheidens wiederum ersetzt usw. S_1, S_2, S_3, \dots sind dann die Summen der einzelnen (zufälligen) Lebensdauern.

Sei C eine beliebige Borelmenge im \mathbb{R}^n . Dann ist die durch

$$U[C] := \sum_{k=1}^{\infty} P[S_k \in C]$$

definierte Mengenfunktion ein Mass auf der Borel- σ -Algebra des \mathbb{R}^n . Man nennt $U[C]$ das Erneuerungsmass von C . Wenn $Z(C)$ die Zufallsvariable der Anzahl der S_k mit $S_k \in C$ ist und $E[Z(C)]$ der Erwartungswert von $Z(C)$ bezeichnet, dann lässt sich leicht zeigen, dass gilt:

$$E[Z(C)] = U[C].$$

Sei $S(y, a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq a\}$, wobei $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x^{(i)}|\}$ bedeutet (diese Norm wird im folgenden stets verwendet). Nun kann man in unserem ersten

Beispiel $U[S(0,1)]$ als die mittlere Anzahl der «Besuche» des Massenpunktes im Einheitsquader auffassen. Falls C im zweiten Beispiel das Zeitintervall $[0,t]$ ist, so lässt sich $U[C]$ als die erwartete Anzahl Ausscheidungsfälle während dieser Zeit interpretieren.

Für die Dimension Eins bewies Blackwell [2] und [3] unter der Voraussetzung, dass der Erwartungswert $E[X_1] > 0$ ist und X_1 nicht arithmetisch ist (X_1 nimmt nicht nur Werte an, die ein ganzzahliges Vielfaches einer Zahl $s > 0$ sind), als erster, dass für ein Intervall I der Länge Δ gilt:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} U[a+I] = \frac{\Delta}{E[X_1]} \quad \text{und} \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} U[a+I] = 0.$$

Falls $E[X_1] = \infty$, sind beide obigen Grenzwerte gleich Null.

Bickel und Yahav [1] zeigten nun, dass für Irrfahrten im \mathbb{R}^2 unter den Voraussetzungen, dass 1. die gewählte Norm im \mathbb{R}^2 polygonal ist, 2. der Erwartungsvektor $E[X_1]$ existiert und verschieden vom Nullvektor ist, 3. $E[X_1]$ nicht parallel zu einer Seite von $S(0,a)$ liegt, 4. die Irrfahrt nicht arithmetisch ist, der Blackwellsatz auch für die Dimension zwei in der folgenden Form gilt:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} U[S(O, a + \Delta) \setminus S(O, a)] = \frac{\Delta}{\|E[X_1]\|}.$$

In meiner Arbeit wird dieses Ergebnis auf alle endlichen Dimensionen verallgemeinert.

Der Vollständigkeit halber sei auch der folgende allgemeinere Satz aufgeführt: Sei $T_r^i(n)$ eine Teilmenge der Menge $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $1 \leq i \leq n$, bestehend aus r Elementen und sei $L_i(T_r^i(n), a, \Delta) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{(j)} > a \text{ für alle } j \in T_r^i(n), x^{(i)} \leq a \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \setminus T_r^i(n) \setminus \{i\}, a < x^{(i)} \leq a + \Delta\}$. Sei $E[X_1] > 0$ und $E[X_1^{(1)}] \geq E[X_1^{(2)}] \geq \dots \geq E[X_1^{(n)}]$, dann gilt:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{T_r^i(n)} U[L_i(T_r^i(n), a, \Delta)] = \frac{\Delta}{E[X_1^{(r+1)}]}$$

für $r = 0, 1, \dots, n-1$.

Im Falle $r = 0$ kann man daraus leicht den verallgemeinerten Blackwellsatz herleiten.

Es liegt nun nahe, zu fragen wie sich das Erneuerungsmass der Menge $S(0, a + \Delta) \setminus S(0, a)$ verhält, wenn $E[X_1] = 0$, $E[\|X_1\|^2] < \infty$ ist und a gegen ∞ geht. Darauf gibt der untenstehende Satz eine teilweise Antwort. Doch zunächst müssen wir die Begriffe «transiente» und »rekurrente» Irrfahrt und «Träger» eines Zufallsvektors einführen.

Definition: Eine Irrfahrt im \mathbb{R}^n heisst transient, wenn das Erneuerungsmass jeder kompakten Menge des \mathbb{R}^n endlich ist. Andernfalls heisst die Irrfahrt rekurrent.

Definition: Unter dem Träger $Tr(X)$ des n -dimensionalen Zufallsvektors X mit der Verteilungsfunktion $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, verstehen wir die Menge:

$$Tr(X) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \int_{y \in U(x)} X dF(y) > 0 \text{ für alle Umgebungen } U(x) \text{ von } x \right\}.$$

Satz: Sei $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Irrfahrt im \mathbb{R}^3 mit $E[X_1] = 0$ und $E[\|X_1\|^2] < \infty$. Dann ist $\lim_{a \rightarrow \infty} U[S(0, a + \Delta) \setminus S(0, a)] = \infty$, falls folgende beiden Kriterien erfüllt sind:

1. Das Erneuerungsmass der folgenden zwölf Mengen ist unendlich für beliebiges $\Delta > 0$:

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^{(i_1)} \leq \Delta, x^{(i_2)} \geq 0, x^{(i_3)} \geq 0\},$$

wobei $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3\}$ und $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_1$.

2. $\bigcup_{k=1}^{\infty} Tr(S_k)$ ist dicht im \mathbb{R}^3 .

Aus Gründen der Einfachheit wurde der Satz für die Dimension drei formuliert. Er gilt natürlich auch für höhere Dimensionen. Für die Dimensionen Eins und Zwei wird er gegenstandslos, da unter obigen Voraussetzungen dann jede Irrfahrt rekurrent ist (Chung und Fuchs [6]) und somit $U[S(0, a + \Delta) \setminus S(0, a)] = \infty$ ist für jedes a . Chung und Fuchs [6] zeigten auch, dass jede Irrfahrt im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, transient ist.

Beispiel 1: Der Satz gilt für jede symmetrische und nicht arithmetische Irrfahrt im \mathbb{R}^3 , falls $E[\|X_1\|^2] < \infty$ ist. Wir nennen dabei eine Irrfahrt symmetrisch im \mathbb{R}^3 , falls die vier Zufallsvektoren $X_1, (X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, -X_1^{(3)}), (X_1^{(1)}, -X_1^{(2)}, -X_1^{(3)}), -X_1$ gleichverteilt sind. Kriterium 1 ist aus Symmetriegründen erfüllt. Bickel und Yahav [1] zeigten, dass für symmetrische und nicht arithmetische Irrfahrten im \mathbb{R}^n $\bigcup_{k=1}^{\infty} Tr(S_k)$ stets dicht ist im \mathbb{R}^n .

Beispiel 2: Sei $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Irrfahrt im \mathbb{R}^3 mit $E[X_1] = 0$ und $E[\|X_1\|^2] < \infty$. Die X_1^i , $1 \leq i \leq 3$, seien voneinander unabhängig und die Verteilungsfunktion von X_1 besitze eine absolut stetige Komponente. Dann lässt sich zeigen, dass die beiden Kriterien erfüllt sind und somit die Aussage des Satzes auf diesen Fall anwendbar ist.

Literaturverzeichnis

- [1] *Bickel, P. J. and Yahav, J. A.* (1965): Renewal theory in the plane, *Ann. Math. Statist.* 36, 946–955.
- [2] *Blackwell, D.* (1948): A renewal theorem, *Duke math. J.* 15, 145–150.
- [3] *Blackwell, D.* (1953): Extension of a renewal theorem, *Pacific J. Math.* 3, 315–320.
- [4] *Chung, K. L.*: A course in probability theory, Harcourt, Brace & World, Inc. (1968).
- [5] *Feller, W.*: An introduction to probability theory and its applications, vol. II, New York, Wiley (1965).
- [6] *Fuchs, W. H. J. and Chung, K. L.* (1951): On the distribution of values of sums of random variables. *Mem. Am. Math. Soc.* 6, 1–12.

Zusammenfassung

Für Irrfahrten in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, werden hier einige Resultate zusammengestellt, die das asymptotische Verhalten des Erneuerungsmasses bestimmter Teilungen des \mathbb{R}^n zum Gegenstand haben.

Résumé

Pour des «marches aléatoires» dans \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, on montre quelques résultats ayant trait au comportement asymptotique de la mesure de renouvellement.

Riassunto

Per «cammini aleatori» in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, si riassumono alcuni risultati che hanno per oggetto il comportamento asintotico della misura di rinnovo di determinati insiemi parziali.

Summary

For random walks in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, some results are summarized which concern the asymptotical behaviour of the renewal measure of certain sets in \mathbb{R}^n .