

Note sur la durée de la rente certaine

Autor(en): **Chuard, Philippe**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **73 (1973)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555412>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Note sur la durée de la rente certaine

Par Philippe Chuard, Pully

1.

Considérons l'expression

$$V = A a_{\overline{n}|i}. \quad (1)$$

Elle lie quatre quantités :

- V la valeur initiale d'une rente certaine, immédiate et temporaire, dont les termes sont entiers, constants et payables postnumerando ;
- A le montant de chacun des termes périodiques ;
- i le taux d'intérêt (dont la durée de référence est la période) ;
- n la durée (exprimée en périodes).

Lorsque trois des quantités sont connues, on peut calculer la quatrième. Les résultats que l'on obtient si l'on cherche V , A ou i ne présentent aucune difficulté d'interprétation. Mais il n'en va pas de même pour n .

Ordinairement on définit $a_{\overline{n}|i}$ pour n entier. Cependant si l'on cherche n avec (1), les quantités V , A et i étant données, on trouve normalement une valeur qui n'est pas entière

$$n = N + f, \quad (2)$$

où N est un nombre entier positif ($N \in \mathbf{N}$) et f , un nombre réel positif inférieur à 1 ($0 < f < 1$). On doit alors se demander comment, en réalité, se présente la rente en question.

2.

Observons tout d'abord qu'il est facile de calculer n au moyen de V , A et i , même si l'on n'est pas au clair sur la signification précise et complète du résultat. En effet, si l'on admet que

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i}$$

est valable pour toute valeur de n , on tire de (1) et (2)

$$\frac{V}{A} = \frac{1 - v^{N+f}}{i} \quad (3)$$

et

$$N+f = \frac{\log \frac{A}{A - Vi}}{\log r} \quad (4)$$

où $r = 1 + i$.

On pourrait admettre que la rente dont la valeur initiale est $a_{\overline{N+f}|}$ comprend $N + 1$ termes dont les N premiers sont égaux chacun à 1 et dont le $(N + 1)^{\text{me}}$, qui suit le N^{me} d'une fraction f de période, est partiel et vaut p ($0 < p < 1$). La liaison entre la fraction de période f et le terme final partiel p s'établit avec

$$a_{\overline{N+f}|} = a_{\overline{N}|} + pv^{N+f}$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{r^f - 1}{i}.$$

Cette interprétation d'une durée non entière, pour une rente dont les termes sont payables postnumerando, est théoriquement admissible, mais elle ne correspond pas aux besoins de la pratique. En effet, dans la réalité, le terme partiel est échu *une période entière* (et non une fraction de période) après le dernier terme entier. Soit alors P ce terme partiel. Sa valeur s'obtient en capitalisant p pendant une fraction $1 - f$ de période,

$$P = r^{1-f} p,$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{1 - v^f}{d}, \quad (5)$$

où $d = iv$.

Si donc, partant de V , A et i , on obtient, par la relation (4) ou par une autre qui lui est équivalente, $n = N + f$, on peut dire que la rente est constituée de N termes valant chacun A et d'un $(N + 1)^{\text{me}}$, échéant une période après le dernier terme entier A , et valant AP , où P est donné par (5). La valeur trouvée pour n n'a donc pas tout-à-fait la signification d'une durée puisque l'intervalle de temps entre l'époque de calcul de V et l'échéance de AP est de $N + 1$ périodes.

3.

Le terme final P peut être calculé autrement que par les relations (4) et (5). En effet, partant de (1), on peut déterminer l'entier positif N par

$$\alpha_{\overline{N}|} < \frac{V}{A} < \alpha_{\overline{N+1}|}. \quad (6)$$

Puis on pose l'équation de valeurs actuelles

$$\frac{V}{A} = \alpha_{\overline{N}|} + P v^{N+1}$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{\frac{V}{A} - \alpha_{\overline{N}|}}{v^{N+1}}. \quad (7)$$

Cette relation est équivalente à (5), ce qu'on montre en introduisant (3) dans (7), mais elle est d'un emploi beaucoup plus simple.

4.

Il existe un procédé encore plus pratique pour calculer P . Partant de (1) et connaissant V , A et i posons que

$$N + F$$

est la valeur de la durée obtenue par interpolation linéaire de $\frac{V}{A}$ entre $\alpha_{\overline{N}|}$ et $\alpha_{\overline{N+1}|}$. On obtient

$$N + F = N + \frac{\frac{V}{A} - \alpha_{\overline{N}|}}{\alpha_{\overline{N+1}|} - \alpha_{\overline{N}|}}$$

d'où

$$F = \frac{\frac{V}{A} - \alpha_{\overline{N}|}}{v^{N+1}}. \quad (8)$$

En comparant (7) et (8) on constate que

$$P = F,$$

ce qui signifie que la partie non entière de la durée calculée par interpolation linéaire de $\frac{\ddot{V}}{A}$ entre $\ddot{a}_{\overline{N}|}$ et $\ddot{a}_{\overline{N+1}|}$ est égale exactement au terme final partiel (correspondant au terme entier 1). Ce résultat est remarquable car la durée interpolée $N + F$ n'a aucune signification pour elle-même. Cependant elle permet de calculer exactement et très facilement le terme final partiel P .

5.

Si nous considérons une rente dont les termes A sont payables praenumerando et que nous en désignons par \ddot{V} la valeur initiale, nous avons, au lieu de (1),

$$\ddot{V} = A\ddot{a}_{\overline{n}|}. \quad (9)$$

La partie entière N de n étant donnée par

$$\ddot{a}_{\overline{N}|} < \frac{\ddot{V}}{A} < \ddot{a}_{\overline{N+1}|},$$

le terme final partiel P , qui est le $(N + 1)^{\text{me}}$ de la rente dont la valeur initiale est $\frac{\ddot{V}}{A}$ et qui est payable une période après le N^{me} et dernier terme entier égal à 1, s'obtient avec

$$\frac{\ddot{V}}{A} = \ddot{a}_{\overline{N}|} + Pv^N$$

d'où

$$P = \frac{\frac{\ddot{V}}{A} - \ddot{a}_{\overline{N}|}}{v^N}. \quad (10)$$

Posons que $N + F$ est la valeur de la durée obtenue par interpolation linéaire de $\frac{\ddot{V}}{A}$ entre $\ddot{a}_{\overline{N}|}$ et $\ddot{a}_{\overline{N+1}|}$. On obtient

$$N + F = N + \frac{\frac{\ddot{V}}{A} - \ddot{a}_{\overline{N}|}}{\ddot{a}_{\overline{N+1}|} - \ddot{a}_{\overline{N}|}}$$

d'où

$$F = \frac{\frac{\ddot{V}}{A} - \ddot{a}_{\overline{N}|}}{v^N}$$

et, en comparant avec (10),

$$P = F.$$

On constate ainsi que pour la rente dont les termes sont payables *praenumberando*, comme pour celle dont les termes sont payables *postnumerando*, le terme final partiel peut être calculé selon le même procédé simple. Ce procédé est basé sur le calcul de la durée par interpolation linéaire de la valeur initiale de la rente. Le terme final partiel, correspondant au terme entier 1 et payable une période après le dernier terme entier, est égal à la partie non entière de la durée calculée par interpolation.

6.

Résumons ce qui précède.

Soit

n un nombre réel positif ($n \in \mathbf{R}^+$) et

N le plus grand entier compris dans n ($N = [n]$).

L'interprétation la plus utile de $\alpha_{\overline{n}|}$ est

la valeur actuelle, calculée au taux d'intérêt i , de $N + 1$ termes se succédant de période (durée de référence du taux i) en période, dont les N premiers valent chacun 1 (termes entiers) et dont le $(N + 1)^{\text{me}}$ est inférieur à 1 (terme final partiel) et échoit une période entière après le N^{me} , l'époque de calcul de la valeur actuelle étant placée une période avant l'échéance du premier terme.

Pour $\dot{\alpha}_{\overline{n}|}$ l'interprétation est la même que pour $\alpha_{\overline{n}|}$, mais l'époque de calcul de la valeur actuelle est placée au moment du paiement du premier terme.

Dans le cas de $\alpha_{\overline{n}|}$, comme dans celui de $\ddot{\alpha}_{\overline{n}|}$, le montant du terme final partiel est égal à la partie non entière de n , lorsque n est une valeur interpolée linéairement entre N et $N + 1$.

7.

La réciproque des développements qui précèdent est susceptible d'application. Considérons une rente dont les N premiers termes valent chacun A et dont le $(N + 1)^{\text{me}}$ et dernier vaut AP (où $0 < P < 1$). Précisons que, pour cette rente, l'intervalle de temps séparant les échéances de deux termes successifs est toujours égal à une période (durée de référence du taux d'intérêt i). On peut désigner la valeur actuelle initiale de cette rente par

\check{V} si l'époque de calcul est fixée une période avant l'échéance du premier terme A ,

\check{V} si l'époque de calcul est fixée au moment de l'échéance du premier terme A .

Ces valeurs actuelles se calculent avec

$$V = A \alpha_{\overline{N}|} + AP v^{N+1},$$

$$\dot{V} = A \ddot{\alpha}_{\overline{N}|} + AP v^N.$$

Mais, compte tenu des développements qui précèdent, on peut aussi procéder comme suit en faisant un calcul d'interpolation linéaire :

$$V = A \alpha_{\overline{N+P}|} \quad (\text{interp. lin.}),$$

$$\dot{V} = A \ddot{\alpha}_{\overline{N+P}|} \quad (\text{interp. lin.}),$$

où $\alpha_{\overline{N+P}|} (\text{interp. lin.}) = (1-P) \alpha_{\overline{N}|} + P \alpha_{\overline{N+1}|}$,

$$\ddot{\alpha}_{\overline{N+P}|} (\text{interp. lin.}) = (1-P) \ddot{\alpha}_{\overline{N}|} + P \ddot{\alpha}_{\overline{N+1}|}.$$

8.

Le lecteur qui souhaiterait se voir proposer des applications numériques pourra prendre connaissance des exemples suivants.

a) A l'exception de la dernière, les annuités constituant une rente valent chacune 3000. Au taux d'intérêt de 5% l'an la valeur actuelle de la rente, calculée un an avant l'échéance de la première annuité, vaut 24000. Quels sont le nombre des annuités et le montant de la dernière?

Données: $V = 24000$ $A = 3000$ $i = 0,05$

1^{er} calcul

$$N + f = \frac{\log 1,666667}{\log 1,05} = \frac{0,2218488}{0,02118930} = 10 + 0,46985$$

$$r^f = 1,05^{0,46985} = 1,0231888$$

$$v^f = \frac{1}{1,0231888} = 0,9773367$$

$$P = \frac{1 - 0,9773367}{0,05} 1,05 = 0,475929$$

2^e calcul

$$\frac{V}{A} = 8 \quad \alpha_{\overline{10}|} < \frac{V}{A} < \alpha_{\overline{11}|}$$

$$P = \frac{8 - \alpha_{\overline{10}|}}{v^{11}} = \frac{8 - 7,721735}{0,584679} = 0,475928$$

3^e calcul (par interpolation linéaire)

$$N+F = 10 + \frac{8 - \alpha_{\overline{10}|}}{\alpha_{\overline{11}|} - \alpha_{\overline{10}|}} = 10 + \frac{8 - 7,721735}{8,306414 - 7,721735} = 10 + 0,475928$$

La rente comprend 10 annuités de 3000 et une 11^{me} de

$$3000 \cdot 0,475928 = 1427,8$$

payable un an après la 10^{me}.

b) A l'exception de la dernière, les annuités constituant une rente valent chacune 8000. Au taux d'intérêt de 6% l'an la valeur actuelle de la rente, calculée à l'échéance de la première annuité, vaut 50000. Quels sont le nombre des annuités et le montant de la dernière?

Données: $\ddot{V} = 50000$ $A = 8000$ $i = 0,06$

$$\frac{\ddot{V}}{A} = 6,25 \quad \text{calcul par interpolation linéaire}$$

$$N+F = 7 + \frac{6,25 - \ddot{\alpha}_{\overline{7}|}}{\ddot{\alpha}_{\overline{8}|} - \ddot{\alpha}_{\overline{7}|}} = 7 + \frac{6,25 - 5,917324}{6,582381 - 5,917324} = 7 + 0,500222$$

La rente comprend 7 annuités de 8000 et une 8^{me} de

$$8000 \cdot 0,500222 = 4001,8$$

payable un an après la 7^{me}.

c) Quelle est la valeur actuelle de 31 mensualités dont les 30 premières valent chacune 200 et dont la 31^{me} vaut 50, si le taux d'intérêt est de 1,5% par mois et que l'époque de calcul est placée un mois avant l'échéance de la première mensualité?

Données: $N = 30$ $A = 200$ $AP = 50$ $i = 0,015$

1^{er} procédé

$$V = 200 a_{\overline{30}|} + 50 v^{31} = 200 \cdot 24,0158 + 50 \cdot 0,6303 = 4834,7$$

2^{me} procédé

$$n = 30 + \frac{50}{200} = 30,25$$

$$a_{\overline{30,25}|} \text{ (interp. lin.)} = 0,75 a_{\overline{30}|} + 0,25 a_{\overline{31}|} =$$

$$0,75 \cdot 24,0158 + 0,25 \cdot 24,6461 = 24,1734$$

$$V = 200 a_{\overline{30,25}|} \text{ (interp. lin.)} = 4834,7$$

Zusammenfassung

Der Autor untersucht das Problem der Interpretation von $a_{\overline{n}|}$, wenn n nicht eine ganze Zahl ist. Er gibt eine einfache Methode zur Berechnung der letzten Teilrente, die sich in diesem Fall ergibt.

Summary

The author interprets $a_{\overline{n}|}$ for n non integer valued. In this case he explains a simple method to compute the last partial annuity.

Résumé

L'auteur examine le problème d'interprétation que pose $a_{\overline{n}|}$ lorsque n n'est pas un nombre entier. Il indique un procédé simple permettant de calculer le terme final partiel qui intervient dans ce cas.

Riassunto

L'autore discute il problema dell'interpretazione di $a_{\overline{n}|}$, quando n non è intero. Descrive un metodo semplice per il calcolo dell'ultima rendita, ottenuta in questo caso.