

# Mathematische Modelle für das Invaliditätsrisiko und seine statistische Erfassung

Autor(en): **Lundberg, Ove**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **73 (1973)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555381>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## B.

# Wissenschaftliche Mitteilungen

## Mathematische Modelle für das Invaliditätsrisiko und seine statistische Erfassung

Von Ove Lundberg, Stockholm  
(Gastvortrag an der Mitgliederversammlung 1972 in Lausanne)

Modelle werden hier präsentiert, welche die statistische Verbindung zwischen Morbidität und Mortalität berücksichtigen. Wie diese Verbindung bei statistischer Beobachtung gewisser Todesursachen benutzt wird, ist im ersten Abschnitt dargestellt. Die im zweiten Abschnitt beschriebenen sehr begrenzten statistischen Ergebnisse durch Gruppierung von Invaliditätsversicherungen, je nachdem ob die Versicherung vom Tode oder dem Erreichen des höchsten Alters des Versicherungsvertrages beendet wird, motivieren das mathematische Modell. Nachdem das Modell im dritten Abschnitt dargestellt wird, will ich zuletzt eine praktische Anwendung des Modells andeuten. Meine Darstellung basiert auf schwedischen Verhältnissen.

### **1. Erforschung der Morbidität gewisser Krankheiten durch Studien der Todesursachen**

Der frühere stellvertretende Generaldirektor der schwedischen Versicherungsgesellschaft «Skandia-Leben» Dr. med. *Tage Larsson* hat sowohl in seinen Beiträgen «Mortality from cerebrovascular disease» [1] und «Interpretation of mortality and morbidity data» [2] als auch in dem Buch «Diabetes in Sweden» von 1967 [3] Angaben über Todesursachen gebraucht, um nicht nur die Mortalität, sondern auch die Morbidität dieser Krankheiten zu bestimmen. Er behauptet, dass für die beiden untersuchten Krankheiten diese Angaben vollständiger und zuverlässiger sind als für andere Krankheiten unter der Voraussetzung, dass nicht nur die primäre Ursache, sondern auch die sekundären Ursachen statistisch erfasst werden. Bei der Methode kann man unter gewissen

Voraussetzungen über stabile Risikoverhältnisse das Vorhandensein (Vorkommen) einer Krankheit in einer Population aus dem prozentuellen Anteil des Vorkommens der Krankheit bei den Verstorbenen schätzen. Bei der Verteilung auf Todesursachen gibt es in der schwedischen Mortalitätsstatistik seit 1961 Angaben in den Totenscheinen nicht nur über die primären Ursachen, sondern auch über Krankheiten, die in Verbindung mit dem Todesfalle von Interesse sein können. Die Angaben können jedoch bei einem plötzlichen Todesfall unvollständig sein.

Auf Grund des Vorkommens von Diabetes bei den eingetroffenen Todesfällen während der Jahre 1961–1963 hat Tage Larsson das Vorkommen von Diabetes Mellitus unter der schwedischen Bevölkerung in verschiedenen Altersgruppen und nach Geschlecht getrennt berechnet. Als Masszahl für das Vorkommen bei der Bevölkerung verwendet er den prozentuellen Anteil («death share») von Diabetesfällen unter den Todesfällen, dividiert durch das Verhältnis zwischen der Sterbewahrscheinlichkeit bei den Diabetes-Kranken und der allgemeinen Sterbewahrscheinlichkeit bei der Bevölkerung. Unter Beachtung von verschiedenen Umständen schätzt er das durchschnittliche Vorkommen von Diabetes in der ganzen männlichen schwedischen Bevölkerung über 15 Jahre auf 1,90% und für die weibliche Bevölkerung auf 3,10%.

Tage Larsson hat von diesem Mass des *Vorkommens* von Diabetes auch ein Mass für das *Eintreffen* des Zustandes, d. h. für die Erkrankung, abgeleitet. Er findet die kumulierte Wahrscheinlichkeit des Eintreffens für seine Zwecke als sehr geeignet. Dieses Mass, genannt «aggregate morbidity risk», sagt für ein bestimmtes Alter  $x$  aus, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, vor diesem Alter  $x$  an Diabetes zu erkranken, wenn man nicht früher aus anderen Ursachen stirbt. Für eine chronische Krankheit wie Diabetes, die heutzutage keine hohe absolute Sterblichkeit mit sich bringt – auch wenn sie im relativen Sinn in jüngeren Jahren hoch ist –, zeigt sich, dass das Mass «aggregate morbidity risk» nur wenig grösser ist als das Mass des Vorkommens der Krankheit bei demselben Alter. Es beträgt für das Alter von 90 Jahren 6,5% für Männer und 13,0% für Frauen. Diese Zahlen geben also die Wahrscheinlichkeit an, vor diesem Alter eine klinische Diabetes zu erhalten, wenn man nicht vorher an einer anderen Krankheit stirbt.

Ein anderes Bild zeigen die cerebrovaskulären Krankheiten, wo die Sterblichkeit sehr hoch ist. Für diese Krankheiten berechnet Tage Larsson das Mass «aggregate morbidity risk» durch Kumulierung der Sterbewahrscheinlichkeiten vom höchsten Alter an rückwärts. Er schlägt vor, bei diesem Mass eine Verschiebung des Alters um ein Jahr zu benutzen.

Über ähnliche Methoden, die von der stochastischen Verbindung zwischen Mortalität und Morbidität handeln, hat Dr. *I. Moriyama* vor der American Health Association im Jahre 1966 vorgetragen [4].

Die Frage, die wir uns stellen wollen, ist, ob die erwähnten Methoden benutzt werden können, um das Vorkommen von Invalidität zu schätzen, die mit einer gewissen Krankheit verbunden ist. Da ein solcher Zustand einen dauernden Verlust von Arbeitseinkommen bedeutet, sollte die Invalidität in den Statistiken besser erfasst sein als irgendein allgemeiner Krankheitszustand. Eine andere Frage, die wir uns stellen möchten, ist die, inwieweit die Methoden in einer privaten oder sozialen Invaliditätsversicherung verwendbar sind. Jedenfalls, wenn es um die Erforschung des Invaliditätsrisikos geht, sind Untersuchungen über die den Todesfällen vorangegangene Invalidität im Zusammenhang mit gewissen Krankheiten von grossem Interesse.

In einer Population von Kapital- oder Rentenversicherungen mit Prämienbefreiung bei Invalidität kann man beim Todesfall feststellen, ob diesem eine ununterbrochene Zeitspanne von Arbeitsunfähigkeit (zu welcher wir auch hochgradige Herabsetzung [mindestens zur Hälfte] der Arbeitsfähigkeit rechnen) vorangegangen ist. Sobald eine solche Zeitspanne infolge Krankheit oder Unfalls mehr als beispielsweise 3 Monate beträgt, wollen wir im folgenden solche Unfähigkeit als Invalidität bezeichnen.

Es wird angenommen, dass eine Krankheit, welche mit der Invalidität soweit zusammenhängt, dass sie eine primäre oder begleitende Ursache der Invalidität ist, auch beim Todesfall registriert wird, und dass umgekehrt eine beim Todesfall registrierte Krankheit auch eine Ursache der Invalidität ist. Das Register der schwedischen allgemeinen Versicherung über bewilligte Invalidenrenten liefert ab 1971 für neubeurteilte Invaliditäten nicht nur eine Diagnose, sondern Diagnosen von drei verschiedenen Krankheiten, die primäre oder begleitende Ursache der Invalidität sind.

Ich will folgende Formeldarstellung benutzen, um die «Diabetes-Methode» von Tage Larsson zu erläutern<sup>1</sup>:

$$(T.L.) \quad b_x^s = p_x^s : r_x^s = \frac{p_x^s \cdot q_x}{q_x^s},$$

<sup>1</sup> Die Darstellung gilt auch für Krankheiten, die nicht bis Ende des Lebens dauern, d. h. die nicht chronisch sind.

oder in einer Produktdarstellung

$$b_x^s \cdot q_x^s = q_x \cdot p_x^s,$$

- wo  $b_x^s$  = das Vorkommen der Krankheit  $s$  in der *Population* (des Alters  $x$ ),  
 $p_x^s$  = das Vorkommen (= «death share») der Krankheit  $s$  bei den *Todesfällen* im Alter  $x$  bis  $x + 1$  (die Krankheit  $s$  soll mindestens seit dem Alter  $x$  vorliegen),  
 $q_x$  = einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen in der gemischten Population,  
 $q_x^s$  = einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen, der von der Krankheit  $s$  belastet ist,  
 $r_x^s = \frac{q_x^s}{q_x} =$  «mortality ratio» für die Krankheit  $s$ .

In der Produktdarstellung stellt die obige Formel die Gleichheit der beiden Wahrscheinlichkeiten eines  $x$ -jährigen dar: einerseits, dass er mit der Krankheit  $s$  lebt und vor dem Alter  $x + 1$  stirbt, und andererseits, dass er vor dem Alter  $x + 1$  stirbt, und dass er dabei mindestens seit dem Alter  $x$  die Krankheit  $s$  gehabt hat.

Mit derselben Methode kann man unter den erwähnten Voraussetzungen auch das Vorkommen der folgenden kombinierten Ereignisse schätzen, nämlich:

1. Wie oft kommt in einer Population Invalidität von einer gewissen Dauer vor, welche mit einer gewissen Krankheit  $s$  verbunden ist?
2. Welches Vorkommen hat eine Krankheit  $s$  in einer Population von Invaliden mit einer Invalidität von gewisser Dauer  $t$ ?
3. Wie oft kommt Invalidität von einer gewissen Dauer  $t$  unter den Versicherten einer Population vor, welche mit einer gewissen Krankheit  $s$  belastet sind?

Schliesslich können wir ohne Rücksicht auf die Art der vorliegenden Krankheit fragen:

4. Wie oft kommt in einer Population – ohne Rücksicht auf eine besondere Krankheit – Invalidität von gewisser Dauer  $t$  vor?

Unter Verwendung analoger Definitionen gilt für das Vorkommen von Invalidität in der Population  $b_x^i(t)$  die folgende Gleichung:

$$b_x^i(t) \cdot q_x^i(t) = q_x \cdot p_x^i(t),$$

wobei der Parameter  $t$  darauf hinweist, dass es sich um Invalidität von genau der Dauer  $t$  handelt.

Die Sterbewahrscheinlichkeit  $q_x^i(t)$  unter den Invaliden ist für festes  $x$  (= Alter beim Tode) eine stark abnehmende Funktion von  $t$ . Für grosses  $t$  nähert sie sich erfahrungsmässig der Durchschnittswahrscheinlichkeit  $q_x$ .

Die Verwendbarkeit der obigen Formel hängt teils von der Stabilität der Risikoverhältnisse ab, teils von den praktischen Möglichkeiten die verschiedenen «mortality ratios» zu schätzen.

Die Voraussetzungen für eine mathematische Berechnung des Vorkommens der Invalidität in einer Versicherungspopulation mit freiwilliger Auslese sind selten erfüllt. Die Berechnungen laut der obigen Formel werden darum oft unsicher und können nicht für versicherungstechnische Berechnungen verwendet werden.

Wenn es aber möglich ist, eine Anomaliengruppe von Versicherten mit einer chronischen Krankheit  $s$  separat zu behandeln, so werden in dieser Gruppe sowohl alle Todesfälle als auch alle Invaliditäten mit der Krankheit  $s$  verbunden. Bei den Studien von Anomaliengruppen ist es von Interesse herauszufinden, wie oft eine primäre Ursache der Invalidität, beziehungsweise des Todes, mit der Anomalie  $s$  zusammenhängt. Wir können dabei auf die Arbeiten hinweisen, mit welchen die Organisation Cointra sich beschäftigt.

Handelt es sich darum, das Mass der Invalidität in Verbindung mit solchen Krankheiten zu bestimmen, bei welchen die Sterblichkeit unter den Invaliden, und damit die «mortality ratio», sehr gross ist, z.B. für cerebrovaskuläre Krankheiten und für viele Tumorkrankheiten, kann die andere Methode von Tage Larsson benutzt werden. Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von Invalidität in Verbindung mit solchen Krankheiten wird nach dieser Methode mit Hilfe der entsprechenden Sterbewahrscheinlichkeit geschätzt. Die Wahrscheinlichkeit wird aber als das Produkt dieser Sterbewahrscheinlichkeit und der Häufigkeit von Invalidität bei dem betreffenden Verstorbenen berechnet. Eine gewisse Altersverschiebung entsteht wegen des zeitlich verschiedenen Eintreffens der Invalidität und des Todesfalles. Als Mass der Altersverschiebung kann man die durchschnittliche Dauer der eingetroffenen Invaliditäten verwenden.

In Fällen von Invalidität in Verbindung mit einem langdauernden Zustand infolge chronischer Krankheiten, wie z. B. vieler organischer Nervenkrankheiten, gewisser psychischer und vieler rheumatischer Krankheiten, werden die beiden erwähnten Methoden unsicher. Todesfälle, die bei solchen Zuständen von Invalidität eintreffen, kommen nämlich oft bei höheren Altern vor, wobei die Angaben der erwähnten Krankheiten in den Totenscheinen unvollständig sein können. (In seinem Studium von Patienten, die an Dementia Senilis leiden,

braucht Tage Larsson Angaben über das Befinden zur Zeit der Aufnahme in das Krankenhaus, um die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von der Krankheit zu berechnen. Diese Aufzeichnungen liefern meistens nicht nur den Zeitpunkt der Aufnahme, sondern auch den ungefähren Zeitpunkt des Beginns der Krankheit.)

## 2. Beobachtungen von Invalidität, einerseits bei den Verstorbenen und andererseits bei den Versicherten, die das höchste Alter des Versicherungsvertrages erreicht haben

Um den Zusammenhang zwischen Morbidität und Mortalität zu beleuchten zeige ich eine vorläufige Untersuchung auf Grund von Material der Versicherungsgesellschaft Eir betreffend solche Kranken- und Invaliditätsversicherungen, die entweder infolge eines Todesfalles oder des erreichten höchsten Alters (Schlussalter) im Versicherungsvertrag abgelaufen sind [5]. Für jede dieser Gruppen ist die Häufigkeit des Eintreffens und die durchschnittliche Dauer der Arbeitsunfähigkeitsperioden berechnet. Die Untersuchung bezieht sich auf Versicherungen, die zusammen mit einer Lebensversicherung von Männern in den Jahren 1940–1949 abgeschlossen worden sind. Die Abläufe verteilen sich auf die Jahre 1955–1964. Jede Arbeitsunfähigkeit von mindestens 50%, die länger als 3 Monate dauert, wird Invalidität genannt.

Tafel 1: Statistik von verschiedenen Gruppen von Versicherten

	Anzahl von Versicherten		Häufigkeit von Invalidität in Promille der totalen beobachteten Zeit		Gesamte Zeit von Invalidität in Prozenten der totalen beobachteten Zeit	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	lk	kk	lk	kk	lk	kk
Gruppe:			‰	‰	%	%
Schlussalter erreicht	281	164	13	18	1,7	1,6
Frühe Todesfälle (–53 Jahre)	77	60	42	47	3,3	6,7
Späte Todesfälle (53– Jahre)	90	54	52	65	6,6	10,3

lk = Versicherungen mit einer Wartezeit von mindestens 3 Monaten.  
kk = Versicherungen mit einer Wartezeit kürzer als 3 Monate.  
(Auch für die Gruppe kk werden Perioden von Arbeitsunfähigkeit unter 3 Monaten nicht betrachtet.)

Versicherte die vor dem Schlussalter gestorben sind, weisen in den Kolonnen (2) und (3) dieser Tabelle höhere durchschnittliche Risikozahlen auf als Versicherte, die das Schlussalter erreichen. Die Risikozahlen, die gemäss der Tafel für späte Todesfälle durchschnittlich höher als für die frühen sind, erweisen, wie erwartet, gemäss hier nicht vorgelegter Statistik von Eir eine starke jährliche Steigerung bis zu dem Jahr des Todes.

Von speziellem Interesse ist der Anteil der während der Dauer der Invalidität eingetroffenen Todesfälle. Man erkennt daraus die relative Bedeutung dieser «Todes-Invaliditäten», verglichen mit der Gesamtdauer aller Perioden von Invalidität, d. h. einschliesslich von Perioden die von Reaktivierungen unterbrochen sind. Folgende Tafel illustriert dies.

Tafel 2: Statistik über die Verstorbenen

Alter bei dem Todesfall	Anzahl von Todesfällen		Anzahl der «Todes-Invaliditäten» in Prozenten der Anzahl Todesfälle		Gesamte Zeit in Monaten von Invalidität pro Anzahl Todesfälle		Gesamte Zeit von «Todes-Invalidität» in Prozenten von (3)	
	(1)	(2)	(2)	(3)	(3)	(4)	(4)	
	lk	kk	lk	kk	lk	kk	lk	kk
			%	%			%	%
-53	77	60	21	37	12	24	51	88
53-67	90	54	40	52	21	29	75	80

Zwischen 20 und 40% der Anzahl Todesfälle in den Jahren bis 53 sind während den Perioden von Invalidität eingetroffen. In den höheren Altersgruppen waren die entsprechenden Zahlen 40-50%.

Jeder frühe Todesfall war gemäss der Kolonne (3) von 12 bis 24 Monaten Invaliditätsdauer und jeder späte Todesfall von 21 bis 29 Monaten Invaliditätsdauer begleitet. Mehr als die Hälfte und in drei von vier Gruppen drei Viertel oder mehr von der totalen Invaliditätsdauer bezogen sich gemäss der Kolonne (4) auf die ununterbrochenen Perioden («Todes-Invaliditäten»), die mit dem Tod endeten. Es wäre aber natürlicher, Rückfälle, die nach kurzer Unterbrechung eintreffen, mit der früheren Periode zusammenzurechnen. In diesem Falle würden die «Todes-Invaliditäten» im Verhältnis zu der gesamten Invaliditätsdauer noch mehr Bedeutung erhalten.



Unter den Versicherten die das Schlussalter  $z$  erreicht haben, bekommt man aus dem Material von Eir die Zahlen in der folgenden Tafel.

*Tafel 3:* Statistik über die Versicherten, die das Schlussalter erreicht haben

Alter im Zeitpunkt des Beginns der Krankheitsperiode	Zeit in Jahren als Aktiver		Anzahl der Perioden von Invalidität		Gesamte Zeit in Jahren von Invalidität		Häufigkeit von Invalidität in Promille von (2) = $\frac{(3)}{(2)} \cdot 1000$		Gesamte Zeit von Invalidität in Prozenten von (2) = $\frac{(4)}{(2)} \cdot 100$	
	lk	kk	lk	kk	lk	kk	lk	kk	lk	kk
–55	1843	1250	17	15	14,9	18	9	12	0,8	1,4
55– $z$	2211	1220	37	29	56,5	23	17	24	2,6	1,9
Summe	4054	2470	54	44	71,4	41	13	18	1,8	1,7

Beide diese Gruppen lk und kk zeigen eine Abhängigkeit vom Alter, die viel schwächer ist als die Gruppen der Verstorbenen. Eine Untersuchung zeigt auch, dass die Abhängigkeit vom Alter hauptsächlich von solchen Invaliditäten stammt, die beim Erreichen des Schlussalters noch andauern. Die Anzahl dieser Versicherten ist 4,6% (lk) und 4,9% (kk) von der ganzen Anzahl von Versicherten, die das Schlussalter erreicht haben. Diese Fälle repräsentieren aber mehr als die Hälfte der gesamten Zeit der Invalidität dieser Versicherungen.

In allen drei Tafeln sind die Häufigkeitszahlen für die Versicherungen mit kurzer Wartezeit (kk) höher als für die mit längerer Wartezeit (lk). Das stimmt gut mit den Resultaten aus anderem schwedisches Material überein.

### 3. Mathematisches Modell für das Risiko permanenter Invalidität

Unter Beachtung der erwähnten Ergebnisse der vorläufigen Untersuchungen in der Versicherungsgesellschaft Eir habe ich die Methode von Tage Larsson anzuwenden versucht, um ein mathematisches Modell für das Risiko permanenter Invalidität zu erhalten, d. h. solcher Invalidität, die vom Tode oder dem

Erreichen des höchsten Alters im Versicherungsvertrag gefolgt wird. Das Modell mag in der Schweiz wohlbekannt sein, da man ja hier Zusatzversicherungen zu den Lebensversicherungen kennt, die bei der Auszahlung der Versicherungssumme auch Entschädigung für Invalidität vor dem Tode leisten.

Wir wollen die Dauer der Invalidität vor dem Todesfall bzw. vor dem höchsten Alter  $z$  als stochastische Variablen definieren. Es ist angenommen, dass diese stochastischen Variablen für Todesalter  $y$  bzw. Alter  $z$  die Verteilungsfunktionen  $P_y(t)$  und  $K_z(t)$  haben, welche in folgender Weise bestimmt sind. Wir bezeichnen mit  $t_0$  die Minimaldauer der Invalidität. Für  $t < t_0$  sind die Verteilungsfunktionen gleich 0. Wenn  $t \geq t_0$  und  $y \leq z$ , gelten

$1 - P_y(t)$  = die Wahrscheinlichkeit dass vor dem Tode im Alter  $y$  Invalidität seit einer Dauer  $> t \geq t_0$  vorgelegen hat.

$1 - K_z(t)$  = die Wahrscheinlichkeit dass für einen  $z$ -jährigen während seines Lebens Invalidität seit einer Dauer  $> t \geq t_0$  vorgelegen hat.

Jede der Funktionen hat einen Sprung für  $t = t_0$ , gleich  $P_y(t_0)$  und  $K_z(t_0)$ , wobei

$P_y(t_0)$  = die Wahrscheinlichkeit, dass keine Invalidität vor dem Todesfall im Alter  $y$  vorliegt, und

$K_z(t_0)$  = die Wahrscheinlichkeit, dass keine Invalidität für den  $z$ -jährigen vorliegt.

Die erwähnten Wahrscheinlichkeiten müssen natürlich auch vom Eintrittsalter  $x_0$  abhängen, aber wir können hier davon absehen, wenn  $y$  genügend gross gewählt worden ist.

Die erwähnten Studien von Eir (Tafel 1) zeigen die grossen Unterschiede des Invaliditätsmasses zwischen den drei verschiedenen Gruppen: Schlussalter erreicht, frühe Todesfälle und späte Todesfälle. Die Funktion  $P_y(t)$  für  $y = z$  muss deshalb von  $K_z(t)$  verschieden sein;  $P_y(t)$  ist eine vom Parameter  $y$  abhängige Funktion von  $t$ .

Man kann voraussetzen, dass für die Wahrscheinlichkeiten, dass keine Invalidität vorliegt, folgendes gilt:

$$K_z(t_0) > P_y(t_0) > P_z(t_0). \quad (y < z).$$

Für die mittlere Dauer gilt

$$\int_{t_0}^{z-x} t dK_z(t) < \int_{t_0}^{y-x} t dP_y(t) < \int_{t_0}^{z-x} t dP_z(t).$$

$P_y(t)$  ermittelt als Funktion von  $t$  die Verteilung des Risikos von vorhergehender Invalidität bei einem im Alter  $y$  eingetroffenen Todesfall.  $K_z(t)$  ermittelt als Funktion von  $t$  die Verteilung des Risikos von vorhergehender Invalidität beim Erreichen des Alters  $z$ . Mit Hilfe dieser Funktionen lassen sich demnach die Wahrscheinlichkeiten des grössten Risikos in Verbindung mit Todesfall oder erreichtem Alter ermitteln.

Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der erwähnten beiden Ereignisse sind aus der Sterbetafel der Population gegeben, wobei

$\mu_y$  = die Intensitätsfunktion des Todesereignisses für einen  $y$ -jährigen der Population

und für die Ausscheideordnung  $l_y$

$$-\frac{d l_y}{d y} = l_y \mu_y.$$

Um den Zusammenhang zwischen Invaliddität und Sterblichkeit näher zu beleuchten, definieren wir die Funktionen

$i_x$  = die Intensitätsfunktion für einen  $x$ -jährigen des Eintreffens von permanenter Invalidität die (früher oder später) vom Tode gefolgt wird,

$\mu_{[x]+t}^i$  = die Intensitätsfunktion des Todesereignisses eines  $x$ -jährigen, der seit  $t$  Jahren permanent invalid gewesen ist ( $t \geq t_0$ ),

und

$$-\frac{d l_{[x]+t}^i}{d t} = l_{[x]+t}^i \cdot \mu_{[x]+t}^i$$

wobei  $l_{[x]+t}^i$  die Ausscheideordnung der permanenten Invaliden bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses – erstens im Alter  $x$  einen Zustand von Invalidität, die vom Tode erfolgt ist, zu erreichen, und zweitens genau bis zum Alter  $y$  (als Invaliden) zu leben – ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit, im Alter  $y$  zu sterben, und der bedingten Wahrscheinlichkeit der Invalidität seit genau dem Alter  $x$  des Verstorbenen im Alter  $y$ , d. h.

$$i_x dx \frac{l_{[x]+y-x}^i}{l_{[x]+t_0}^i} \cdot \mu_{[x]+y-x}^i dy = \frac{l_y}{l_x} \mu_y dy \cdot d_x P_y(y-x).$$

Mit der Bezeichnung  $\varrho_y(t) = -\frac{dP_y(t)}{dt}$  erhalten wir die Gleichung

$$i_x \cdot \frac{l_{[x]+y-x}^i}{l_{[x]+t_0}^i} \cdot \mu_{[x]+y-x}^i = \frac{l_y}{l_x} \cdot \mu_y \cdot \varrho_y(y-x). \quad (1)$$

Integriert man die beiden Seiten der Gleichung über  $y$  von  $y = x + t_0$  bis  $y = z$ , erhält man für ein festes Invalidisierungsalter  $x$  die Gleichung

$$i_x \left[ 1 - \frac{l_{[x]+z-x}^i}{l_{[x]+t_0}^i} \right] = \int_{x+t_0}^z \frac{l_y}{l_x} \mu_y \varrho_y(y-x) dy. \quad (2)$$

Bezeichnen wir  $k_z(t) = -\frac{d}{dt} K_z(t)$  und ist  $z$  gross genug, um anzunehmen, dass Invaliditäten beim Erreichen des Alters  $z$  später vom Tode erfolgt werden, so gilt offenbar

$$i_x \frac{l_{[x]+z-x}^i}{l_{[x]+t_0}^i} = \frac{l_z}{l_x} k_z(z-x). \quad (3)$$

Addieren wir die beiden Gleichungen (2) und (3), erhalten wir

$$i_x = \int_{x+t_0}^z \frac{l_y}{l_x} \mu_y \varrho_y(y-x) dy + \frac{l_z}{l_x} k_z(z-x). \quad (4)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Intensitätsfunktion  $i_x$  durch die Sterbetafel der ganzen Population und die beiden Funktionen  $\varrho_y(y-x)$  und  $k_z(z-x)$

bestimmt ist. Die Abscheideordnung  $l_{[x]+t}^i$  ist danach durch (1) bestimmt. Definieren wir für jedes  $y < z$  die Funktion  $k_y(y-x)$  mit Hilfe der Gleichung (3), als  $y$  für  $z$  eingesetzt wird, so erhält man von (1) und (3) die Gleichung

$$k_y(y-x) = \varrho_y(y-x) : \frac{\mu_{[x]+y-x}^i}{\mu_y} . \quad (5)$$

Diese Gleichung kann folgendermassen ausgedrückt werden :

Die Anzahl von Invaliden seit dem Zeitpunkt des Alters  $x$  unter den  $y$ -jährigen, die leben, ist gleich dem Quotienten der Anzahl von Invaliden seit dem Alter  $x$  unter den Verstorbenen im Alter  $y$ , dividiert durch den Wert von «mortality ratio» (siehe Abschnitt 1) der Invaliden seit dem Alter  $x$ .

Setzen wir  $y-x = u$  in (5) und integrieren wir beide Seiten der Gleichheit über  $u$  von  $t_0$  bis  $t$ , erhalten wir für  $y \leq z$  und  $t > t_0$

$$K_y(t_0) - K_y(t) = \mu_y \int_{t_0}^t \frac{\varrho_y(t)}{\mu_{[y-t]+t}^i} dt.$$

Die Funktion wird damit auch für  $y < z$  definiert, wenn  $K_y(t_0)$  bekannt ist. Für  $y = z$  gibt die Definition der Absterbeordnung  $l_{[x]+t}^i$  laut (1), mit  $i_x$  von (4) bestimmt, dieselbe Funktion  $\mu_{[x]+t}^i$  wie die durch von  $\varrho_z(t)$  und  $k_z(t)$  laut (5) bestimmte. Die Funktionen  $P_y(t)$  und  $K_z(t)$  mögen durch direkte Beobachtungen statistisch bestimmt werden. Man muss sich jedoch darüber im klaren sein, dass eine Versicherungspopulation zu veränderlich ist, um  $\varrho_y(y-x)$  als Funktion von  $y$  für grosse Werte von  $y-x$  statistisch berechnen zu können. Es scheint, als ob die numerische Integration ohne gewisse Annahmen über die Funktionen auch in der Durchführung kompliziert ist.

Risikoteoretisch sind die Funktionen vor allem für grosse  $t$ -Werte von Interesse.

Analoge Gleichungen wie (1), (3) und (5) gelten, wenn man die Invaliditätsfunktionen der kombinierten Invaliditäts- und Krankengeldversicherung benutzt. In diesem Falle benutzt man in Schweden eine Invalidierungsintensität  $\nu_x$  und eine Ausscheideordnung  $\lambda_{[x]+t}$  der Invaliden infolge Todes und Reaktivierung. Mit Kenntnis dieser Grundlage, einschliesslich der Sterblichkeit  $\mu_{[x]+t}^\lambda$  der Invaliden und der Sterblichkeit  $\mu_{x+t}$  der ganzen Bevölkerung, können wir die Funktionen  $\varrho_y(t)$  und  $k_z(t)$  der entsprechenden Gleichungen, (1) und (3), bestimmen. Diese Gleichungen enthalten dann  $\nu_x$  statt  $i_x$ ,  $\lambda_{[x]+t}$  statt  $l_{[x]+t}^i$  und  $\mu^\lambda$  statt  $\mu^i$ .

#### 4. Praktische Anwendung des Modells

Das Modell, welches oben dargestellt worden ist, kann als ein Hilfsmittel angesehen werden, um die interessantesten Teile des Invaliditätsrisikos zu studieren. Das Risiko einer vollständigen oder hochgradigen Invalidität infolge Krankheit oder Unfalls – welches man in der Schweiz unter der Bezeichnung kombinierte Invaliditäts- und Krankengeldversicherung deckt – kann in folgende drei Komponenten zerlegt werden.

- A. Das Risiko einer solchen Invalidität, die vom Tode vor dem Erreichen des höchsten Alters im Versicherungsvertrag erfolgt ist.
- B. Das Risiko einer Invalidität, während der Zeit des Versicherungsvertrages, die vom Tode nach dem Erreichen des höchsten Alters erfolgt ist.
- C. Das Risiko einer vorübergehenden Invalidität.

Das Risiko  $A$  ist mit der Sterblichkeit der ganzen Population positiv korreliert. Die Summe des Risikos hängt von der Verteilungsfunktion  $P_y(t)$  ab, wobei das Todesalter  $y$  ein Parameter ist. Diese Funktion hat einen mit  $y$  stark steigenden Mittelwert. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Invalidität vor dem Tode vorliegt, gleich dem Sprung  $P_y(t)$ , ist eine abnehmende Funktion von  $y$ . Das Risiko  $A$  kann als verhältnismässig objektiv betrachtet werden.

Das Risiko  $B$  ist mit der Sterblichkeit der ganzen Population negativ korreliert. Die Summe des Risikos hängt von der Verteilungsfunktion  $K_z(t)$  ab. Diese Verteilung hat einen grossen Sprung  $K_z(t_0)$  und ist durch eine grosse Streuung charakterisiert. Die Summe des Risikos  $B$  variiert je nach den Prinzipien des Risikoträgers in bezug auf Beurteilung von permanenter Invalidität, den Möglichkeiten von Reaktivierung (Rehabilitierung) und den berufsmässigen Arbeitsmöglichkeiten. Dieses Risiko ist, jedenfalls in Schweden, stark vom Invaliditätsbegriff der Sozialversicherung abhängig.

Das Risiko  $C$  ist wesentlich von der Wartezeit abhängig, aber nicht so viel vom Alter. Weil dieses Risiko für Wartezeiten von drei Monaten oder länger im Verhältnis zu dem totalen Risiko klein ist, könnte man in der Praxis das Risiko  $C$  als vom Alter unabhängigen Zuschlag schätzen. Das Risiko enthält sicher viele Momente von subjektivem Charakter. Die zufälligen Schwankungen haben meistens wenig Bedeutung für das totale Risiko.

## Literaturverzeichnis

- [1] Thule International Symposia : Stroke, Stockholm 1967.
- [2] Skandia International Symposia : On early phases of coronary heart disease, Stockholm 1972.
- [3] Diabetes in Sweden by Albert Grönberg, Tage Larsson and Jan Jung, Suppl. 477 to Acta Medica Scandinavica, Stockholm 1967.
- [4] *Moriyama I.* : Cardiovascular diseases in the United States, American Public Health Association, Cambridge, Mass., 1971.
- [5] *Lundberg O.* : The relationship between mortality and morbidity, Cointra, Rom 1969, Sambandet mellan sjuklighet och dödlighet – ett nytt led för sjukförsäkringstekniken?, N. F. T. 2/1971.

## Zusammenfassung

Der Artikel beschreibt Modelle, welche die statistische Verbindung zwischen Morbidität und Mortalität berücksichtigen. Die statistischen Ergebnisse, die man durch Gruppierung von Invaliditätsversicherungen erhält, je nachdem, ob die Versicherung beim Tode oder beim Erreichen des höchsten Alters des Versicherungsvertrages beendet wird, motivieren das mathematische Modell.

## Summary

The article describes models which take into account the statistical relationship between morbidity and mortality. The model is motivated by statistical results obtained by separating disability insurances into two groups, one consisting of those terminating by death, the other consisting of those reaching the maximum age possible under the contract.

## Résumé

L'article décrit des modèles qui tiennent compte du rapport statistique entre la morbidité et la mortalité. La motivation du modèle est donnée par des résultats statistiques qu'on obtient en partageant les assurances-invalidité en deux groupes, suivant que l'assurance se termine à la mort ou à l'âge maximal prévu par le contrat.

## Riassunto

L'articolo descrive modelli che tengono conto della relazione statistica fra la morbidità e la mortalità. La motivazione del modello si basa sui risultati statistici ottenuti separando le assicurazione-invalidità in due gruppi secondo che il contratto assicurativo scade per decesso oppure per raggiunta dell'età massima prevista.